Hjemmeeksamen i Matematikk valgfag (ELE07191)

Mandag 15. juni 2020, kl. 09-15

LØSNINGFORSLAG

Oppgave 1

(a) (i) Vi beregner indreproduktene

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 &= a \cdot 2 + (-2) \cdot 2a + (-a) \cdot (-2) = 0 \\
\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_3 &= a \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + (-a) \cdot 1 = 0 \\
\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_3 &= 2 \cdot 1 + 2a \cdot 0 + (-2) \cdot 1 = 0
\end{aligned}$$

altså er $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ og $\boldsymbol{u}_3$ parvis ortogonale.

(ii) Vi beregner lengdene

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u}_1\| &= \sqrt{\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1} = \sqrt{a \cdot a + (-2) \cdot (-2) + (-a) \cdot (-a)} = \underline{\underline{\sqrt{2a^2+4}}} \\
\|\boldsymbol{u}_2\| &= \sqrt{\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2} = \sqrt{2 \cdot 2 + 2a \cdot 2a + (-2) \cdot (-2)} = \underline{\underline{\sqrt{4a^2+8}}} \\
\|\boldsymbol{u}_3\| &= \sqrt{\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_3} = \sqrt{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}
\end{aligned}$$

(b) Vi har

$$A\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 5 & 4a & -3 \\ 4a & 4a^2 & -4a \\ -3 & -4a & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ -2 \\ -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot a + 4a \cdot (-2) + (-3) \cdot (-a) \\ 4a \cdot a + 4a^2 \cdot (-2) + (-4a) \cdot (-a) \\ (-3) \cdot a + (-4a) \cdot (-2) + 5 \cdot (-a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0\boldsymbol{u}_1$$

og

$$A\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 4a & -3 \\ 4a & 4a^2 & -4a \\ -3 & -4a & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2a \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 2 + 4a \cdot 2a + (-3) \cdot (-2) \\ 4a \cdot 2 + 4a^2 \cdot 2a + (-4a) \cdot (-2) \\ (-3) \cdot 2 + (-4a) \cdot 2a + 5 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8a^2 + 16 \\ 2a(4a^2+8) \\ -2(a^2+2) \end{bmatrix} = (4a^2+8)\boldsymbol{u}_2$$

og

$$A\boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 5 & 4a & -3 \\ 4a & 4a^2 & -4a \\ -3 & -4a & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 1 + 4a \cdot 0 + (-3) \cdot 1 \\ 4a \cdot 1 + 4a^2 \cdot 0 + (-4a) \cdot 1 \\ (-3) \cdot 1 + (-4a) \cdot 0 + 5 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\boldsymbol{u}_3$$

så $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ og $\boldsymbol{u}_3$ er egenvektorer for A med egenverdiene $\underline{\underline{\lambda_1 = 0}}$, $\underline{\underline{\lambda_2 = 4a^2+8}}$ og $\underline{\underline{\lambda_3 = 2}}$.

(c) (i) Vi får

$$\begin{aligned}
Q(x_1, x_2, x_3) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4a & -3 \\ 4a & 4a^2 & -4a \\ -3 & -4a & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= \underline{\underline{5x_1^2 + 4a^2x_2^2 + 5x_3^2 + 8ax_1x_2 - 6x_1x_3 - 8ax_2x_3}}
\end{aligned}$$

(ii) Hvis vi setter $x_2 = 0$ får vi likningen $5x_1^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_3 = 4$ og finner lett løsningene $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)$ og $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, -1)$.

Men vi kan også bruke det vi allerede har funnet ut om vektorene $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ og $\boldsymbol{u}_3$. Siden $\boldsymbol{u}_3$ er en egenvektor med egenverdi 2 har vi

$$Q(\boldsymbol{u}_3) = \boldsymbol{u}_3^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_3^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{u}_3) = 2\boldsymbol{u}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_3 = 2\|\boldsymbol{u}_3\|^2 = 4$$

så $Q(1, 0, 1) = 4$. Fordi $\boldsymbol{u}_1$ har egenverdi 0 og er ortogonal til $\boldsymbol{u}_3$ får vi for alle tall t at $Q(\boldsymbol{u}_3) = (t\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3)^{\mathrm{T}} A (t\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3) = 2(t\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_3 = 2(t\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_3) = 2\|\boldsymbol{u}_3\|^2 = 4$. Dette gir løsninger $Q(t\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3) = 4$ for alle t, så f. eks. med $t = 1$ får vi løsningen $Q(a + 1, -2, 1 - a) = 4$.

