Hjemmeeksamen i Matematikk valgfag (ELE07191)

Mandag 10. mai 2021, kl. 14-19.15

LØSNINGFORSLAG

Oppgave 1

(a) Vi gjør Gausseleminінasjon på koeffisientmatrisen:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -7 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 12 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & -16 & -8 \end{array}\right]$$

Rad I legges til rad II:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 16 \\ 2 & 6 & 0 & -16 & -8 \end{array}\right]$$

-2 ganger rad I legges til rad III:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -10 \end{array}\right]$$

Rad II legges til rad III:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

Dette er en matrise på trappeform (det finnes andre).

Det nye likningssystemet

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & +x_3 & -7x_4 & = 1 \\ & & 2x_3 & +5x_4 & = 16 \\ & & & 3x_4 & = 6 \end{cases}$$

har de samme løsningene som det opprinnelige. Systemet har tre pivoter: 1 foran x_1 i første likning 2 foran x_3 i andre likning og 3 foran x_4 i tredje likning. Da har vi at $\underline{\underline{x_4 = 2}}$, $\underline{\underline{x_3 = 3}}$, $\underline{\underline{x_2 = t}}$ er en fri parameter og $\underline{\underline{x_1 = 12 - 3t}}$.

På vektorform:

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

(b) At $\boldsymbol{v}$ ligger i Span$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ betyr akkurat at likningssystemet i (a) har løsninger, som det har fra utregningen i (a) (faktisk uendelig mange, f. eks. kan vi sette $t = 0$ og få $\boldsymbol{v} = 12\boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_3 + 2\boldsymbol{u}_4$). Dimensjonen til Span$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ er lik antall pivoter i de tre første kolonnene i trappeformen i (a), dvs. at $\underline{\underline{\text{dimensjonen er 2}}}$.

(c) Ved å droppe $\boldsymbol{u}_4$ i likningssystemet i (a) gir gausseliminasjonen i (a) at likningssystemet er ekvivalent til

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & +x_3 & & = 1 \\ & & 2x_3 & & = 16 \\ & & & 0 & = 6 \end{cases}$$

som ikke har løsninger (uansett hva x_1, x_2 og x_3 er stemmer ikke den siste likningen). Altså ligger ikke $\boldsymbol{v}$ i Span$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$.

Alternativt har vi at dimensjonen til Span$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ er 3 fordi det er 3 pivoter i trappeformen fra (a). Hadde $\boldsymbol{u}_4$ ligget i Span$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ som bare har dimensjon 2 ville Span$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ også hatt dimensjon 2. Altså ligger ikke $\boldsymbol{u}_4$ i Span$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$.

Oppgave 2

(a) Vi løser først den karakteristiske likningen til A for å finne egenverdiene:

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} -26-\lambda & 12 \\ 12 & -19-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 45\lambda + 350 = (\lambda+10)(\lambda+35) = 0$$

gir $\lambda = -10$ eller $\lambda = -35$. For hver av egenverdiene finner vi en egenvektor:

$$\underline{\lambda = -10}: \qquad \begin{bmatrix} -26-(-10) & 12 \\ 12 & -19-(-10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 12 \\ 12 & -9 \end{bmatrix}$$

Ved å dele på 4 i første rad og deretter dele på 3 i andre rad får vi

$$\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Legger første rad til andre og får

$$\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det homogene likningssytemet har løsninger

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

for en fri parameter t. Ved å sette $t = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{1}{5}$ får vi egenvektoren $\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ som har lengde 1.

$$\underline{\lambda = -35}: \qquad \begin{bmatrix} -26-(-35) & 12 \\ 12 & -19-(-35) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$$

som etter gausseleminiasjon gir

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det homogene likningssystemet har løsninger

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

for en fri parameter s. Ved å sette $s = \frac{1}{5}$ får vi egenvektoren $\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ som har lengde 1. Da er $\boldsymbol{u}_1$ og $\boldsymbol{u}_2$ ortogonal egenvektorer av lengde 1 og $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \vdots \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix}$ er derfor en ortogonal matrise som diagonaliserer A, dvs $P^T AP = D$ er en diagonalmatrise med egenverdiene på hoveddiagonalen:

$$D = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -35 \end{bmatrix}$$

(b) De partiellderiverte til f er gitt som

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}} = 2A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

slik at den (de) stasjonære punktene er gitt som løsningene til likningen

$$2A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

Fordi A er invertibel har likningen bare en løsning

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{350} \cdot \begin{bmatrix} -19 & -12 \\ -12 & -26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{100} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}01 \\ -0{,}02 \end{bmatrix}}}$$

Fordi egenverdiene til A er negative er $f(x, y)$ en konkav funksjon og det stasjonære punktet er et globalt maksimumspunkt.

