Eksamen i ELE3719 Matematikk valgfag
fredag 13. mai 2022, kl. 9-14
LØSNINGFORSLAG

Oppgave 1

a) Vi ser at matrisen $\left[u_1 \vdots u_2 \vdots u_3\right]$ er på trappeform med pivoter i hver kolonne og vektorlikningen $x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + x_3\boldsymbol{u}_3 = \mathbf{0}$ har derfor bare den trivielle løsningen $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ og $\underline{\underline{\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\} \text{ er lineært uavhengige}}}$. Tilsvarende får vi ved Gausseliminasjon at

$$\left[\boldsymbol{u}_3 \vdots \boldsymbol{u}_4 \vdots \boldsymbol{u}_5\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 2 \\ -6 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I denne trappeformen er det to pivoter og vektorlikningen $x_3\boldsymbol{u}_3 + x_4\boldsymbol{u}_4 + x_5\boldsymbol{u}_5 = \mathbf{0}$ har derfor ikke-trivielle løsninger og $\underline{\underline{\{\boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4, \boldsymbol{u}_5\} \text{ er lineært avhengige}}}$. Vi kunne også bare observere avhengigheten $\boldsymbol{u}_4 = -2{,}5\boldsymbol{u}_3 + 0\boldsymbol{u}_5$.

Vi løser vektorlikningen $x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + x_3\boldsymbol{u}_3 + x_4\boldsymbol{u}_4 + x_5\boldsymbol{u}_5 = \mathbf{0}$ ved å observerer at koeffisientmatrisen:

$$\left[\boldsymbol{u}_1 \vdots \boldsymbol{u}_2 \vdots \boldsymbol{u}_3 \vdots \boldsymbol{u}_4 \vdots \boldsymbol{u}_5\right] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

er på trappeform med 4 pivoter. Vi får $\underline{\underline{x_5 = 0}}$ og $\underline{\underline{x_4 = t}}$ (en fri parameter). Innsatt i tredje likning gir dette $\underline{\underline{x_3 = 2{,}5t}}$ som innsatt i andre likning gir $\underline{\underline{x_2 = 0}}$ som innsatt i første likning gir $\underline{\underline{x_1 = 0}}$.

b) Vi setter vektorene som søyler i en matrise

$$\left[\boldsymbol{u}_1 \vdots \boldsymbol{u}_2 \vdots \boldsymbol{u}_3 \vdots \boldsymbol{u}_4\right] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

som er på trappeform med pivoter i kolonne 1, 2 og 3. Dermed er $\text{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\} = \text{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ og $\underline{\underline{\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\} \text{ er en basis for dette rommet}}}$.

Dimensjonen til $\text{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4, \boldsymbol{u}_5\}$ er lik antall elementer i en basis. Vi setter vektorene som søyler i en matrise

$$\left[\boldsymbol{u}_1 \vdots \boldsymbol{u}_2 \vdots \boldsymbol{u}_3 \vdots \boldsymbol{u}_4 \vdots \boldsymbol{u}_5\right] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

som er på trappeform med pivoter i kolonne 1, 2, 3 og 5. Da er $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_5\}$ en basis for $\text{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4, \boldsymbol{u}_5\}$ som dermed har $\underline{\underline{\text{dimensjon } 4}}$.

Anta $\text{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_5\} = \text{Span}\{\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_4, \boldsymbol{u}_5\}$. Det betyr at vi ikke får flere lineærkombinasjoner av å legge $\boldsymbol{u_2}$ og $\boldsymbol{u_4}$ til $\text{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_5\}$. Altså vil $\text{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4, \boldsymbol{u}_5\} = \text{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_5\}$ og dermed vil dimensjonen maksimalt være 3 som er en motsigelse med det vi fant over. Altså er $\underline{\underline{\text{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_5\} \neq \text{Span}\{\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_4, \boldsymbol{u}_5\}}}$.

