Eksamen i ELE3719 Matematikk valgfag

fredag 13. mai 2022, kl. 9-14

Oppgavesettet har 16 underpunkter som alle vektes likt.
Vedlagte formelsamling er på 1 side.

Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1

Vi har vektorer

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{u}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

a) Avgjør om vektorene $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ er lineært uavhengige. Avgjør om vektorene $\{\boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4, \boldsymbol{u}_5\}$ er lineært uavhengige. Løs vektorlikningen

$$x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + x_3\boldsymbol{u}_3 + x_4\boldsymbol{u}_4 + x_5\boldsymbol{u}_5 = \boldsymbol{0}$$

b) Finn en basis for $\text{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$. Bestem dimensjonen til $\text{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4, \boldsymbol{u}_5\}$. Avgjør om $\text{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_5\} = \text{Span}\{\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_4, \boldsymbol{u}_5\}$.

Oppgave 2

Vi har andregradsfunksjonen

$$f(x_1, x_2, x_3) = -5x_1^2 - 5x_2^2 - 5x_3^2 + 6x_1x_2 + 8x_2x_3 + 8x_1 - 6x_3 + 2017$$

a) Finn en symmetrisk (3×3)-matrise A og en (1×3)-matrise B slik at

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{x} + 2017$$

b) Finn den karakteristiske likningen til A. Vis at A har egenverdiene -10, -5 og 0.

c) Finn en ortogonal (3×3)-matrise P slik at $P^T AP = D$ er en diagonalmatrise og bestem D.

d) Bestem de stasjonære punktene til $f(\boldsymbol{x})$ og avgjør om de er maksimum- eller minimumspunkter eller ingen av delene.

e) La k være en parameter (et fast, ubestemt tall). Bestem antall løsninger til likningen $f(\boldsymbol{x}) = k$.

Oppgave 3

Vi har to simultant fordelte kontinuerlige stokastiske variabler X og Y som har simultan tetthetsfunksjon

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{125}(10-x-y) & \text{hvis } 0 \leqslant x \leqslant 5 \text{ og } 0 \leqslant y \leqslant 5 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

a) Beregn sannsynlighetene
   i) $P(X \leqslant 2\,, Y \leqslant 3)$ ii) $P(X \geqslant 4)$

b) Bestem den marginale sannsynlighetstettheten $f_X(x)$. Beregn medianen til X.

c) Avgjør om X og Y er uavhengige stokastiske variabler.

d) i) Bestem sannsynlighetstettheten $f_{Y|a}(y)$ til den betingete stokastiske variabelen $Y|a = Y_{|X=a}$ for et ubestemt tall a med $0 \leqslant a \leqslant 5$.
   ii) Beregn forventningen $\mathrm{E}\big(Y_{|X=a}\big)$.

Oppgave 4

Vi lar y betegne en funksjon av t, dvs $y = y(t)$.

a) Løs differensiallikningen $ty' + 4y = 5t$ med $t > 0$.

b) Løs differensiallikningen $y' = 2te^{t^2-y}$.

Oppgave 5

Vi lar y og u betegne funksjoner av t, dvs $y = y(t)$ og $u = u(t)$.

a) Løs differensiallikningen $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$ med initialbetingelsene $y(0) = 0$ og $y(2) = 6e$.

b) Vi har kontrollproblemet

$$\text{maks} \int_0^2 10 - (y-u)^2 e^{-t}\, \mathrm{d}t \quad , \qquad \begin{cases} y' = y - \dfrac{u}{2} & (1) \\ y(0) = 0 & (2) \\ y(2) = 6e & (3) \end{cases}$$

Bruk Pontryagins maksimumsprinsipp til å finne en normal løsning på kontrollproblemet (bestem både y og u).

c) Gjør kontrollproblemet om til et variasjonsproblem og bruk Euler-likningen til å løse dette.