(iii) Fordi A er en (3×3)-matrise kan A maksimalt ha tre egenverdier. De tre egenverdiene vi har funnet i (b) er forskjellige for alle a fordi $4a^2 + 8 \geqslant 8 > 2 > 0$. Dermed er $Q(x_1, x_2, x_3)$ positiv semi-definitt fordi alle $\lambda_i \geqslant 0$ (for alle a). Det betyr at funksjonen $Q(x_1, x_2, x_3)$ ikke har negative verdier. Spesielt har ikke likningen $Q(x_1, x_2, x_3) = -1$ løsninger.

(d) (i) Vi utvikler determinanten langs tredje kolonne:

$$\det(P) = \det \begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ -2 & 2a & 0 \\ -a & -2 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2a \\ -a & -2 \end{bmatrix} - 0 \cdot \begin{bmatrix} a & 2 \\ -a & -2 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} a & 2 \\ -2 & 2a \end{bmatrix}$$
$$= 1 \cdot ((-2)^2 - 2a(-a)) - 0 + 1 \cdot (a \cdot 2a - 2 \cdot (-2)) = \underline{\underline{4a^2 + 8}}$$

(ii) Fordi $\det(P) \neq 0$ (for alle a) er $\mathrm{rk}(P)$ maksimal, dvs $\underline{\underline{\mathrm{rk}(P) = 3}}$ for alle a.

(iii) Fordi $\mathrm{rk}(P) = 3$ har likningssystemet $P\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ bare den trivielle løsningen $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Men likningssystemet $P\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ skrevet på vektorform er $x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + x_3\boldsymbol{u}_3 = \mathbf{0}$. Spesielt vil derfor ikke likningen $\boldsymbol{u}_3 = x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2$ ha noen løsninger og $\boldsymbol{u}_3$ ligger ikke i $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ for noen verdier av a.

Oppgave 2

(a)

$$AE = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 0 & 14 & -5 \\ 7 & -5 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 185 & -35 & -98 \\ -35 & 11 & 20 \\ -98 & 20 & 56 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4 \cdot 185 + 0 \cdot (-35) + 7 \cdot (-98) & 4 \cdot (-35) + 0 \cdot 11 + 7 \cdot 20 & 4 \cdot (-98) + 0 \cdot 20 + 7 \cdot 56 \\ 0 \cdot 185 + 14 \cdot (-35) + (-5) \cdot (-98) & 0 \cdot (-35) + 14 \cdot 11 + (-5) \cdot 20 & 0 \cdot (-98) + 14 \cdot 20 + (-5) \cdot 56 \\ 7 \cdot 185 + (-5) \cdot (-35) + 15 \cdot (-98) & 7 \cdot (-35) + (-5) \cdot 11 + 15 \cdot 20 & 7 \cdot (-98) + (-5) \cdot 20 + 15 \cdot 56 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 54 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 0 \\ 0 & 0 & 54 \end{bmatrix} = 54 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{54 \cdot I}}$$

Det betyr at $A(\frac{1}{54} \cdot E) = I$ og derfor er

$$\underline{\underline{A^{-1} = \frac{1}{54} \cdot E = \frac{1}{54} \begin{bmatrix} 185 & -35 & -98 \\ -35 & 11 & 20 \\ -98 & 20 & 56 \end{bmatrix}}}$$

(b) Vi har på matriseform

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}.$$

Da gir $\boldsymbol{\beta} = (X^T X)^{-1}(X^T \boldsymbol{y})$ beste tilpasning etter minste kvadraters metode (oppgitt i formelsamlingen). Vi finner at

$$X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad X^T \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 1 \\ 49 \end{bmatrix}.$$

