

Oppgave 1.

- (a) Vi bruker Gauss-eliminasjon til å løse det lineære systemet:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser at dette er en trappeform og at z er en fri variabel. Baklengs substitusjon gir $-3y - 3z = 0$, eller $y = -z$. Innsatt i første likning gir dette $x + 2y + 3z = x + 2(-z) + 3z = 0$, eller $x = -z$. Løsningene er dermed gitt ved $\mathbf{x} = (-z, -z, z) = z(-1, -1, 1)$ der z er fri. Mengden som består av vektoren $\mathbf{u} = (-1, -1, 1)$ er derfor en basis for V .

- (b) For $\lambda = 0$ kan vi skrive likningen $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ som $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, og vi vet fra deloppgaven over at den har ikke-trivielle løsninger. Derfor er $\lambda = 0$ en egenverdi for A (og $\mathbf{u}$ som vi fant ovenfor danner en basis for egenrommet E_0). For $\mathbf{v}$ ser vi på likningen $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, og regner ut

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 18 \end{pmatrix} = 9\mathbf{v}$$

Dermed er $\mathbf{v}$ en egenvektor for A med egenverdi $\lambda = 9$.

- (c) Fra de to første deloppgavene vet vi at $\mathbf{u}$ er en egenvektor for A med $\lambda = 0$, og at $\mathbf{v}$ er en egenvektor for A med $\lambda = 9$. Siden summen av egenverdiene til A er $\text{tr } A = 2 + 2 + 6 = 10$, er den tredje egenverdien λ for A gitt ved $0 + 9 + \lambda = 10$, eller $\lambda = 1$. Alternativt kan vi løse den karakteristiske likningen $\det(A - \lambda I) = 0$ for å finne egenverdiene. Siden A har egenverdier $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = 1 \geq 0$ er den kvadratiske formen q (og matrisen A) positiv semidefinit.
- (d) En $n \times n$ matrise P er ortogonal dersom den er invertibel med invers $P^{-1} = P^T$, eller ekvivalent dersom kolonnevektorene i P danner en ortonormal basis for n -rommet $\mathbb{R}^n$. Vi finner først en basis for egenrommet E_1 til den tredje egenverdien til A :

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette gir y fri, $-4z = 0$, eller $z = 0$, og $x + y + z = x + y + 0 = 0$, eller $x = -y$. Egenvektorene for $\lambda = 1$ er derfor $(x, y, z) = (-y, y, 0) = y(-1, 1, 0)$ med y fri, og vektoren $\mathbf{w} = (-1, 1, 0)$ er en basis for E_1 . Siden A er symmetrisk og vektorene $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ er egenvektorer med ulike egenverdier, danner de en ortogonal basis for $\mathbb{R}^3$. Basisvektorene har lengder

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{3}, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{6}, \quad \|\mathbf{w}\| = \sqrt{2}$$

Dermed finner vi en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$ av egenvektorer for A gitt ved

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1), \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$$

og matrisen P med disse tre vektorene som kolonnevektorer er en ortogonal matrise slik at $P^T A P = D$ er diagonal. Dette gir

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 2.

- (a) Funksjonen f kan skrives på matriseform som $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + B \mathbf{x} + C$, hvor A, B, C er matrisene

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -8 & -4 & -12 \end{pmatrix}, \quad C = (3)$$

Vi merker oss at A er matrisen fra Oppgave 1. De stasjonære punktene til f er dermed gitt ved

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 2A\mathbf{x} + B^T = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad A\mathbf{x} = -\frac{1}{2}B^T \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Vi ser at $\mathbf{x} = (2, 0, 0)$ er en løsning, og siden $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har løsning $\text{span}(\mathbf{u})$ fra Oppgave 1a, får vi at de stasjonære punktene er gitt ved

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p = t(-1, -1, 1) + (2, 0, 0) = (2 - t, -t, t)$$

der t er en parameter. Alternativt kan vi løse det lineære systemet ved Gauss-eliminasjon, og får da $(x, y, z) = (2 - z, -z, z)$ der z er fri.

