

Oppgave 1.

- (a) Vi bruker Gauss-eliminasjon til å løse vektorlikningen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 12 & 8 \\ 4 & 3 & 14 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 10 & 10 \\ 0 & -5 & 10 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi ser at dette er en trappeform og at x_3 er en fri variabel. Baklengs substitusjon gir $x_4 = 0$, $x_3 = t$ (siden x_3 er fri), $-5x_2 + 10t = 0$, eller $x_2 = 2t$, og $x_1 + 2(2t) + t = 0$, eller $x_1 = -5t$. Løsningene er dermed gitt ved $\mathbf{x} = (-5t, 2t, t, 0) = t(-5, 2, 1, 0)$. Dette gir den lineære relasjonen $-5\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, eller $\mathbf{v}_3 = 5\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2$. Dermed er $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ikke lineært uavhengige.

- (b) Vektorene $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$ utspenner W og er lineært uavhengige siden trappeformen ovenfor har pivotposisjoner i kolonne 1, 2 og 4. Dermed er $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$ en basis for W . Siden $\mathbf{v}_3$ er en lineærkombinasjon $\mathbf{v}_3 = 5\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2$ av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ så er $V = \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, og dette betyr at alle vektorene i W som ikke er med i V er alle vektorene på formen $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_4\mathbf{v}_4$ med $x_4 \neq 0$.

Oppgave 2.

- (a) Vi finner den karakteristiske likningen til A ved å regne ut $|A - \lambda I|$, og bruker kofaktorutvikling langs første rad:

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 & 4 \\ 1 & 4 - \lambda & 4 \\ 4 & 4 & 9 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)((4 - \lambda)(9 - \lambda) - 16) - 1(9 - \lambda - 16) + 4(4 - 4(4 - \lambda))$$

$$= (4 - \lambda)(\lambda^2 - 13\lambda + 20) + \lambda + 7 + 16\lambda - 48$$

$$= -\lambda^3 + 17\lambda^2 - 55\lambda + 39$$

Dette gir 0 når vi setter inn $\lambda = 1$ og $\lambda = 3$, mens det gir -11 når vi setter inn $\lambda = 2$. Dermed er $\lambda = 1$ og $\lambda = 3$ egenverdier for A , mens $\lambda = 2$ ikke er en egenverdi. Vi merker oss at egenverdiene oppfyller $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{tr}(A) = 4 + 4 + 9 = 17$, slik at den tredje egenverdien til A er $\lambda_3 = 17 - 1 - 3 = 13$. Egenverdiene til A er altså $\lambda = 1, 3, 13$. Alternativt kan man finne trappeformen til $A - \lambda I$ for de tre verdiene av λ , og se at $\lambda = 1, 3$ gir ikke-trivielle løsninger mens $\lambda = 2$ kun gir den trivielle løsningen.

- (b) Siden A er symmetrisk med tre ulike egenverdier, vet vi at A har en ortogonal diagonalisering $P^T A P = D$, og hver kolonne i P er en basisvektor av lengde 1 i hver av de tre egenrommene E_λ av egenvektorer. Vi finner først en basis for egenrommet E_1 for $\lambda = 1$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -8 & -8 \\ 0 & -8 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette gir z fri, $-8y - 8z = 0$, eller $y = -z$, og $x + 3(-z) + 4z = 0$, eller $x = -z$. Egenvektorene for $\lambda = 1$ er derfor $(x, y, z) = (-z, -z, z) = z(-1, -1, 1)$ med z fri, og vektoren $\mathbf{u}_1 = (-1, -1, 1)$ er en basis for E_1 . Tilsvarende regning for E_3 gir

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette gir y fri, $-10z = 0$, eller $z = 0$, og $x + y + 4(0) = 0$, eller $x = -y$. Egenvektorene for $\lambda = 3$ er derfor $(x, y, z) = (-y, y, 0) = y(-1, 1, 0)$ med y fri, og vektoren $\mathbf{u}_2 = (-1, 1, 0)$ er en basis for E_3 . Til slutt gir tilsvarende regning for E_{13}

$$A - 13I = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 4 \\ 1 & -9 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -9 & 4 \\ -9 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -9 & 4 \\ 0 & -80 & 40 \\ 0 & 40 & -20 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -9 & 4 \\ 0 & -80 & 40 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette gir z fri, $-80y + 40z = 0$, eller $y = z/2$, og $x - 9(z/2) + 4z = 0$, eller $x = z/2$. Egenvektorene for $\lambda = 13$ er derfor $(x, y, z) = (z/2, z/2, z) = z/2(1, 1, 2)$ med z fri, og vektoren $\mathbf{u}_3 = (1, 1, 2)$ er en basis for E_{13} . Vi regner ut lengden til de tre basisvektorene:

$$\|\mathbf{u}_1\| = \sqrt{3}, \quad \|\mathbf{u}_2\| = \sqrt{2}, \quad \|\mathbf{u}_3\| = \sqrt{6}$$

