EKSAMENSOPPGAVE - Hjemmeeksamen

ELE 07191
Matematikk valgfag

Institutt for Samfunnsøkonomi

Utlevering:	15.06.2020	Kl. 09.00
Innlevering:	15.06.2020	Kl. 15.00

Vekt:	100% av ELE 0719
Antall sider i oppgaven:	6 inkl. forsiden
Antall vedleggsfiler til oppgaven:	0
Oppgaven besvares:	Individuelt

Lengde på besvarelse:	Ingen begrensning. ekskl. vedlegg
Maks. ant. vedleggsfiler til besvarelsen:	0
Tillatte filtyper for besvarelse:	pdf

Hjemmeeksamen i Matematikk valgfag (ELE07191[1])

Mandag 15. juni 2020, kl. 09-15[2]

Oppgavesettet har 15 underpunkter som alle vektes likt.
Vedlagte formelsamling er på 2 sider.

Besvarelsen skal leveres individuelt. Samarbeid med andre er ikke tillatt og er å anse som fusk. Alle besvarelser gjennomgår automatisk plagiatsjekk. Studenter kan også kalles inn til muntlig høring som etterprøving/kontroll av innleveringsoppgaven.

Karakterer: Bestått/ikke bestått. Det er begrunnelsene som vurderes. Henvisning til datamaskinberegninger o.l. er ingen begrunnelse. Besvarelsen skal håndskrives (evt. på skrivebrett med egen håndskrift) og leveres som én pdf-fil.

Oppgave 1

Vi har en parameter a (et fast, ubestemt tall), vektorer

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} a \\ -2 \\ -a \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2a \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \text{ og matrisen } A = \begin{bmatrix} 5 & 4a & -3 \\ 4a & 4a^2 & -4a \\ -3 & -4a & 5 \end{bmatrix}$$

som gir en kvadratisk form $Q(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}$.

(a) (i) Vis at $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ og $\boldsymbol{u}_3$ er parvis ortogonale.

(ii) Beregn lengdene $\|\boldsymbol{u}_i\|$ til vektorene.

(b) Vis at $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ og $\boldsymbol{u}_3$ er egenvektorer for A, og finn de tilhørende egenverdiene.

(c) (i) Skriv opp uttrykket for $Q(x_1, x_2, x_3)$ som en andregradsform i x_1, x_2 og x_3.

(ii) Finn to løsninger til likningen $Q(x_1, x_2, x_3) = 4$.

(iii) Avgjør om likningen $Q(x_1, x_2, x_3) = -1$ har løsninger.

Vi har (3×3)-matrisen $P = \left[\boldsymbol{u}_1 \,|\, \boldsymbol{u}_2 \,|\, \boldsymbol{u}_3\right]$.

(d) (i) Beregn determinanten $\det(P)$. (Vis utregningen!)

(ii) Bestem rangen $\mathrm{rk}(P)$.

(iii) Avgjør om det finnes verdier a slik at $\boldsymbol{u}_3 \in \mathrm{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$.

[1] Tilsvarer ELE37191

[2] Inkluderer tid til innlevering

Oppgave 2

Vi har matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 0 & 14 & -5 \\ 7 & -5 & 15 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad E = \begin{bmatrix} 185 & -35 & -98 \\ -35 & 11 & 20 \\ -98 & 20 & 56 \end{bmatrix}$$

(a) (i) Beregn matriseproduktet AE. (Vis matrisemultiplikasjonen!)

(ii) Bruk denne beregningen til å finne inversen A^{-1}.

Vi har to frie (eksogene) variabler x_1 og x_2 og en avhengig (endogen) variabel y og fire observasjoner:

y	x_1	x_2
7	2	1
5	0	1
8	1	2
7	−3	3

(b) Bestem tallene β_0 , β_1 og β_2 slik at regresjonsmodellen $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$ er den beste lineære tilpasningen til observasjonene etter minste kvadraters metode.

Oppgave 3

Vi har to simultant fordelte kontinuerlige stokastiske variabler X og Y som har simultan tetthetsfunksjon

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{75}(10 - xy) & \text{hvis } 0 \leqslant x \leqslant 5 \text{ og } 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

(a) Beregn sannsynlighetene
(i) $P(X \leqslant 2, Y \leqslant 1)$ (ii) $P(Y \geqslant 1)$

(b) Beregn kovariansen $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

(c) Beregn forventningen $\mathrm{E}\big(e^{X+Y}\big)$ til den stokastiske variabelen e^{X+Y}.

(d) (i) Bestem sannsynlighetstettheten $f_{X|b}(x)$ til den betingete stokastiske variabelen $X_{|Y=b}$ for et ubestemt tall b med $0 \leqslant b \leqslant 2$. [3]

(ii) Bestem b-verdien som gir forventningen $\mathrm{E}\big(X_{|Y=b}\big) = 2$.