(c) Fordi $P^T = P^{-1}$ får vi $A^n = (PDP^T)^n = PDP^T PDP^T \dots PDP^T PDP^T = PD^n P^T$. Dessuten er $D^n = \begin{bmatrix} (-10)^n & 0 \\ 0 & (-35)^n \end{bmatrix}$ og så regner vi matrisemultiplikasjonen

$$\begin{aligned} A^n = PD^n P^T &= \frac{1}{25} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-10)^n & 0 \\ 0 & (-35)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{25} \cdot \begin{bmatrix} 9(-10)^n + 16(-35)^n & 12[(-10)^n - (-35)^n] \\ 12[(-10)^n - (-35)^n] & 16(-10)^n + 9(-35)^n \end{bmatrix}}} \end{aligned}$$

Oppgave 3

(a) (i)

$$
\begin{aligned}
P(X \leqslant 5\,, Y \leqslant 1{,}25) &= \int_{-\infty}^{1,25}\int_{-\infty}^{5} f(x\,,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{150}\int_{1}^{1,25}\int_{0}^{5} \frac{4x}{y^2} + 5\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{150}\int_{1}^{1,25}\left[\frac{2x^2}{y^2} + 5x\right]_0^5 \mathrm{d}y = \frac{1}{150}\int_{1}^{1,25}\left[\frac{2\cdot 5^2}{y^2} + 5\cdot 5 - 0\right]\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{150}\int_{1}^{1,25}\frac{50}{y^2} + 25\,\mathrm{d}y = \frac{1}{150}\left[-\frac{50}{y} + 25y\right]_1^{1,25} \\
&= \frac{1}{150}\left[-\frac{50}{\frac{5}{4}} + 25\cdot\frac{5}{4} - (-50+25)\right] = \frac{1}{150}\left[-40 + \frac{125}{4} + 25\right] = \frac{65}{600} = \underline{\underline{\frac{13}{120}}}
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
P(X \geqslant 5) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{5}^{\infty} f(x\,,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{150}\int_{1}^{2}\int_{5}^{10}\frac{4x}{y^2} + 5\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{150}\int_{1}^{2}\left[\frac{2x^2}{y^2} + 5x\right]_5^{10}\mathrm{d}y = \frac{1}{150}\int_{1}^{2}\left[\frac{2\cdot 10^2}{y^2} + 5\cdot 10 - \left(\frac{2\cdot 5^2}{y^2} + 5\cdot 5\right)\right]\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{150}\int_{1}^{2}\left[\frac{150}{y^2} + 25\right]\mathrm{d}y = \frac{1}{150}\left[-\frac{150}{y} + 25y\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{150}\left[-\frac{150}{2} + 25\cdot 2 - \left(-\frac{150}{1} + 25\cdot 1\right)\right] = \frac{1}{150}\left[\frac{150}{2} + 25\right] = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}
\end{aligned}
$$

(b) Den marginale sannsynlighetstettheten

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x\,,y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{150}\int_{1}^{2}\frac{4x}{y^2} + 5\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{150}\left[-\frac{4x}{y} + 5y\right]_1^2 = \frac{1}{150}\left[-\frac{4x}{2} + 5\cdot 2 - \left(-\frac{4x}{1} + 5\cdot 1\right)\right] \\
&= \frac{2x+5}{150} \quad \text{for } 0 \leqslant x \leqslant 10 \text{ og } 0 \text{ ellers.}
\end{aligned}
$$

For å finne medianen løser vi likningen $\int_{-\infty}^{r} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}5$ for r, dvs. $\int_0^r \frac{2x+5}{150}\,\mathrm{d}x = 0{,}5$. Vi beregner venstresiden og får $\frac{r^2+5r}{150} = 0{,}5$ som gir $r^2 + 5r = 75$ med positiv løsning $\underline{\underline{r = \frac{5(\sqrt{13}-1)}{2} \approx 6{,}51}}$.

(c) Vi vil sammenligne $f(x,y)$ med $f_X(x)\cdot f_Y(y)$ og må derfor finne den marginale sannsynlighetstettheten

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x\,,\,y)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{150}\int_0^{10} \frac{4x}{y^2} + 5\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{150}\left[\frac{2x^2}{y^2} + 5x\right]_0^{10} = \frac{1}{150}\left[\frac{2\cdot 10^2}{y^2} + 5\cdot 10 - 0\right] \\
&= \frac{4}{3y^2} + \frac{1}{3} \quad \text{for } 1 \leqslant y \leqslant 2 \text{ og 0 ellers.}
\end{aligned}
$$

Da blir

$$
f_X(x)\cdot f_Y(y) = \begin{cases} \left(\frac{2x+5}{150}\right)\left(\frac{4}{3y^2} + \frac{1}{3}\right) & \text{hvis } 0 \leqslant x \leqslant 10 \text{ og } 1 \leqslant y \leqslant 2 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}
$$

Men dette er ikke samme funksjon som $f(x,y)$, f. eks. er $f(0,1) = \frac{5}{150}$ mens $f_X(0)\cdot f_Y(1) = \frac{5}{150}\cdot\frac{5}{3}$. Altså er ikke X og Y uavhengige stokastiske variabler.