Dette gir en ortonormal basis av egenvektorer

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0), \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)$$

og matrisen P med disse tre vektorene som kolonnevektorer er en ortogonal matrise slik at $P^T A P = D$ er diagonal. Dette gir

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

- (c) Siden A er en symmetrisk matrise med determinant $\det(A) = 39 \neq 0$ (ved å sette inn $\lambda = 0$ i karakteristisk likning ovenfor), har A en invers matrise gitt ved

$$A = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

Den siste likheten følger siden $C_{ij} = C_{ji}$ når A er symmetrisk. Vi finner kofaktorene og regner ut den inverse matrisen:

$$A^{-1} = \frac{1}{39} \begin{pmatrix} 20 & 7 & -12 \\ 7 & 20 & -12 \\ -12 & -12 & 15 \end{pmatrix}$$

Vi har fra tidligere at egenverdiene til A er 1, 3, 13, og vi vet at hvis λ er en egenverdi for A så er $1/\lambda$ en egenverdi for A^{-1} :

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v} = A^{-1}\lambda\mathbf{v} = \lambda \cdot A^{-1}\mathbf{v} \Rightarrow \frac{1}{\lambda}\mathbf{v} = A^{-1}\mathbf{v}$$

Dette betyr at egenverdiene til A^{-1} er 1, 1/3, 1/13 > 0 , og dermed er A^{-1} **positiv definit**.

- (d) Funksjonen f kan skrives på matriseform som $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + B \mathbf{x} + C$, hvor A er matrisen fra tidligere i oppgaven, $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \end{pmatrix}$ og $C = 22$. De stasjonære punktene til f er dermed gitt ved

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 2A\mathbf{x} + B^T = \mathbf{0} \Rightarrow A\mathbf{x} = -\frac{1}{2}B^T \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Vi kan løse likningen ved Gauss-eliminasjon eller ved å bruke A^{-1} fra oppgaven ovenfor. Det siste alternativet gir $\mathbf{x} = A^{-1} \cdot (-B^T/2)$ og dermed

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{39} \begin{pmatrix} 20 & 7 & -12 \\ 7 & 20 & -12 \\ -12 & -12 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{39} \begin{pmatrix} 39 \\ 0 \\ -39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Altså er $\mathbf{x} = (1, 0, -1)$ det eneste stasjonære punktet til f . Det er et **minimumspunkt** siden A er positiv definit, med minimumsverdi $f(1, 0, -1) = 17$.

Oppgave 3.

- (a) Betingelsene er at $f(x, y) \geq 0$ for alle x, y , og at den totale sannsynligheten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx = 1$$

Vi har at $f(x, y) \geq 0$ for alle x, y siden $x^2 + xy + y^2$ er en positiv definit kvadratisk form med $x^2 + xy + y^2 \geq 0$ for alle x, y : Den kvadratiske form har symmetrisk matrise

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

med karakteristisk likning $\lambda^2 - 2\lambda + 3/4 = 0$, dermed er egenverdiene $\lambda_1 = 1/2$ og $\lambda_2 = 3/2$ positive. Dessuten har vi at

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \int_{-3}^3 x^2 + xy + y^2 \, dy \, dx &= \int_{-1}^1 \left[x^2 y + \frac{1}{2} xy^2 + \frac{1}{3} y^3 \right]_{-3}^3 \, dx \\ &= \int_{-1}^1 6x^2 + 18 \, dx = [2x^3 + 18x]_{-1}^1 = 4 + 36 = 40\end{aligned}$$

Dette betyr at den totale sannsynligheten er $40 \cdot 1/40 = 1$.

- (b) Vi finner den marginale tettheten $f_X(x)$ til X når $-1 \leq x \leq 1$ ved integralet

$$f_X(x) = \int_{-3}^3 \frac{1}{40} (x^2 + xy + y^2) \, dy = \frac{1}{40} \left[x^2 y + \frac{1}{2} xy^2 + \frac{1}{3} y^3 \right]_{-3}^3 = \frac{1}{40} (6x^2 + 18)$$

For alle andre verdier av x er $f_X(x) = 0$. Forventningsverdien til X er dermed

$$E(X) = \int_{-1}^1 x \cdot \frac{1}{40} (6x^2 + 18) \, dx = \frac{1}{40} \int_{-1}^1 6x^3 + 18x \, dx = \frac{1}{40} \left[\frac{6}{4} x^4 + \frac{18}{2} x^2 \right]_{-1}^1 = 0$$