[3] I tidligere år har $f_{X|b}(x)$ vært skrevet som $f_{X|Y}(x \mid b)$

Oppgave 4

Vi lar y betegne en funksjon av t, dvs. $y = y(t)$.

(a) Vi har $y(t) = 3e^{4t} - 2e^{-t} + 25$. Da er $y(t)$ en løsning til en andre ordens lineær differensiallikning med konstante koeffisienter. Finn denne differensiallikningen. (Skriv den på standardform.)

(b) Løs differensiallikningen $(t^2+1)y' + 2ty = 1$ med $y(0) = 2020$.

(c) (i) Løs differensiallikningen $t^3 e^y y' = -2$, $t > 0$.

(ii) La $y(t)$ være løsningen til differensiallikningen. Bestem grenseverdien $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

Oppgave 5

Vi lar y betegne en funksjon av t, dvs. $y = y(t)$ og la a være en parameter (et fast, ubestemt tall). Vi har variasjonsproblemet

$$\text{maks} \int_0^1 \ln(y' + ay)\, \mathrm{d}t \quad , \qquad \begin{cases} y(0) = 15 & (1) \\ y(1) = 21e^{-a} & (2) \end{cases}$$

(a) (i) Vis at Eulerlikningen til variasjonsproblemet kan skrives som

$$y'' + 2ay' + a^2 y = 0\,.$$

(ii) Løs denne differensiallikningen med initialbetingelsene (1) og (2) i variasjonsproblemet.

(b) Vis at løsningen til Eulerlikningen løser variasjonsproblemet.

Formelsamling

1 Sannsynlighetsregning

Binomisk fordeling

a) $X \sim \text{Binom}(n, p)$ med $n \geq 1,\ 0 \leq p \leq 1$
b) $p(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ for $i = 0, \ldots, n$
c) $E(X) = np, \quad \text{Var}(X) = np(1-p)$

Geometrisk fordeling

a) $X \sim \text{Geom}(p)$ med $0 < p \leq 1$
b) $p(X = i) = p(1-p)^{i-1}$ for $i = 1, 2, \ldots$
c) $E(X) = 1/p, \quad \text{Var}(X) = (1-p)/p^2$

Poisson-fordeling

a) $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ med $\lambda > 0$
b) $p(X = i) = e^{-\lambda} \lambda^i / i!$ for $i = 0, 1, 2, \ldots$
c) $E(X) = \lambda, \quad \text{Var}(X) = \lambda$

Uniform fordeling

a) $X \sim \text{Uniform}(a, b)$ med $a < b$
b) $f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$
c) $E(X) = (a+b)/2, \quad \text{Var}(X) = (b-a)^2/12$

Eksponentialfordeling

a) $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ med $\lambda > 0$
b) $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$
c) $E(X) = 1/\lambda, \quad \text{Var}(X) = 1/\lambda^2$

Normalfordeling

a) $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma)$ med $\sigma > 0$
b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$
c) $E(X) = \mu, \quad \text{Var}(X) = \sigma^2$

2 Matrisemetoder

Partiell derivasjon Funksjonen

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} + B\boldsymbol{x} + c$$

hvor A er en symmetrisk matrise har partiell-deriverte gitt ved vektoren

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = 2A\boldsymbol{x} + B^T$$

Lineær regresjon En lineær regresjon med modellen

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n$$

basert på et datasett med N observasjoner gitt ved

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N1} & \ldots & x_{Nn} \end{pmatrix}$$

har beste tilpasning gitt ved vektoren

$$\boldsymbol{\beta} = (X^T X)^{-1} \cdot X^T \boldsymbol{y}$$

forutsatt at $\det(X^T X) \neq 0$.

3 Variasjonsregning og kontrollteori

Variasjonsregning Variasjonsproblemet

$$\max \int_a^b F(t, y, y') \, \mathrm{d}t$$

med initialbetingelsene $y(a) = y_0$ og $y(b) = y_1$ har Euler-likning

$$F'_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F'_{y'}) = 0$$

Optimal kontrollteori Kontrollproblemet

$$\max \int_a^b F(t, y, u) \, \mathrm{d}t$$

med

$$\begin{cases} y'(t) = G(t, y, u) & (1) \\ y(a) = y_0 & (2) \\ y(b) = y_1 & (3) \end{cases}$$

har Hamilton-funksjon

$$H(t, y, u, p) = p_0 F(t, y, u) + pG(t, y, u)$$

med $p_0 = 1$ (normal løsning)
eller $p_0 = 0$ (degenerert løsning)
med første ordens Pontryaginbetingelser

$$\begin{cases} H'_u = 0 & (4) \\ p'(t) = -H'_y & (5) \end{cases}$$

Integrasjonsmetoder

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \, \mathrm{d}t = uv - \int uv' \, \mathrm{d}t$$

b) Substitusjonen $u = u(t)$:

$$\int f(u)u' \, \mathrm{d}t = \int f(u) \, \mathrm{d}u$$