Oppgave 2

a) Vi har

$$\underline{\underline{A = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 4 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix}}} \qquad \text{og} \qquad \underline{\underline{B = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -6 \end{bmatrix}}}$$

Da er

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 4 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 2017$$

b) Den karakteristiske likningen til A er $\det(A - \lambda I) = 0$. Dvs

$$\det \begin{bmatrix} -5-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -5-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & -5-\lambda \end{bmatrix} = 0 \qquad dvs$$

$$(-5-\lambda)[(-5-\lambda)^2 - 16] - 9(-5-\lambda) = 0 \qquad dvs$$

$$\underline{\underline{(-5-\lambda)[(-5-\lambda)^2 - 25] = 0}} \qquad dvs$$

$$\underline{\underline{\lambda(\lambda^2 + 15\lambda + 50) = 0}}$$

Vi setter inn $\lambda = -10$ i (det første) uttrykket og får $5 \cdot [5^2 - 25] = 0$. Vi setter inn $\lambda = -5$ i uttrykket og får $0 \cdot [0^2 - 25] = 0$. Vi setter inn $\lambda = 0$ i uttrykket og får $-5 \cdot [(-5)^2 - 25] = 0$. Altså er -10, -5 og 0 egenverdiene til A.

c) For hver av egenverdiene finner vi en egenvektor:

$$\underline{\lambda = -10}: \qquad \begin{bmatrix} -5-(-10) & 3 & 0 \\ 3 & -5-(-10) & 4 \\ 0 & 4 & -5-(-10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Legger -2 ganger andre rad til første rad og får

$$\begin{bmatrix} -1 & -7 & -8 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Legger 3 ganger første rad til andre og får

$$\begin{bmatrix} -1 & -7 & -8 \\ 0 & -16 & -20 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Legger 1/4 ganger andre rad til tredje og får trappeformen

$$\begin{bmatrix} -1 & -7 & -8 \\ 0 & -16 & -20 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det homogene likningssystemet har løsningene

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 3/4 \\ -5/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

for en fri parameter t. Ved å sette $t = 1/\sqrt{(3/4)^2 + (-5/4)^2 + 1^2} = 4/(5\sqrt{2})$ får vi egenvektoren $\boldsymbol{u}_1 = \frac{4}{5\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3/4 \\ -5/4 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$ som har lengde 1.

$$\underline{\lambda = -5}: \quad \begin{bmatrix} -5-(-5) & 3 & 0 \\ 3 & -5-(-5) & 4 \\ 0 & 4 & -5-(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi bytter første og andre rad og får

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Legger $-4/3$ ganger andre rad til tredje og får trappeformen

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det homogene likningssystemet har løsningene

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -4/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

for en fri parameter s. Ved å sette $s = \frac{3}{5}$ får vi egenvektoren $\boldsymbol{u}_2 = \frac{3}{5} \begin{bmatrix} -4/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ som har lengde 1.

$$\underline{\lambda = 0}: \quad \begin{bmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 4 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Legger 2 ganger andre rad til første rad og får

$$\begin{bmatrix} 1 & -7 & 8 \\ 3 & -5 & 4 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Legger -3 ganger første rad til andre og får

$$\begin{bmatrix} -1 & -7 & 8 \\ 0 & 16 & -20 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Legger $-1/4$ ganger andre rad til tredje og får trappeformen

$$\begin{bmatrix} -1 & -7 & 8 \\ 0 & 16 & -20 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det homogene likningssystemet har løsningene

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 3/4 \\ 5/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

for en fri parameter r. Ved å sette $r = 1/\sqrt{(3/4)^2 + (5/4)^2 + 1^2} = 4/(5\sqrt{2})$ får vi egenvektoren $\boldsymbol{u}_3 = \frac{4}{5\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3/4 \\ 5/4 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ som har lengde 1.