- (c) Vi har at X og Y er uavhengige hvis og bare hvis $f_X(x) \cdot f_Y(y) = f(x,y)$ for alle verdier av x og y . Vi har regnet ut $f_X(x)$ ovenfor, og finner på tilsvarende måte

$$f_Y(y) = \int_{-1}^1 \frac{1}{40} (x^2 + xy + y^2) \, dx = \frac{1}{40} \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 y + xy^2 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{40} \left(\frac{2}{3} + 2y^2 \right)$$

Dermed har vi

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{40} (6x^2 + 18) \cdot \frac{1}{40} \left(\frac{2}{3} + 2y^2 \right) \neq \frac{1}{40} (x^2 + xy + y^2) = f(x,y)$$

når $-1 \leq x \leq 1$ og $-3 \leq y \leq 3$. For eksempel er $f(0,0) = 0$ mens $f_X(0) \cdot f_Y(0) \neq 0$. Dette betyr at **X og Y ikke er uavhengige**.

- (d) Den betingede stokastiske variabelen $X|Y = 1$ har sannsynlighetstetthet

$$f_{X|Y=1}(x) = \frac{f(x,1)}{f_Y(1)} = \frac{x^2 + x + 1}{2/3 + 2} = \frac{3}{8} (x^2 + x + 1)$$

Forventningsverdien er

$$\begin{aligned}E(X|Y = 1) &= \int_{-1}^1 x \cdot \frac{3}{8} (x^2 + x + 1) \, dx = \frac{3}{8} \int_{-1}^1 x^3 + x^2 + x \, dx \\ &= \frac{3}{8} \left[\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^1 = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Oppgave 4.

- (a) Likningen $y'' - 4y' + 4y = 0$ er en lineær annenordens differensiallikning som er homogen, og den karakteristiske likningen $r^2 - 4r + 4 = 0$ har en dobbelrot $r = 2$ siden den kan skrives $(r - 2)^2 = 0$. Dermed er den generelle løsningen

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} = (C_1 + C_2 t) e^{2t}$$

- (b) Likningen $y' = e^{t-y} = e^t \cdot e^{-y}$ kan skrives $e^y y' = e^t$, og er separabel. Vi integrerer begge sider av likningen:

$$\int e^y y' \, dt = \int e^t \, dt \quad \Rightarrow \quad \int e^y \, dy = \int e^t \, dt \quad \Rightarrow \quad e^y = e^t + C$$

Vi har kombinert de to integrasjonskonstanten til en konstant C ovenfor. Vi løser likningen for y for å finne den generelle løsningen på eksplisitt form, og får

$$y = \ln(e^t + C)$$

- (c) Likningen $y' = (t + y)/t$ kan skrives $ty' = t + y$, eller $ty' - y = t$ og er derfor en førsteordens lineær differensiallikning. Vi skriver den på standard form som

$$y' - \frac{1}{t}y = 1$$

og løser den ved hjelp av integrerende faktor. Den integrerende faktor u er gitt ved

$$\int -\frac{1}{t} dt = -\ln|t| + C \Rightarrow u = e^{-\ln|t|} = \left(e^{\ln|t|}\right)^{-1} = |t|^{-1} = \frac{1}{|t|}$$

For $t > 0$ så blir integrerende faktor $u = 1/t$ siden $|t| = t$, og multiplikasjon med $u = 1/t$ gir

$$\frac{1}{t}y' - \frac{1}{t^2}y = \frac{1}{t} \Rightarrow \left(\frac{1}{t}y\right)' = \frac{1}{t}$$

Når vi bruker at $|t| = t$ gir dette

$$\frac{1}{t}y = \int \frac{1}{t} dt = \ln t + C \Rightarrow y = t \ln t + Ct$$

For $t < 0$ så blir integrerende faktor $u = -1/t$ siden $|t| = -t$, og multiplikasjon med $u = -1/t$ gir

$$-\frac{1}{t}y' + \frac{1}{t^2}y = -\frac{1}{t} \Rightarrow \frac{1}{t}y' - \frac{1}{t^2}y = \frac{1}{t} \Rightarrow \left(\frac{1}{t}y\right)' = \frac{1}{t}$$

Den nest siste likheten følger ved multiplikasjon med -1 . Vi ser at vi får den samme likningen som vi fikk ovenfor. Dette gir som før

$$\frac{1}{t}y = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C \Rightarrow y = t \ln|t| + Ct$$

men vi husker at $|t| = -t$ i dette tilfellet. Den generelle løsningen kan i begge tilfeller skrives

$$y = t \ln|t| + Ct$$

Oppgave 5.