Så beregner vi

$$\begin{aligned} X^T X &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+1+1+1 & 2+0+1+(-3) & 1+1+2+3 \\ 2+0+1+(-3) & 4+0+1+9 & 2+0+2+(-9) \\ 1+1+2+3 & 2+0+2+(-9) & 1+1+4+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 0 & 14 & -5 \\ 7 & -5 & 15 \end{bmatrix} = A. \end{aligned}$$

Fra (a) har vi inversen til A. Dermed kan vi beregne

$$\boldsymbol{\beta} = (X^T X)^{-1}(X^T \boldsymbol{y}) = \frac{1}{54} \begin{bmatrix} 185 & -35 & -98 \\ -35 & 11 & 20 \\ -98 & 20 & 56 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 27 \\ 1 \\ 49 \end{bmatrix} = \frac{1}{54} \begin{bmatrix} 158 \\ 46 \\ 118 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{27} \begin{bmatrix} 79 \\ 23 \\ 59 \end{bmatrix}}} \approx \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2{,}93 \\ 0{,}85 \\ 2{,}19 \end{bmatrix}}}$$

og $y = 2{,}93 + 0{,}85 x_1 + 2{,}19 x_2$ er beste lineære tilpasning til dataene etter minste kvadraters metode.

Oppgave 3

(a) (i)

$$\begin{aligned}
P(0 \leqslant X \leqslant 2\,, 0 \leqslant Y \leqslant 1) &= \int_0^1 \int_0^2 \frac{1}{75}(10 - xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{75}\int_0^1 \left[10x - \frac{1}{2}x^2 y\right]_{x=0}^{x=2} \mathrm{d}y = \frac{1}{75}\int_0^1 10\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot 2^2 y - 0\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{75}\int_0^1 20 - 2y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{75}\left[20y - y^2\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{75}\left[20\cdot 1 - 1^2 - 0\right] \\
&= \underline{\underline{\frac{19}{75}}} \approx \underline{\underline{25{,}33\%}}
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
P(Y \geqslant 1) &= \int_1^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x\,,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{75}\int_1^2 \int_0^5 10 - xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{75}\int_1^2 \left[10x - \frac{1}{2}x^2 y\right]_{x=0}^{x=5} \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{75}\int_1^2 10\cdot 5 - \frac{1}{2}\cdot 5^2 y - 0\,\mathrm{d}y = \frac{1}{75}\int_1^2 50 - \frac{25}{2}y\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{75}\left[50y - \frac{25}{4}y^2\right]_{y=1}^{y=2} \\
&= \frac{1}{75}\left[50\cdot 2 - \frac{25}{4}\cdot 2^2 - \left(50\cdot 1 - \frac{25}{4}\cdot 1^2\right)\right] = \frac{1}{75}\left[75 - \frac{175}{4}\right] = \frac{125}{300} \\
&= \underline{\underline{\frac{5}{12}}} \approx \underline{\underline{41{,}67\%}}
\end{aligned}$$

(b) Vi har at $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y)$. Fordi vi trenger de marginale tetthetsfunksjonene i (d) regner vi ut de først. (Alternativt kan vi regne direkte $\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty x\cdot f(x\,,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, osv.)

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^\infty f(x\,,y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{75}\int_0^2 10 - xy\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{75}\left[10y - \frac{xy^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2} = \frac{1}{75}(20 - 2x) \quad \text{for } 0 \leqslant x \leqslant 5 \text{ og } 0 \text{ ellers.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^\infty f(x\,,y)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{75}\int_0^5 10 - xy\,\mathrm{d}x = \frac{1}{75}\left[10x - \frac{x^2 y}{2}\right]_{x=0}^{x=5} \\
&= \frac{1}{75}\left(50 - \frac{25y}{2}\right) = \frac{2}{3} - \frac{y}{6} \quad \text{for } 0 \leqslant y \leqslant 2 \text{ og } 0 \text{ ellers.}
\end{aligned}$$

