

Eksamensoppgaven består av 15 deloppgaver som vektes likt. Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1.

La $V = \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ og $W = \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4)$ når vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ er gitt ved

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- a) Løs vektorlikningen $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + x_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$. Skriv $\mathbf{v}_3$ som en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4$ hvis det er mulig. Er vektorene $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ lineært uavhengige?
- b) Bestem en basis for W . Avgjør om det finnes vektorer i W som ikke er i V , og finn i så fall alle slike vektorer.

Oppgave 2.

Vi ser på matrisen A gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

- a) Avgjør hvilke av tallene 1, 2, 3 som er egenverdier av A og finn alle egenverdiene til A .
- b) Finn en ortogonal matrise P slik at $P^T A P$ er diagonal.
- c) Bestem matrisen A^{-1} og avgjør dens definitthet.
- d) Finn de stasjonære punktene til funksjonen f og avgjør om de er maksimums- eller minimumspunkter for f :

$$f(x, y, z) = 4x^2 + 2xy + 8xz + 4y^2 + 8yz + 9z^2 + 6y + 10z + 22$$

Oppgave 3.

Vi ser på funksjonen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{40}(x^2 + xy + y^2) & \text{hvis } -1 \leq x \leq 1 \text{ og } -3 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

- a) Hvilke betingelser må f oppfylle for å være tetthetsfunksjonen for to simultant fordelte stokastiske variabler X og Y ? Sjekk at betingelsene er oppfylt.
- b) Bestem den marginale sannsynlighetstettheten $f_X(x)$, og regn ut $E(X)$.
- c) Er X og Y uavhengige stokastiske variabler?
- d) Finn sannsynlighetstettheten til den betingede stokastiske variabelen $X|Y = 1$ og regn ut forventningsverdien $E(X|Y = 1)$.

Oppgave 4.

Finn den generelle løsningen $y = y(t)$ av følgende differensiallikninger:

a) $y'' - 4y' + 4y = 0$

b) $y' = e^{t-y}$

c) $y' = \frac{t+y}{t}$

Oppgave 5.

Vi betrakter det optimale kontrollteori problemet

$$\max \int_0^1 \ln(y - u) dt \quad \text{når} \quad \begin{cases} y' = y + u \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

- a) Bruk Pontryagins maksimumsprinsipp til å finne en normal løsning på maksimumsproblem.
- b) Gjør problemet om til et variasjonsproblem, og finn løsningen av maksimumsproblem ved å bruke Eulerlikningen.