- (a) Vi skriver $H = \ln(y - u) + p \cdot (y + u)$ for Hamilton-funksjonen til dette kontrollproblemet. Den normale løsningen er gitt ved likningene

$$H'_u = -\frac{1}{y - u} + p = 0, \quad H'_y = \frac{1}{y - u} + p = -p'$$

Vi skal løse differensiallikningen $y' = y + u$, og vi gjør det ved å bruke at $p = 1/(y - u)$ og $-p' = 1/(y - u) + p = p + p = 2p$, eller $p' = -2p$ fra likningene ovenfor. Merk også at høyresiden $y + u$ i differensiallikningen kan skrives ved hjelp av $y - u$ eller p ved å bruke at $y + u = 2y - (y - u)$. Dermed får vi følgende likning ved å derivere begge sider:

$$y' = y + u = 2y - (y - u) = 2y - \frac{1}{p} \Rightarrow y'' = 2y' - (p^{-1})' = 2y' + p^{-2} \cdot p' = 2y' - \frac{2}{p}$$

I siste overgang har vi brukt at $p' = -2p$. Siden $1/p = y - u = 2y - (y + u) = 2y - y'$ gir dette differensiallikningen

$$y'' = 2y' - 2 \cdot \frac{1}{p} = 2y' - 2(2y - y') = 4y' - 4y \Rightarrow y'' - 4y' + 4y = 0$$

Dette er en lineær andre ordens differensiallikning som er homogen med konstante koeffisienter. Vi løste denne i oppgave 4(a) ovenfor og fant den generelle løsningen $y = (C_1 + C_2 t)e^{2t}$. De to initialbetingelsene $y(0) = 1$ og $y(1) = 0$ gir $C_1 = 1$ og $(C_1 + C_2)e^2 = 0$, eller $C_1 + C_2 = 0$, som gir $C_2 = -1$. Vi finner altså den normale løsningen $y = (1 - t)e^{2t}$ ved å bruke Pontryagins maksimumsprinsipp. Hessematrixen til Hamilton-funksjonen, som en funksjon av y og u , er gitt ved

$$H(H) = \begin{pmatrix} H''_{yy} & H''_{yu} \\ H''_{uy} & H''_{uu} \end{pmatrix} = \frac{1}{(y - u)^2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Siden $1/(y - u)^2$ er positiv, kan vi avgjøre definittheten ved å se på den siste konstante matrixen. Den er negativ semidefinit ettersom den karakteristiske likningen $\lambda^2 + 2\lambda = 0$ gir egenverdiene $\lambda = 0, -2 \leq 0$. Dermed er H en konkav funksjon og $y = (1 - t)e^{2t}$ gir maksimum i kontrollproblemet.

- (b) Vi bruker at $y' = y + u$, eller $u = y' - y$, til å skrive $y - u$ som $y - u = y - (y' - y) = 2y - y'$. Dermed kan kontrollproblemet skrives som et variasjonsproblem:

$$\max \int_0^1 \ln(2y - y') dt \text{ når } \begin{cases} y(0) = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

I dette problemet er $F = \ln(2y - y')$ og for å finne Euler-likningen regner vi ut de partielle deriverte:

$$F'_y = \frac{2}{2y - y'}, \quad F'_{y'} = \frac{-1}{2y - y'} \Rightarrow (F'_{y'})'_t = (2y - y')^{-2} \cdot (2y' - y'') = \frac{2y' - y''}{(2y' - y'')^2}$$

Dermed er Euler-likningen for dette problemet, etter at vi utvider de to uttrykkene til fellesnevner $(2y - y')^2$, gitt ved

$$\frac{2 \cdot (2y - y')}{(2y - y')^2} - \left(\frac{2y' - y''}{(2y - y')^2} \right) = \frac{2(2y - y') - (2y' - y'')}{(2y - y')^2} = \frac{y'' - 4y' + 4y}{(2y - y')^2} = 0$$

Multiplikasjon med $(2y - y')^2$ gir dermed Euler-likningen $y'' - 4y' + 4y = 0$. Dette er den samme homogene annenordens lineære differensiallikningen som vi fant i (a), med de samme initialbetingelsene, så løsningen av Euler-likningen og initialbetingelsene blir $y = (1 - t)e^{2t}$ på samme måte som i (a). Vi sjekker om til slutt om F er konkav som funksjon i y og y' ved å regne ut Hesse-matrisen:

$$H(F) = \begin{pmatrix} F''_{y,y} & F''_{y,y'} \\ F''_{y',y} & F''_{y',y'} \end{pmatrix} = \frac{1}{2y - y'} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Siden faktoren $1/(2y - y')^2$ er positiv, kan vi avgjøre definittheten ved å se på den siste konstante matrisen. Den er negativ semidefinit ettersom den karakteristiske likningen $\lambda^2 + 5\lambda = 0$ gir egenverdiene $\lambda = 0, -5 \leq 0$. Dermed er F en konkav funksjon og $y = (1 - t)e^{2t}$ gir maksimum i variasjonsproblemet.