- (b) Fra Oppgave 1d er matrisen A positiv semidefinit, derfor er de stasjonære punktene til f minimumspunkter med verdi $f(2, 0, 0) = -5$. Merk at alle de stasjonære punktene må ha samme verdi -5 siden alle er globale minimum for f . Siden f er en kvadratisk funksjon, har den ikke maksimumspunkter. For eksempel vil $f(x, 0, 0) = 2x^2 - 8x + 3 \rightarrow \infty$ når $x \rightarrow \pm\infty$. Verdimengden til f er derfor $V_f = [-5, \infty)$.

Oppgave 3.

- (a) Når $0 \leq a \leq 2$ og $0 \leq b \leq 1$, har vi at $F(a, b) = p(X \leq a, Y \leq b)$ er gitt ved dobbeltintegralet

$$\begin{aligned} F(a, b) &= \int_0^a \int_0^b \frac{1}{5}(x^2 + xy + 2y^2) dy dx = \frac{1}{5} \int_0^a \left[x^2 y + \frac{1}{2} xy^2 + \frac{2}{3} y^3 \right]_0^b dx \\ &= \frac{1}{5} \int_0^a x^2 b + \frac{1}{2} x b^2 + \frac{2}{3} b^3 dx = \frac{1}{5} \left[\frac{1}{3} x^3 b + \frac{1}{4} x^2 b^2 + \frac{2}{3} x b^3 \right]_0^a \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} a^3 b + \frac{1}{4} a^2 b^2 + \frac{2}{3} a b^3 \right) = \frac{1}{15} a^3 b + \frac{1}{20} a^2 b^2 + \frac{2}{15} a b^3 \end{aligned}$$

Dette betyr at når $0 \leq x \leq 2$ og $0 \leq y \leq 1$, så er

$$F(x, y) = \frac{1}{15} x^3 y + \frac{1}{20} x^2 y^2 + \frac{2}{15} x y^3$$

- (b) Vi har at $\int_0^a f_X(x) dx = p(X \leq a) = P(X \leq a, Y \leq 1) = F(a, 1)$. Dermed følger det fra integralregningens fundamentalsats at

$$f_X(x) = F(x, 1)'_x = \left(\frac{1}{15} x^3 + \frac{1}{20} x^2 + \frac{2}{15} x \right)'_x = \frac{1}{5} x^2 + \frac{1}{10} x + \frac{2}{15}$$

Alternativt kan vi finne $f_X(x)$ når $0 \leq x \leq 2$ ved integralet

$$f_X(x) = \int_0^1 \frac{1}{5}(x^2 + xy + 2y^2) dy = \frac{1}{5} \left[x^2 y + \frac{1}{2} xy^2 + \frac{2}{3} y^3 \right]_0^1 = \frac{1}{5} x^2 + \frac{1}{10} x + \frac{2}{15}$$

Dette gir at

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} x^2 + \frac{1}{10} x + \frac{2}{15} & \text{når } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Vi bruker denne marginale sannsynlighetstettheten til å finne $E(X)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^2 x \cdot \left(\frac{1}{5} x^2 + \frac{1}{10} x + \frac{2}{15} \right) dx = \int_0^2 \frac{1}{5} x^3 + \frac{1}{10} x^2 + \frac{2}{15} x dx \\ &= \left[\frac{1}{20} x^4 + \frac{1}{30} x^3 + \frac{1}{15} x^2 \right]_0^2 = \frac{16}{20} + \frac{8}{30} + \frac{4}{15} = \frac{12 + 4 + 4}{15} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

- (c) Vi har at X og Y er uavhengige hvis og bare hvis $f_X(x) \cdot f_Y(y) = f(x,y)$ for alle verdier av x og y . Vi har regnet ut $f_X(x)$ ovenfor, og finner på tilsvarende måte

$$f_Y(y) = F(2,y)'_y = \left(\frac{8}{15}y + \frac{4}{20}y^2 + \frac{4}{15}y^3 \right)'_y = \frac{8}{15} + \frac{8}{20}y + \frac{12}{15}y^2 = \frac{4}{5}y^2 + \frac{2}{5}y + \frac{8}{15}$$

når $0 \leq y \leq 1$. Alternativt kunne vi funnet $f_Y(y)$ ved integrasjon. Dermed har vi

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \left(\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{10}x + \frac{2}{15} \right) \cdot \left(\frac{4}{5}y^2 + \frac{2}{5}y + \frac{8}{15} \right) \neq \frac{1}{5}(x^2 + xy + 2y^2) = f(x,y)$$

når $0 \leq x \leq 2$ og $0 \leq y \leq 1$. Dette betyr at X og Y ikke er uavhengige.