Da er $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ ortogonale egenvektorer av lengde 1 og

$$\underline{\underline{P = [\boldsymbol{u}_1 \vdots \boldsymbol{u}_2 \vdots \boldsymbol{u}_3] = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 & -4\sqrt{2} & 3 \\ -5 & 0 & 5 \\ 4 & 3\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}}}$$

er derfor en ortogonal matrise som diagonaliserer A. Dvs at $P^T AP = D$ er en diagonalmatrise med egenverdiene på hoveddiagonalen:

$$\underline{\underline{D = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}}$$

d) Vi løser likningen $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = 2A\boldsymbol{x} + B^T = 0$, dvs $A\boldsymbol{x} = -\frac{1}{2}B^T$ ved Gausseliminasjon:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 3 & 0 & -4 \\ 3 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 3 \end{array}\right]$$

Legger 2 ganger andre rad til første og får

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 8 & -4 \\ 3 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 3 \end{array}\right]$$

Legger -3 ganger første rad til andre og får

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 8 & -4 \\ 0 & 16 & -20 & 12 \\ 0 & 4 & -5 & 3 \end{array}\right]$$

Legger $-1/4$ ganger andre rad til tredje og får trappeformen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 8 & -4 \\ 0 & 16 & -20 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Likningssystemet har løsningene

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{t}{4}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}}}$$

for en fri parameter t og gir de stasjonære punktene til $f(\boldsymbol{x})$.
Dette er globale maksimumspunkter fordi A er negativ semidefinitt (egenverdiene er mindre eller lik 0) som betyr at $f(\boldsymbol{x})$ er konkav.

e) Hvis vi lar $\boldsymbol{x}^*$ betegne uttrykket for de stasjonære punktene vi fant i (d) får vi maksimumsverdien til $f(\boldsymbol{x})$ som

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}^*) &= (\boldsymbol{x}^*)^T(A\boldsymbol{x}^*) + B\boldsymbol{x}^* + 2017 = (\boldsymbol{x}^*)^T\left(\frac{-1}{2}\right)B^T + B\boldsymbol{x}^* + 2017 \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3t+5 & 5t+3 & 4t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 0 & -6 \end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3t+5 \\ 5t+3 \\ 4t \end{bmatrix} + 2017 \\ &= \frac{1}{4}(-12t - 20 + 12t + 24t + 40 - 24t) + 2017 = 5 + 2017 = 2022 \end{aligned}$$

Altså har likningen ingen løsninger for $k > 2022$ og uendelig mange løsninger for $k = 2022$. Den har også uendelig mange løsninger for $k < 2022$ fordi vi med variabelskiftet $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ får

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= f(P\boldsymbol{y}) = (P\boldsymbol{y})^T AP\boldsymbol{y} + BP\boldsymbol{y} + 2017 = \boldsymbol{y}^T(P^TAP)\boldsymbol{y} + BP\boldsymbol{y} + 2017 \\
&= \boldsymbol{y}^T D\boldsymbol{y} + BP\boldsymbol{y} + 2017 \\
&= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \vdots \boldsymbol{u}_2 \vdots \boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + 2017 \\
&= -10y_1^2 - 5y_2^2 + \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 8 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4\sqrt{2} & 3 \\ -5 & 0 & 5 \\ 4 & 3\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + 2017 \\
&= -10y_1^2 - 5y_2^2 + \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -50\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + 2017 \\
&= -10y_1^2 - 5y_2^2 - 10y_2 + 2017 = -10y_1^2 - 5(y_2+1)^2 + 2022
\end{aligned}
$$

Likningen $-10y_1^2 - 5(y_2+1)^2 + 2022 = k$ tilsvarer $10y_1^2 + 5(y_2+1)^2 = 2022 - k$ som er likningen for en ellipse i y_1y_2-planet hvis $2022 - k > 0$. Fordi y_3 er fri er løsningene på likningen punktene på en sylinder over ellipsen i $y_1y_2y_3$-rommet. Det er altså også uendelig mange løsninger for $k < 2022$. De andre tilfellene ($k \geqslant 2022$) følger også av denne likningen. Oppsummert:
$f(x) = k$ har uendelig mange løsninger for $k \leqslant 2022$ og ingen løsninger for $k > 2022$.

