Hjemmeeksamen i Matematikk valgfag (ELE07191[1])

Mandag 10. mai 2021, kl. 14-19.15

Oppgavesettet har 15 underpunkter som alle vektes likt.
Vedlagte formelsamling er på 1 side.

Besvarelsen skal leveres individuelt. Samarbeid med andre er ikke tillatt og er å anse som fusk. Alle besvarelser gjennomgår automatisk plagiatsjekk. Studenter kan også kalles inn til muntlig høring som etterprøving/kontroll av innleveringsoppgaven.

Karakterer: Bestått/ikke bestått. Det er begrunnelsene som vurderes. Henvisning til datamaskinberegninger o.l. er ingen begrunnelse. Besvarelsen skal håndskrives (evt. på skrivebrett med egen håndskrift) og leveres som én pdf-fil.

Oppgave 1

Vi har vektorer

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{bmatrix} -7 \\ 12 \\ -16 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 15 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

(a) Løs likningen $x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + x_3\boldsymbol{u}_3 + x_4\boldsymbol{u}_4 = \boldsymbol{v}$.

(b) Avgjør om $\boldsymbol{v}$ ligger i $\text{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$. Bestem dimensjonen til $\text{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$.

(c) Finn en 3-vektor som ikke ligger i $\text{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$.

Oppgave 2

Vi har matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -26 & 12 \\ 12 & -19 \end{bmatrix}$$

(a) Finn en ortogonal (2×2)-matrise P slik at $P^TAP = D$ er en diagonalmatrise og bestem D.

Den symmetriske matrisen A bestemmer en kvadratisk form $Q(x, y)$. Vi setter $f(x, y) = Q(x, y) + x - y + 10$.

(b) Finn det stasjonære punktet til $f(x, y)$ og avgjør om det er et lokalt maksimum- eller minimumspunkt eller ingen av delene.

(c) Anta n er et vilkårlig positivt heltall. Beregn matrisen A^n.

[1] Tilsvarer ELE37191

Oppgave 3

Vi har to simultant fordelte kontinuerlige stokastiske variabler X og Y som har simultan tetthetsfunksjon

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{150}\left(\frac{4x}{y^2}+5\right) & \text{hvis } 0 \leqslant x \leqslant 10 \ \text{ og } \ 1 \leqslant y \leqslant 2 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

(a) Beregn sannsynlighetene
(i) $P(X \leqslant 5\,, Y \leqslant 1{,}25)$ (ii) $P(X \geqslant 5)$

(b) Bestem den marginale sannsynlighetstettheten $f_X(x)$. Beregn medianen til X.

(c) Avgjør om X og Y er uavhengige stokastiske variabler.

(d) (i) Bestem sannsynlighetstettheten $f_{Y|a}(y)$ til den betingete stokastiske variabelen $Y|a = Y_{|X=a}$ for et ubestemt tall a med $0 \leqslant a \leqslant 10$.
(ii) Beregn forventningen $\mathrm{E}\big(Y_{|X=a}\big)$.

Oppgave 4

Vi lar f og y betegne funksjoner av t, dvs. $f = f(t)$ og $y = y(t)$.

(a) Anta C og b er to ubestemte tall (parametre) med $b \geqslant 0$. Vis at $f(t) = \frac{Ce^t}{e^t+b}$ er en løsning på differensiallikningen $(e^t + b)f' = bf$. Bestem grenseverdien $\lim_{t\to\infty} f(t)$.

(b) Vi har $y(t) = 10e^t + 5e^{-2t} - 2021$. Da er $y(t)$ en løsning til en andre ordens lineær differensiallikning med konstante koeffisienter. Finn denne differensiallikningen. (Skriv den på standardform med et konstant tall på høyresiden.)

Oppgave 5

Vi lar y betegne en funksjon av t, dvs. $y = y(t)$. Vi har variasjonsproblemet

$$\min \int_0^1 e^{y'-4y}\, \mathrm{d}t \quad , \qquad \begin{cases} y(0) = 3 & (1) \\ y(1) = 4e^2 & (2) \end{cases}$$

(a) Løs Eulerlikningen til variasjonsproblemet.

(b) Vis at løsningen til Eulerlikningen løser variasjonsproblemet.

Oppgave 6

Vi lar y og u betegne funksjoner av t, dvs. $y = y(t)$ og $u = u(t)$. Vi har kontrollproblemet

$$\text{maks} \int_0^{\ln(3)} \ln(u)e^{-3t}\,\mathrm{d}t \quad , \qquad \begin{cases} y' = 2y + u & (1) \\ y(0) = 0 & (2) \\ y(\ln 3) = 26 & (3) \end{cases}$$

Bruk Pontryagins maksimumsprinsipp til å finne normalløsningen på kontrollproblemet (angi både y og u).