

Eksamensoppgaven består av 16 deloppgaver som vektes likt. Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1.

Vi ser på matrisen A og vektoren $\mathbf{v}$ gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- La V være mengden av løsninger av det lineære systemet $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Finn en basis for V .
- Vis at $\lambda = 0$ er en egenverdi for A . Vis at $\mathbf{v}$ er en egenvektor for A , og bestem dens egenverdi.
- Finn alle egenverdier av A , og bestem definittheten til den kvadratiske formen $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$.
- Hva vil det si at en matrise er ortogonal? Finn en ortogonal matrise P slik at $P^T A P$ er diagonal.

Oppgave 2.

Vi ser på funksjonen $f(x, y, z) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 6xz + 6yz + 6z^2 - 8x - 4y - 12z + 3$.

- Skriv f på matriseform, og finn de stasjonære punktene for f .
- Bestem verdimengden til f .

Oppgave 3.

La X og Y være simultant fordelte kontinuerlige stokastiske variable med sannsynlighetstetthet

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{5}(x^2 + xy + 2y^2) & \text{hvis } 0 \leq x \leq 2 \text{ og } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

- Regn ut $F(x, y) = p(X \leq x, Y \leq y)$ når $0 \leq x \leq 2$ og $0 \leq y \leq 1$.
- Bestem den marginale sannsynlighetstettheten $f_X(x)$, og regn ut $E(X)$.
- Er X og Y uavhengige stokastiske variabler?
- Uttrykk $p\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 1, Y \geq \frac{1}{2}\right)$ ved hjelp av $F(x, y)$, og bruk dette til å bestemme sannsynligheten.

Oppgave 4.

Finn løsningen $y = y(t)$ av følgende differensiallikninger:

- a) $y'' - y' - 6y = 3$ b) $t^2 y' - y = 5$ c) $y' - ty = 2yt \ln t$

Oppgave 5.

Vi betrakter variasjonsproblemet

$$\max \int_0^2 \ln(2y - y' + 2) dt \quad \text{når} \quad \begin{cases} y(0) = 3 \\ y(2) = 2e^4 - 1 \end{cases}$$

- Finn Euler-likningen for dette problemet, og bestem den entydige løsningen $y^* = y^*(t)$ av Euler-likningen som også oppfyller betingelsene $y(0) = 3$ og $y(2) = 2e^4 - 1$.
- Vis at $y^*(t)$ løser variasjonsproblemet.
- Regn ut den maksimale verdien $J(y^*)$ av funksjonen $J(y) = \int_0^2 \ln(2y - y' + 2) dt$ i variasjonsproblemet.