Oppgave 3

a) Anta a og b er to tall med $0 \leqslant a \leqslant 5$ og $0 \leqslant b \leqslant 5$. Beregner

$$
\begin{aligned}
F(a,b) = P(X \leqslant a, Y \leqslant b) &= \int_{-\infty}^{b} \int_{-\infty}^{a} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{125} \int_0^b \int_0^a 10 - x - y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{125} \int_0^b \left[10x - \frac{x^2}{2} - xy\right]_0^a \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{125} \int_0^b 10a - \frac{a^2}{2} - ay\,\mathrm{d}y = \frac{1}{125} \left[10ay - \frac{a^2}{2}y - \frac{a}{2}y^2\right]_0^b \\
&= \frac{1}{125} \left(10ab - \frac{a^2b}{2} - \frac{ab^2}{2}\right) = \frac{ab(20 - (a+b))}{250}
\end{aligned}
$$

Dette gir

i) $P(X \leqslant 2, Y \leqslant 3) = \frac{2\cdot 3(20-(2+3))}{250} = \frac{90}{250} = \underline{\underline{0{,}36}}$

ii) $P(X \geqslant 4) = 1 - F(4,5) = 1 - \frac{4\cdot 5(20-(4+5))}{250} = 1 - \frac{220}{250} = \underline{\underline{0{,}12}}$

b) Den marginale sannsynlighetstettheten er

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x\,,y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{125}\int_0^5 10 - x - y\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{125}\left[10y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_0^5 = \frac{1}{125}\left(10\cdot 5 - 5x - \frac{5^2}{2}\right) \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{50}(15-2x) \qquad \text{for } 0 \leqslant x \leqslant 5 \text{ og } 0 \text{ ellers}}} \end{aligned}$$

For å finne medianen r løser vi likningen $\int_{-\infty}^{r} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}5$ for r, dvs. $\frac{1}{50}\int_0^r 15 - 2x\,\mathrm{d}x = 0{,}5$. Vi beregner venstresiden og får $\frac{1}{50}(15r - r^2) = 0{,}5$ som gir $r^2 - 15r = -25$. I intervallet $[0,5]$ får vi løsningen $r = \underline{\underline{\frac{5}{2}(3-\sqrt{5}) \approx 1{,}91}}$.

c) Vi vil sammenligne $f(x,y)$ med $f_X(x)\cdot f_Y(y)$. Fordi sannsynlighetstettheten $f(x,y)$ er symmetrisk i x og y (kan bytte x og y uten å endre uttrykket), vil $f_Y(y) = \frac{1}{50}(15-2y)$ for $0 \leqslant y \leqslant 5$ og 0 ellers. Da blir

$$f_X(x)\cdot f_Y(y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{50}(15-2x)\right)\left(\frac{1}{50}(15-2y)\right) & \text{hvis } 0 \leqslant x \leqslant 5 \;\text{ og }\; 0 \leqslant y \leqslant 5 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Men dette er ikke samme funksjonen som $f(x,y)$, f. eks. er $f(0,5) = \frac{5}{125} = 0{,}04$ mens $f_X(0)\cdot f_Y(5) = \frac{15}{50}\cdot\frac{5}{50} = \frac{90}{250} = 0{,}36$. Altså er ikke X og Y uavhengige.

d) i)

$$\begin{aligned} f_{Y|a}(y) &= \frac{f(a,y)}{f_X(a)} = \frac{\frac{1}{125}(10-a-y)}{\frac{1}{50}(15-2a)} \\ &= \underline{\underline{\frac{2(10-a-y)}{5(15-2a)} \qquad \text{for } 0 \leqslant y \leqslant 5.}} \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\big(Y_{|X=a}\big) &= \int_0^5 y\left(\frac{2(10-a-y)}{5(15-2a)}\right)\mathrm{d}y = \frac{2}{5(15-2a)}\int_0^5 10y - ay - y^2\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{5(15-2a)}\left[5y^2 - \frac{ay^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^5 = \frac{2}{5(15-2a)}\left[125 - \frac{25a}{2} - \frac{125}{3}\right] \\ &= \frac{500-75a}{15(15-2a)} = \underline{\underline{\frac{5(20-3a)}{3(15-2a)}}} \end{aligned}$$