(d) (i)

$$
f_{Y|a}(y) = \frac{f(a,y)}{f_X(a)} = \frac{\frac{1}{150}\left(\frac{4a}{y^2} + 5\right)}{\frac{1}{150}(2a+5)} = \frac{1}{(2a+5)}\left(\frac{4a}{y^2} + 5\right)
$$

for $1 \leqslant y \leqslant 2$ og 0 ellers.

(ii)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\big(Y_{|X=a}\big) &= \frac{1}{(2a+5)}\int_1^2 y\left(\frac{4a}{y^2} + 5\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{(2a+5)}\int_1^2 \left(\frac{4a}{y} + 5y\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{(2a+5)}\left[4a\ln(y) + \frac{5}{2}y^2\right]_1^2 = \frac{1}{(2a+5)}\left[4a\ln 2 + \frac{5}{2}\cdot 3\right] \\
&= \underline{\underline{\frac{8\ln(2)a + 15}{(4a+10)}}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 4

(a) Vi bruker brøkformelen for derivasjon og finner

$$
f'(t) = \frac{Ce^t\cdot(e^t + b) - Ce^t\cdot e^t}{(e^t+b)^2} = \frac{b\cdot Ce^t}{(e^t+b)^2} = \frac{b\cdot f(t)}{e^t + b}
$$

Vi multipliserer opp nevneren og får $(e^t + b)f' = bf$.

For å finne grensen deler vi teller og nevner med e^t og får

$$
\lim_{t\to\infty}\frac{Ce^t}{e^t+b} = \lim_{t\to\infty}\frac{C}{1+be^{-t}} = C
$$

(b) Den homogene løsningen $y_h(t) = 10e^t + 5e^{-2t}$ betyr at den karakteristiske likningen er $(r-1)(r+2) = 0$, dvs. $r^2 + r - 2 = 0$ som kommer fra den homogene differensiallikningen $y'' + y' - 2y = 0$. Den partikulære løsningen $y_p(t) = -2021$ gir at høyresiden av den (ikke-homogene) differensiallikningen må være $(-2)(-2021) = 4042$, dvs. skrevet på standardform $\underline{\underline{y'' + y' - 2y = 4042}}$.

Oppgave 5

(a) Vi setter $F(t, y, y') = e^{y'-4y}$ og beregner $F'_y = -4F$ og $F'_{y'} = F$ ved å bruke kjerneregelen med $u = y' - 4y$. Videre er $[F'_{y'}]'_t = F'_t = (y'' - 4y') \cdot F$ igjen ved kjerneregelen. Eulerlikningen sier da at $-4F - (y'' - 4y') \cdot F = 0$. Fordi F er en felles, positiv faktor på venstresiden, deler vi begge sider av likningen på F og får $-4 - (y'' - 4y') = 0$, dvs $y'' - 4y' = -4$ som er en inhomogen, andre ordens lineær differensiallikning med konstante koeffisienter. Den karakteristiske likningen $r^2 - 4r = 0$ har røttene $r = 0$ og $r = 4$. Det gir $y_h(t) = C_1 e^{4t} + C_2$. Vi gjetter på en partikulær løsning $y_p(t) = At$ som gir $y'_p(t) = A$ og $y''_p(t) = 0$. Da gir differensiallikningen $0 - 4A = -4$, dvs $A = 1$ og $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1 e^{4t} + t + C_2$. Vi bruker initialbetingelsene for å bestemme C_1 og C_2. Fra (1) får vi $C_1 + C_2 = 3$. Fra (2) får vi da $C_1 e^4 + 1 + 3 - C_1 = 4e^2$. Samler og faktoriserer ut C_1 på venstresiden: $C_1(e^4 - 1) = 4(e^2 - 1)$. Etter divisjon får vi $C_1 = 4\frac{e^2-1}{e^4-1} = 4\frac{e^2-1}{(e^2-1)(e^2+1)} = \frac{4}{e^2+1}$ og $C_2 = 3 - \frac{4}{e^2+1} = \frac{3e^2-1}{e^2+1}$. Altså er løsningen til Eulerlikningen $\underline{\underline{y(t) = \frac{4e^{4t}}{e^2+1} + t + \frac{3e^2-1}{e^2+1}}}$.