Da er

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{75}\int_0^5 20x - 2x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{75}\left[10x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^5 \\ &= \frac{25}{75}\left(10 - \frac{2\cdot 5}{3}\right) = \frac{20}{9}\end{aligned}$$

Tilsvarende får vi

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{2y}{3} - \frac{y^2}{6}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{3} - \frac{y^3}{18}\right]_0^2 = \frac{4}{3} - \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$$

Dessuten har vi

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} xy \cdot f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{75}\int_0^2\int_0^5 10xy - x^2y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{75}\int_0^2 \left[5x^2y - \frac{x^3y^2}{3}\right]_{x=0}^{x=5}\mathrm{d}y = \frac{1}{75}\int_0^2 125y - \frac{125y^2}{3}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{125}{75}\int_0^2 y - \frac{y^2}{3}\,\mathrm{d}y = \frac{5}{3}\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{9}\right]_0^2 \\ &= \frac{5}{3}\left(2 - \frac{8}{9}\right) = \frac{50}{27}\end{aligned}$$

Dermed er $\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{50}{27} - \frac{20}{9}\cdot\frac{8}{9} = \underline{\underline{-\frac{10}{81}}} \approx \underline{\underline{-0{,}12345679}}$

(c) Ved et resultat i kompendiet (5.1) er

$$\mathrm{E}\big(e^{X+Y}\big) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{x+y}\cdot f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{75}\int_0^2\int_0^5 e^{x+y}(10 - xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Vi bruker at $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ og får at $e^{x+y}(10 - xy) = 10e^y \cdot e^x - ye^y \cdot xe^x$.

$$= \frac{10}{75}\int_0^2 e^y \cdot \left(\int_0^5 e^x\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y - \frac{1}{75}\int_0^2 ye^y \cdot \left(\int_0^5 xe^x\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

Vi bruker delvis integrasjon med $u(x) = x$ og $v'(x) = e^x$, $u'(x) = 1$ og $v(x) = e^x$. Da er

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = (x-1)e^x + C$$

Vi bruker dette til å regne videre på forventningsverdien.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\big(e^{X+Y}\big) &= \frac{10}{75}\cdot\big(e^5 - e^0\big)\int_0^2 e^y\,\mathrm{d}y - \frac{1}{75}\cdot\big((5-1)e^5 - (0-1)e^0\big)\int_0^2 ye^y\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{10}{75}\cdot\big(e^5 - 1\big)\big(e^2 - 1\big) - \frac{1}{75}\cdot\big(4e^5 + 1\big)\cdot\big(e^2 + 1\big) = \underline{\underline{\frac{1}{75}\cdot\big(6e^7 - 14e^5 - 11e^2 + 9\big)}} \approx \underline{\underline{59{,}06}}\end{aligned}$$

(d) (i) Pr. definisjon er

$$f_{X|b}(x) = \frac{f(x, b)}{f_Y(b)}$$

som ved utregningen i (b) er

$$= \begin{cases} \frac{\frac{1}{75}(10-x\cdot b)}{\frac{2}{3}-\frac{b}{6}} & \text{for } 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \qquad = \underline{\underline{\begin{cases} \frac{2(10-bx)}{25(4-b)} & \text{for } 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}}}$$

(ii) Vi beregner forventningen til den stokastiske variabelen $X_{|Y=b}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\big(X_{|Y=b}\big) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|b}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^5 x \cdot \frac{2(10-bx)}{25(4-b)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{25(4-b)} \int_0^5 x \cdot (10-bx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{25(4-b)} \int_0^5 10x - bx^2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{25(4-b)} \left[5x^2 - \frac{bx^3}{3}\right]_0^5 = \frac{2}{25(4-b)} \left(5^3 - \frac{b\cdot 5^3}{3} - 0\right) \\ &= \frac{2\cdot 5^3(3-b)}{3\cdot 5^2(4-b)} = \frac{10(3-b)}{3(4-b)} \end{aligned}$$