Oppgave 4

a) Vi deler med t for å få en lineær første ordens differensillikning på standardform: $y' + \frac{4}{t}y = 5$. Vi multipliserer med den integrerende faktoren $e^{4\ln(t)} = t^4$ som gir

$$t^4y' + 4t^3y = 5t^4 \qquad \text{dvs} \qquad (t^4y)' = 5t^4$$

som etter integrasjon gir likningen $t^4 y = t^5 + C$. Etter divisjon med t^4 får vi løsningen $\underline{\underline{y(t) = t + \frac{C}{t^4}}}$.

b) Dette er en separabel differensiallikning med $y' = \frac{2te^{t^2}}{e^y}$. Vi multipliserer med e^y på begge sider og får $e^y y' = 2te^{t^2}$. Vi integrerer på begge side m.h.p. t:

$$\int e^y y' \, dt = \int 2te^{t^2} \, dt$$

På venstresiden bruker vi substitusjonen $y = y(t)$ som gir $y' \, dt = dy$. På høyresiden bruker vi substitusjonen $u = t^2$ som gir $2t \, dt = du$. Dette gir likningen

$$\int e^y \, dy = \int e^u \, du \qquad \text{dvs} \qquad e^y = e^u + C = e^{t^2} + C$$

Vi setter begge sider inn i $\ln(x)$ og får $\underline{\underline{y(t) = \ln(e^{t^2} + C)}}$.

Oppgave 5

a) Dette er en homogen andre ordens lineær differensiallikning med konstante koeffisienter på standardform. Den karakteristiske likningen $r^2 - r + \frac{1}{4} = 0$ har én løsning $r = \frac{1}{2}$ (en dobbeltrot). Den generelle løsningen er derfor

$$y(t) = (C_0 + C_1 t)e^{\frac{t}{2}}$$

Initialbetingelsene gir likninger som bestemmer konstantene C_1 og C_2:

$$y(0) = C_0 = 0$$
$$y(2) = (C_0 + 2C_1)e = 6e$$

som gir $C_0 = 0$ og $C_1 = 3$. Det gir funksjonen $y(t) = \underline{\underline{3te^{\frac{t}{2}}}}$

b) For normalløsningen er Hamilton-funksjonen (som står i formelsamlingen) $H = 10 - (y-u)^2 e^{-t} + p(y - \frac{u}{2})$ for en funksjon $p = p(t)$. Vi avgjør først om H er konkav i (y, u). Vi har

$$\begin{cases} H'_y = -2(y-u)e^{-t} + p \\ H'_u = 2(y-u)e^{-t} - \frac{p}{2} \end{cases}$$

som gir

$$\begin{cases} H''_{yy} = -2e^{-t} = A \\ H''_{yu} = 2e^{-t} = B \\ H''_{uu} = -2e^{-t} = C \end{cases}$$

Dermed er $AC - B^2 = (-2e^{-t})^2 - (2e^{-t})^2 = 0 \geqslant 0$, og $A = -2e^{-t} \leqslant 0$ (uten å være identisk lik 0) så H er konkav i (y, u) og en løsning på Pontryagin-betingelsene vil derfor gi et maksimum.

Pontryagin-betingelsene (som står i formelsamlingen) gir

$$\begin{cases} 2(y-u)e^{-t} - \frac{p}{2} = 0 & (4) \\ p' = 2(y-u)e^{-t} - p & (5) \end{cases}$$

