Eksamen i ELE3719 - Matematikk valgfag

Tirsdag 3. desember 2019, kl. 09-14

Oppgavesettet har 16 underpunkter som alle vektes likt.
Vedlagte formelsamling er på 2 sider.

Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1

Vi har

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

som gir en kvadratisk form $Q(x_1, x_2, x_3) = Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}$.

(a) Vis at $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ og $\boldsymbol{u}_3$ er parvis ortogonale og beregn lengdene $\|\boldsymbol{u}_i\|$ til vektorene.

(b) Vis at $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ og $\boldsymbol{u}_3$ er egenvektorer for A og finn de tilhørende egenverdiene.

(c) Skriv opp uttrykket for $Q(x_1, x_2, x_3)$ som en annengradsform i x_1, x_2 og x_3. Finn verdier $x_1 = a$, $x_2 = b$ og $x_3 = c$ slik at $Q(a, b, c) = -36$.

(d) Avgjør om $Q(x_1, x_2, x_3)$ er negativ eller positiv (semi-)definitt, eller indefinitt.

Vi har (3×3)-matrisen $P = \left[\boldsymbol{u}_1 \,|\, \boldsymbol{u}_2 \,|\, \boldsymbol{u}_3\right]$.

(e) Beregn determinanten til P. Bestem rangen til P.

Vi innfører nye variabler $\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, y_3]^{\mathrm{T}}$ slik at $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$. Vi får en ny kvadratisk form $Q^{\mathrm{ny}}(y_1, y_2, y_3) = Q(P\boldsymbol{y}) = (P\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}} A (P\boldsymbol{y})$.

(f) Skriv opp uttrykket for $Q^{\mathrm{ny}}(y_1, y_2, y_3)$ som en annengradsform i y_1, y_2 og y_3.

Oppgave 2

Vi lar y betegne en funksjon av t, dvs $y = y(t)$.

(a) Løs differensiallikningen $y' - y = -3e^{-0,5t}$ med $y(0) = 5$.

(b) Løs differensiallikningen $yy' = ty^2 + t$ med $y(0) = 2$.

Oppgave 3

Vi har to simultant fordelte stokastiske variabler X og Y som har simultan sannsynlighetstetthet

$$f(x,y) = \begin{cases} 0{,}35e^{-0{,}5x-0{,}7y} & \text{hvis } x,y \geqslant 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

(a) Beregn sannsynlighetene
(i) $P(X \leqslant 1\,,\, 2 \leqslant Y \leqslant 3)$ (ii) $P(Y \leqslant 5)$

(b) Vis at den kumulative fordelingsfunksjonen er gitt som

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-0{,}5x} - e^{-0{,}7y} + e^{-0{,}5x-0{,}7y} & \text{hvis } x,y \geqslant 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

(c) Beregn de marginale sannsynlighetstetthetene $f_X(x)$ og $f_Y(y)$.

(d) Beregn forventningene $E(X)$, $E(Y)$ og $E(XY)$.

(e) Bestem kovariansmatrisen C.

Oppgave 4

Vi lar y og u betegne funksjoner av t, dvs $y = y(t)$ og $u = u(t)$.

(a) Løs differensiallikningen $y'' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = 0$ med initialbetingelsene $y(0) = 5$ og $y(2\ln(2)) = 13$.

(b) Vi har kontrollproblemet

$$\text{maks} \int_0^{2\ln(2)} (1-u^2)e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t \quad , \quad \begin{cases} y' = y - 3u & (1) \\ y(0) = 5 & (2) \\ y(2\ln(2)) = 13 & (3) \end{cases}$$

Bruk Pontryagins maksimumsprinsipp til å finne en normal løsning på kontrollproblemet (bestem både y og u).

(c) Gjør kontrollproblemet om til et variasjonsproblem og bruk Euler-likningen til å løse dette.

Formelsamling

1 Sannsynlighetsregning

Binomisk fordeling

a) $X \sim \text{Binom}(n, p)$ med $n \geq 1,\ 0 \leq p \leq 1$
b) $p(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ for $i = 0, \ldots, n$
c) $E(X) = np, \quad \text{Var}(X) = np(1-p)$

Geometrisk fordeling

a) $X \sim \text{Geom}(p)$ med $0 < p \leq 1$
b) $p(X = i) = p(1-p)^{i-1}$ for $i = 1, 2, \ldots$
c) $E(X) = 1/p, \quad \text{Var}(X) = (1-p)/p^2$

Poisson-fordeling

a) $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ med $\lambda > 0$
b) $p(X = i) = e^{-\lambda} \lambda^i / i!$ for $i = 0, 1, 2, \ldots$
c) $E(X) = \lambda, \quad \text{Var}(X) = \lambda$

Uniform fordeling

a) $X \sim \text{Uniform}(a, b)$ med $a < b$
b) $f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$
c) $E(X) = (a+b)/2, \quad \text{Var}(X) = (b-a)^2/12$

Eksponentialfordeling

a) $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ med $\lambda > 0$
b) $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$
c) $E(X) = 1/\lambda, \quad \text{Var}(X) = 1/\lambda^2$

Normalfordeling

a) $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma)$ med $\sigma > 0$
b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$
c) $E(X) = \mu, \quad \text{Var}(X) = \sigma^2$

2 Matrisemetoder

Partiell derivasjon Funksjonen

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} + B\boldsymbol{x} + c$$

hvor A er en symmetrisk matrise har partiell-deriverte gitt ved vektoren

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = 2A\boldsymbol{x} + B^T$$

Lineær regresjon En lineær regresjon med modellen

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n$$

basert på et datasett med N observasjoner gitt ved

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N1} & \ldots & x_{Nn} \end{pmatrix}$$

har beste tilpasning gitt ved vektoren

$$\boldsymbol{\beta} = (X^T X)^{-1} \cdot X^T \boldsymbol{y}$$

forutsatt at $\det(X^T X) \neq 0$.

3 Variasjonsregning og kontrollteori

Variasjonsregning Variasjonsproblemet

$$\max \int_a^b F(t, y, y')\,\mathrm{d}t$$

med initialbetingelsene $y(a) = y_0$ og $y(b) = y_1$ har Euler-likning

$$F'_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F'_{y'}) = 0$$

Optimal kontrollteori Kontrollproblemet

$$\max \int_a^b F(t, y, u)\ \mathrm{d}t$$

med

$$\begin{cases} y'(t) = G(t, y, u) & (1) \\ y(a) = y_0 & (2) \\ y(b) = y_1 & (3) \end{cases}$$

har Hamilton-funksjon

$$H(t, y, u, p) = p_0 F(t, y, u) + pG(t, y, u)$$

med $p_0 = 1$ (normal løsning)
eller $p_0 = 0$ (degenerert løsning)
med første ordens Pontryaginbetingelser

$$\begin{cases} H'_u = 0 & (4) \\ p'(t) = -H'_y & (5) \end{cases}$$

Integrasjonsmetoder

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v\ \mathrm{d}t = uv - \int uv'\ \mathrm{d}t$$

b) Substitusjonen $u = u(t)$:

$$\int f(u)u'\ \mathrm{d}t = \int f(u)\ \mathrm{d}u$$