- (d) Vi har $p(X \leq 1, Y \geq \frac{1}{2}) = F(1,1) - F(1, \frac{1}{2})$ og $p(X \leq \frac{1}{2}, Y \geq \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}, 1) - F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Dette gir

$$\begin{aligned} p\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 1, Y \geq \frac{1}{2}\right) &= (F(1,1) - F(1, \frac{1}{2})) - (F(\frac{1}{2}, 1) - F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) \\ &= F(1,1) - F(1, \frac{1}{2}) - F(\frac{1}{2}, 1) + F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

Vi bruker $F(x,y) = x^3y/15 + x^2y^2/20 + 2xy^3/15 = (4x^3y + 3x^2y^2 + 8xy^3)/60$ til å regne ut de enkelte sannsynlighetene:

$$\begin{aligned} F(1,1) &= \frac{4+3+8}{60} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4} & F(1, \frac{1}{2}) &= \frac{2+3/4+1}{60} = \frac{15}{60 \cdot 4} = \frac{1}{16} \\ F(\frac{1}{2}, 1) &= \frac{4/8+3/4+4}{60} = \frac{21}{60 \cdot 4} = \frac{7}{80} & F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) &= \frac{4/16+3/16+8/16}{60} = \frac{15}{60 \cdot 16} = \frac{1}{64} \end{aligned}$$

Dette gir at

$$p\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 1, Y \geq \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{7}{80} + \frac{1}{64} = \frac{80 - 20 - 28 + 5}{320} = \frac{37}{320} \approx 0.1156$$

Oppgave 4.

- (a) Likningen $y'' - y' - 6y = 3$ er en lineær annenordens differensiallikning, og den har løsning $y = y_h + y_p$. Den karakteristiske likningen $r^2 - r - 6 = 0$ har løsning $r = 3, -2$, og dermed er $y_h = C_1e^{3t} + C_2e^{-2t}$. Vi prøver å finne en partikulær løsning $y_p = A$, og innsetting gir $-6A = 3$, eller $A = -1/2$. Dermed er den generelle løsningen

$$y = y_h + y_p = C_1e^{3t} + C_2e^{-2t} - \frac{1}{2}$$

- (b) Likningen $t^2y' - y = 5$ kan skrives som $y' - (1/t^2)y = 5/t^2$, og er derfor en førsteordens lineær differensiallikning. Vi har at $\int -1/t^2 dt = 1/t + C$ siden $-1/t^2 = -t^{-2}$. Dermed er integrerende faktor gitt ved $e^{1/t}$. Vi får

$$(e^{1/t} \cdot y)' = e^{1/t} \cdot 5/t^2 \Rightarrow e^{1/t} \cdot y = \int e^{1/t} \cdot 5/t^2 dt = \int e^u \cdot (-5) du = -5e^{1/t} + C$$

Vi har brukt substitusjonen $u = 1/t$ med $du = -1/t^2 dt$ for å løse dette integralet. Den generelle løsningen blir derfor

$$y = -5 + C e^{-1/t}$$

Alternativt kunne vi løst $t^2y' - y = 5$ som separabel differensiallikning.