Likning (4) gir $p = 4(y-u)e^{-t}$ og deriverer vi begge sider m.h.p. t (med produktregelen) får vi $p' = 4(y'-u')e^{-t} - 4(y-u)e^{-t}$, dvs $p' = 4(y'-u')e^{-t} - p$. Substituerer vi p' i (5) med dette uttrykket får vi likningen $4(y'-u')e^{-t} - p = 2(y-u)e^{-t} - p$ som forenkler til

$$2(y'-u') - (y-u) = 0 \qquad (6)$$

Fra (1) får vi $u = 2(y-y')$, deriverer begge sider m.h.p. t og får $u' = 2(y'-y'')$, og substituerer inn i (6): $2(y'-2y'+2y'') - (y-2y+2y') = 0$ som forenkler til

$$y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0 \qquad (7)$$

Dette er differensiallikningen i (a) med de samme initialbetingelsene (2) og (3) og løsningen er derfor $\underline{\underline{y(t) = 3te^{\frac{t}{2}}}}$.

Et alternativ: Fra (5) og så (4) får vi $p' + p = 2(y-u)e^{-t} = \frac{p}{2}$. Dvs den homogene lineære diff.likningen $p' + \frac{1}{2}p = 0$ som gir $p(t) = Ke^{-\frac{t}{2}}$. Innsatt i (4) får vi $y - u = \frac{p}{4}e^t = \frac{K}{4}e^{\frac{t}{2}}$. Substituerer $u = 2(y-y')$ fra (1) og får $2y' - y = \frac{K}{4}e^{\frac{t}{2}}$ som på standardform blir $y' - \frac{1}{2}y = \frac{K}{8}e^{\frac{t}{2}}$. Multipliserer med integrerende faktor $e^{-\frac{t}{2}}$ og får $(e^{-\frac{t}{2}}y)' = \frac{K}{8} = C_1$. Det gir $e^{-\frac{t}{2}}y = C_1t + C_0$ og $y(t) = (C_0 + C_1t)e^{\frac{t}{2}}$. Så bruker vi (2) og (3) til å bestemme $C_0 = 0$ og $C_1 = 3$ som i (a).

For å finne $u(t)$ bruker vi (1): Først har vi $y'(t) = \left(3 + \frac{3t}{2}\right)e^{\frac{t}{2}}$ som så gir $u(t) = 2(y-y') = \underline{\underline{3(t-2)e^{\frac{t}{2}}}}$.

c) Fra (1) har vi $u = 2(y-y')$ som gir

$$F(y,y',t) = 10 - (y - 2(y-y'))^2e^{-t} = 10 - (2y'-y)^2e^{-t}$$

Variasjonsregningsproblemet blir

$$\text{maks} \int_0^2 10 - (2y'-y)^2e^{-t}\,dt \quad , \qquad \begin{cases} y(0) = 0 & (1) \\ y(2) = 6e & (2) \end{cases}$$

Vi viser først at F er konkav i (y, y'). Vi har

$$\begin{cases} F'_y = 2(2y'-y)e^{-t} \\ F'_{y'} = -4(2y'-y)e^{-t} \end{cases}$$

som gir

$$\begin{cases} F''_{yy} = -2e^{-t} = A \\ F''_{yy'} = 4e^{-t} = B \\ F''_{y'y'} = -8e^{-t} = C \end{cases}$$

Dermed er $AC - B^2 = (-2e^{-t})(-8e^{-t}) - (4e^{-t})^2 = 0 \geqslant 0$, $A = -2e^{-t} \leqslant 0$ (og ikke identisk lik 0) så H er konkav i (y, y') og en løsning på Euler-likningen vil derfor gi et maksimum.

Vi får (med produktregelen)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(F'_{y'})}{\mathrm{d}t} = (F'_{y'})'_t &= -4(2y'' - y')e^{-t} + 4(2y' - y)e^{-t} \\ &= -(8y'' - 12y' + 4y)e^{-t}\end{aligned}$$

Euler-likningen (som står i formelsamlingen) blir derfor

$$[4y' - 2y + 8y'' - 12y' + 4y]e^{-t} = 0 \quad \text{dvs} \quad 8y'' - 8y' + 2y = 0$$

$$\text{som på standardform blir} \quad y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$$

Dette er differensiallikningen i (a) med de samme initialbetingelsene så $\underline{\underline{y(t) = 3te^{\frac{t}{2}}}}$.