<u>Alternativ</u>: Vi integrerer begge sider av $y'' - 4y' = -4$ og får $y' - 4y = -4t + C_3$ som er en første ordens lineær differensiallikning. Vi multipliserer begge sider med den integrerende faktoren e^{-4t} og får $(y \cdot e^{-4t})' = -4te^{-4t} + C_3 e^{-4t}$. Ved delvis integrasjon med $u = -4t$, $u' = -4$, og $v' = e^{-4t}$, $v = -\frac{e^{-4t}}{4}$ får vi

$$\int -4te^{-4t}\,\mathrm{d}t = te^{-4t} - \int e^{-4t}\,\mathrm{d}t = te^{-4t} + \frac{e^{-4t}}{4} + C_4$$

Da er

$$y \cdot e^{-4t} = \int -4te^{-4t} + C_3 e^{-4t}\,\mathrm{d}t = te^{-4t} + \frac{e^{-4t}}{4} + C_4 - \frac{C_3}{4}e^{-4t} = te^{-4t} + C_5 e^{-4t} + C_4$$

hvor $C_5 = \frac{1-C_3}{4}$. Multipliserer med e^{4t} på begge sider og får $y(t) = t + C_5 + C_4 e^{4t}$. Dette er det samme som vi fikk i den første løsningen med $C_4 = C_1$ og $C_5 = C_2$.

(b) Vi viser at F som funksjon av y og y' er konveks. Vi beregner $F''_{yy} = (-4F)'_y = 16F$, $F''_{yy'} = (-4F)'_{y'} = -4F$ og $F''_{y'y'} = (F)'_{y'} = F$. Med $A = 16F$, $B = -4F$ og $C = F$ får vi $AC - B^2 = 16F - (-4F)^2 = 0$, $A > 0$ og $C > 0$ for alle y og y'. Altså er F konveks (kravet er $AC - B^2 \geqslant 0$, $A \geqslant 0$ og $C \geqslant 0$) og løsningen til Eulerlikningen gir minimum i variasjonsproblemet.

Oppgave 6

Hamilton-funksjonen for normalløsningen er $H = \ln(u)e^{-3t} + p \cdot (2y + u)$ for en funksjon $p = p(t)$. Vi avgjør først om H er konkav i (y, u). Vi har

$$\begin{cases} H'_y = 2p \\ H'_u = \frac{e^{-3t}}{u} + p \end{cases} \qquad \text{som gir} \qquad \begin{cases} H''_{yy} = 0 = A \\ H''_{yu} = 0 = B \\ H''_{uu} = -\frac{e^{-3t}}{u^2} = C \end{cases}$$

Dermed er $AC - B^2 = 0 \geqslant 0$, $A = 0 \leqslant 0$ og $C = -\frac{e^{-3t}}{u^2} \leqslant 0$ så H som funksjon av y og u er konkav. En løsning på Pontryagin-betingelsene vil derfor gi et maksimum.

Pontryagin-betingelsene gir

$$\begin{cases} \frac{e^{-3t}}{u} + p = 0 & (4) \\ p' = -2p & (5) \end{cases}$$

(5) er en homogen første ordens differensiallikning med konstante koeffisienter som har generell løsning $p(t) = C_0 e^{-2t}$. Innsatt i (4) får vi $\frac{e^{-3t}}{u} + C_0 e^{-2t} = 0$, dvs. $\frac{e^{-3t}}{u} = -C_0 e^{-2t}$, dvs. $e^{3t}u = -\frac{1}{C_0}e^{2t}$, dvs. $u(t) = C_1 e^{-t}$ med $C_1 = -\frac{1}{C_0}$ en ubestemt konstant. Fra (1) får vi da en første orden lineære differensiallikningen $y' - 2y = C_1 e^{-t}$. Den kan løses ved å multiplisere begge sider med den integrerende konstanten e^{-2t} som gir $(e^{-2t}y)' = C_1 e^{-3t}$, dvs. $e^{-2t}y = \int C_1 e^{-3t}\, dt = -\frac{C_1}{3}e^{-3t} + C_2$. Vi setter $C_3 = -\frac{C_1}{3}$ og multipliserer begge sider med e^{2t}. Det gir $y(t) = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t}$. Fra (2) får vi $C_2 + C_3 = 0$, f. eks. $C_3 = -C_2$ som innsatt i (3) gir $-C_2 e^{-\ln(3)} + C_2 e^{2\ln 3} = 26$, dvs. $C_2(-\frac{1}{3} + 9) = 26$, dvs. $C_2 = 3$ og $C_3 = -3$. Dermed er $\underline{\underline{y(t) = 3e^{2t} - 3e^{-t}}}$. For å finne $u(t)$ bruker vi (1) med $y'(t) = 6e^{2t} + 3e^{-t}$ og $u(t) = y'(t) - 2y(t) = \underline{\underline{9e^{-t}}}$.