- (c) Likningen $y' - ty = 2yt \ln t$ kan skrives $y' = ty + 2yt \ln t = yt(1 + 2 \ln t)$. Den er derfor separabel og vi har at

$$\frac{1}{y} y' = t(1 + 2 \ln t) \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int t(1 + 2 \ln t) dt$$

Vi bruker delvis integrasjon for å løse integralet på høyre side, med $u' = t$ og $v = 1 + 2 \ln t$, som gir $u = t^2/2$ og $v' = 2/t$. Dette gir

$$\begin{aligned} \int t(1 + 2 \ln t) dt &= \frac{1}{2}t^2(1 + 2 \ln t) - \int \frac{1}{2}t^2 \cdot \frac{2}{t} dt = \frac{1}{2}t^2(1 + 2 \ln t) - \int t dt \\ &= \frac{1}{2}t^2(1 + 2 \ln t) - \frac{1}{2}t^2 + C = t^2 \ln t + C \end{aligned}$$

Vi får likningen

$$\ln |y| = t^2 \ln t + C \Rightarrow |y| = e^{t^2 \ln t} \cdot e^C$$

Med $K = \pm e^C$ får vi den generelle løsningen

$$y = K e^{t^2 \ln t}$$

Oppgave 5.

- (a) Vi skriver $F = \ln(2y - y' + 2) = \ln(u)$ med $u = 2y - y' + 2$ for å forkorte regningene nedenfor. De partielle deriverte er

$$F'_y = \frac{2}{u}, \quad F'_{y'} = \frac{-1}{u} \Rightarrow (F'_{y'})'_t = u^{-2} \cdot u'_t = \frac{2y' - y''}{u^2}$$

Dermed er Euler-likningen for dette problemet gitt ved

$$\frac{2}{u} - \left(\frac{2y' - y''}{u^2} \right) = \frac{2(2y - y' + 2) - (2y' - y'')}{u^2} = \frac{y'' - 4y' + 4y + 4}{u^2} = 0$$

Multiplikasjon med u^2 gir dermed at vi kan skrive Euler-likningen som $y'' - 4y' + 4y = -4$. Dette er en inhomogen annenordens lineær differensiallikning, med karakteristisk likning

$$r^2 - 4r + 4 = (r - 2)^2 = 0$$

Vi ser at vi har en dobbel rot $r = 2$. Den homogene løsningen av Euler-likningen er dermed

$$y_h = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} = (C_1 + C_2 t) e^{2t}$$

For å finne en partikulær løsning y_p , setter vi $y = A$, som gir $y' = y'' = 0$. Innsetting gir da $4A = -4$, eller $A = -1$, og dermed $y_p = -1$. Generell løsningen av Euler-likningen blir da

$$y = (C_1 + C_2 t) e^{2t} - 1$$

Setter vi inn betingelsene $y(0) = 3$ og $y(2) = 2e^4 - 1$, gir den første at $(C_1 + C_2 \cdot 0)e^0 - 1 = 3$, eller at $C_1 = 4$, og den andre at $(4 + 2C_2)e^4 - 1 = 2e^4 - 1$, eller at $4 + 2C_2 = 2$. Dette gir $C_2 = -1$ og dermed

$$y^*(t) = (4 - t)e^{2t} - 1$$

- (b) Vi sjekker om F er konkav i (y, y') ; i så fall vet vi at y^* er en løsning av max-problemet. Vi regner derfor ut de andrederiverte

$$F''_{yy} = \frac{-4}{u^2}, \quad F''_{y,y'} = \frac{2}{u^2}, \quad F''_{y',y'} = \frac{-1}{u^2}$$

og Hesse-matrisen

$$H(F) = \begin{pmatrix} F''_{yy} & F''_{y,y'} \\ F''_{y,y'} & F''_{y',y'} \end{pmatrix} = \frac{1}{u^2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Vi har satt faktoren som er felles utenfor. Vi ser at determinanten blir

$$\frac{1}{u^4} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

og at de to uttrykkene på diagonalen er negative. Derfor er F konkav i (y, y') og $y^*(t)$ løser variasjonsproblemet (gir maksimum).

- (c) Vi har at $y = (4 - t)e^{2t} - 1$ gir $y' = -1 \cdot e^{2t} + (4 - t)e^{2t} \cdot 2 = (-1 + 2(4 - t))e^{2t} = (7 - 2t)e^{2t}$. Dermed har vi at

$$2y - y' + 2 = 2(4 - t)e^{2t} - (7 - 2t)e^{2t} = e^{2t}$$

når $y = y^*(t)$. Den maksimale verdien av funksjonen blir dermed

$$J(y^*) = \int_0^2 \ln(e^{2t}) dt = \int_0^2 2t dt = [t^2]_0^2 = 4$$