Så løser vi likningen

$$\begin{aligned} \frac{10(3-b)}{3(4-b)} &= 2 \qquad \Big| \cdot \frac{3(4-b)}{2} \quad \text{gir} \\ 5(3-b) &= 3(4-b) \qquad \text{multipliserer ut} \\ 15-5b &= 12-3b \qquad \text{og trekker sammen} \\ -2b &= -3 \qquad \big| : (-2) \quad \text{gir} \\ b &= \underline{\underline{1{,}5}} \end{aligned}$$

Oppgave 4

(a) En andre ordens lineær differensiallikning med konstante koeffisienter på standardform kan skrives som

$$y'' + ay' + by = c$$

for faste tall a, b og c. Hvis r_1 og r_2 er de to røttene til den karakteristiske likningen $r^2 + ar + b = 0$ er den generelle homogene løsningen $y_\mathrm{h}(t) = C_0 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$ og en spesiell løsning er konstantfunksjonen $y_\mathrm{p}(t) = \frac{c}{b}$. Da er den generelle løsningen til differensiallikningen $y(t) = y_\mathrm{h}(t) + y_\mathrm{p}(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \frac{c}{b}$. Vi ser at den oppgitte løsningen er på denne formen med $r_1 = 4$, $r_2 = -1$ og $\frac{c}{b} = 25$. Fordi $r^2 + ar + b = (r-4)(r+1) = r^2 - 3r - 4$ får vi $a = -3$, $b = -4$ og $c = (-4)\cdot 25 = -100$. Det gir differensiallikningen

$$\underline{\underline{y'' - 3y' - 4y = -100}}$$

(b) Ved å dele på t^2+1 på begge sider får vi en første ordens lineær differensiallikning på standardform:

$$y' + \frac{2t}{t^2+1}y = \frac{1}{t^2+1}$$

For å finne en integrerende faktor må vi finne en anti-derivert til $a(t) = \frac{2t}{t^2+1}$. Vi bruker substitusjonen $u(t) = t^2+1$ med $u'(t) = 2t$ som gir $\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$, dvs

$$\int \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln(|u|) + C_0 = \ln(t^2+1) + C_0$$

Vi velger $C_0 = 0$ og får den integrerende faktoren $e^{\ln(t^2+1)} = t^2+1$ som vi multipliserer med på begge sider av standardformen til differensiallikningen. Da er vi tilbake til den opprinnelige differensiallikningen(!), men vi vet nå at venstresiden er resultatet av å derivere produktet $y \cdot (t^2+1)$ (bruk produktregelen for derivasjon – det kunne vi evt. ha «sett»), så differensiallikningen blir

$$\left[y \cdot (t^2+1)\right]' = 1$$

Anti-derivasjon gir $y \cdot (t^2+1) = t + C_1$, dvs

$$y(t) = \frac{t + C_1}{t^2+1}$$

For å bestemme C_1 bruker vi initialbetingelsen

$$2020 = y(0) = \frac{0 + C_1}{0^2+1} = C_1$$

og får

$$\underline{\underline{y(t) = \frac{t+2020}{t^2+1}}}$$

(c) (i) Ved å dividere med t^3 på begge sider av differensiallikningen får vi en separabel differensiallikningen med en funksjon av y og y' til venstre og en funksjon av t til høyre for likhetstegnet

$$e^y y' = \frac{-2}{t^3}$$

som gir

$$\int e^y y'\,\mathrm{d}t = \int \frac{-2}{t^3}\,\mathrm{d}t$$

Ved substitusjonen $y = y(t)$ får vi $\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}t$ slik at venstresiden blir $\int e^y y'\,\mathrm{d}t = \int e^y\,\mathrm{d}y = e^y + C_1$. Vi bruker potensregelen for derivasjon baklengs for å finne høyresiden: $\int (-2) \cdot t^{-3}\,\mathrm{d}t = t^{-2} + C_2$. Da får vi likningen

$$e^y = \frac{1}{t^2} + C \qquad (\text{med } C = C_2 - C_1)$$

som vi løser for y ved å sette begge sider inn i $\ln(x)$. Da får vi

$$\underline{\underline{y(t) = \ln\left(\frac{1}{t^2} + C\right)}}$$

(ii) Vi ser at $\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t^2}+C\right)=C$ og derfor er $\lim_{t\to\infty} y(t)=\ln(C)$ hvis $C>0$, ellers finnes ikke grensen.

Oppgave 5

(a) (i) Vi setter $F(t,y,y')=\ln(y'+ay)$ og bruker kjerneregelen med kjerne $u=y'+ay$ og ytre funksjon $g(u)=\ln(u)$ til å beregne

$$F'_y = g'(u)\cdot u'_y = \frac{1}{u}\cdot a = \frac{a}{y'+ay}$$

og

$$F'_{y'} = g'(u)\cdot u'_{y'} = \frac{1}{u}\cdot 1 = \frac{1}{y'+ay}$$

Da er

$$\frac{\mathrm{d}\left(F'_{y'}\right)}{\mathrm{d}t} = \left(F'_{y'}\right)'_t = \left(\frac{1}{y'+ay}\right)'_t$$

som vi regner ved å bruke kjerneregelen med $u=y'+ay$ og $g(u)=u^{-1}$

$$= -u^{-2}\cdot(y''+ay') = -\frac{y''+ay'}{(y'+ay)^2}$$

Da blir Eulerlikningen

$$\frac{a}{y'+ay}+\frac{y''+ay'}{(y'+ay)^2}=0$$

Vi multipliserer begge sider av likningen med $(y'+ay)^2$ for å bli kvitt nevnerene og får $a(y'+ay)+y''+ay'=0$ som omgjort til standardform blir

$$y''+2ay'+a^2y=0\,.$$

(ii) Den karakteristiske likningen til denne andre ordens lineære homogene differensiallikningen er $r^2+2ar+a^2=0$ som har en dobbeltrot $r=-a$. Den generelle løsningen til differensiallikningen er derfor $y(t)=(C_0+C_1t)e^{-at}$. Initialbetingelsene gir likningene

$$\begin{cases} 15 = y(0) = C_0 & (1) \\ 21e^{-a} = y(1) = (C_0+C_1)e^{-a} & (2) \end{cases}$$

Så $C_0=15$ og $C_1=6$. Vi får

$$\underline{\underline{y(t)=(15+6t)e^{-at}}}$$

(b) Vi må vise at $F(t,y,y')=\ln(y'+ay)$ er en konkav funksjon i y og y'. Vi bruker kjerneregelen med kjerne $u=y'+ay$ og ytre funksjon $g(u)=\frac{a}{u}$ til å beregne

$$F''_{yy} = \left(\frac{a}{y'+ay}\right)'_y = g'(u)\cdot u'_y = \frac{-a}{u^2}\cdot a = -\frac{a^2}{(y'+ay)^2} = A$$

og

$$F''_{yy'} = \left(\frac{a}{y' + ay}\right)'_{y'} = g'(u) \cdot u'_{y'} = \frac{-a}{u^2} \cdot 1 = -\frac{a}{(y' + ay)^2} = B$$

Vi bruker kjerneregelen med kjerne $u = y' + ay$ og ytre funksjon $g(u) = \frac{1}{u}$ til å beregne

$$F''_{y'y'} = \left(\frac{1}{y' + ay}\right)'_{y'} = g'(u) \cdot u'_{y'} = \frac{-1}{u^2} \cdot 1 = -\frac{1}{(y' + ay)^2} = C$$

Da har vi

$$\begin{aligned} AC - B^2 &= \left(-\frac{a^2}{(y' + ay)^2}\right)\left(-\frac{1}{(y' + ay)^2}\right) - \left(-\frac{a}{(y' + ay)^2}\right)^2 \\ &= \frac{a^2}{(y' + ay)^4} - \frac{a^2}{(y' + ay)^4} = 0 \geqslant 0 \end{aligned}$$

for alle t, y og y'. Dessuten er

$$A = -\left(\frac{a}{y' + ay}\right)^2 \leqslant 0 \qquad \text{og} \qquad C = -\left(\frac{1}{y' + ay}\right)^2 \leqslant 0$$

for alle t, y og y'. Da er F konkav i y og y' og derfor gir løsningen til Eulerlikningen maksimum i variasjonsproblemet.