Eksamen i ELE3719 Matematikk valgfag

onsdag 10. desember 2025, kl. 9-14

LØSNINGFORSLAG

Oppgave 1

a) Vi løser matriselikningen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ved å gjøre elementære radoperasjoner på den utvidete koeffisientmatrisen:

$$\left[A \vdots \boldsymbol{b}\right] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 6 & 2 & 6 \\ 2 & -12 & -16 & 0 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 6 \\ 2 & -12 & -16 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & -6 & -12 & 2 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{bmatrix} = E$$

Denne matrisen er på trappeform med pivoter i kolonne 1, 2 og 4. Da får vi at $x_4 = 2$, $x_3 = t$ (en fri parameter), $x_2 = 2 - 2t$, $x_1 = 8 - 4t$. Hvis vi løser likningen $2 - 2t = 8 - 4t$ får vi $t = 3$ som gir $x_1 = x_2 = -4$.

b) En basis for $\text{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ er gitt av kolonnevektorene med pivoter i trappeformen, dvs $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_4\}$.

Radoperasjonene i (a) utført på matrisen $\left[\boldsymbol{u}_1 \vdots \boldsymbol{u}_2 \vdots \boldsymbol{u}_3\right]$ gir matrisen med de 3 første kolonnene i E som har pivoter i først og andre kolonne. Altså er $\text{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\} = \text{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ og altså $\boldsymbol{u}_3 \in \text{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$. Dermed er ikke vektorene $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ lineært uavhengige.

Oppgave 2

a) Egenverdiene er løsningene av den karakteristiske likningen $\det(A - \lambda I) = 0$. Hvis vi utvikler determinanten langs første rad får vi $(5 - \lambda)[(10 - \lambda)(2 - \lambda) - 3^2] = 0$. Da er enten $\lambda = 5$ eller $(10 - \lambda)(2 - \lambda) - 3^2 = 0$, dvs. $\lambda^2 - 12\lambda + 11 = 0$, dvs. $(\lambda - 1)(\lambda - 11) = 0$, dvs. $\lambda = 1$ eller $\lambda = 11$.

Vi finner egenvektorer ved å løse likningsystemet $[A - \lambda I]\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ for hver av egenverdiene. For $\lambda = 5$ får vi

$$A - 5I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 9 \\ 0 & 15 & -15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 9 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix}$$

som gir løsninger $x_3 = 0$, $x_2 = 0$ og $x_1 = s$ for en fri parameter s. Vi får egenvektorer $s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ med egenverdi 5 for alle $s \neq 0$.

For $\lambda = 1$ får vi

$$A - I = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

som gir løsninger $x_3 = t$ (en fri parameter), $x_2 = -t/3$ og $x_1 = 0$. Vi får egenvektorer $t\begin{bmatrix} 0 \\ -1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$ med egenverdi 1 for alle $t \neq 0$.

For $\lambda = 11$ får vi

$$A - 11I = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

som gir løsninger $x_3 = r$ (en fri parameter), $x_2 = 3r$ og $x_1 = 0$. Vi får egenvektorer $r\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ med egenverdi 11 for alle $r \neq 0$.

b) Egenvektorene til en symmetrisk matrise med ulike egenverdier er ortogonale. Vi velger derfor egenvektorer med lengde 1 og setter dem som kolonner i P som dermed blir en ortogonal matrise som diagonaliserer A.

$$P = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} \sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{som gir} \quad P^T A P = D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

c) Stasjonære punkter for $f(\boldsymbol{x})$ er løsninger av matriselikningen $A\boldsymbol{x} = -\frac{1}{2}B^T$ der $B = [40 \;\; 2 \;\; -6]$. Bruker elementære radoperasjoner på matriseformen til likningssystemet.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 5 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 10 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 5 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 30 & 9 & -3 \\ 0 & 30 & 20 & 30 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 5 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 30 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 11 & 33 \end{array}\right]$$

som gir $x_3 = 3$, $x_2 = 1$ og $x_1 = -4$. Så eneste stasjonære punkt er $(-4, -1, 3)$.

Fordi A bare har positive egenverdier er det stasjonære punktet et minimumspunkt.

d) Vi regner først ut minimumsverdien:

$$f(-4,-1,3) = 5\cdot(-4)^2 + 10\cdot(-1)^2 + 2\cdot 3^2 + 6\cdot(-1)\cdot 3 + 40\cdot(-4) + 2\cdot(-1) - 6\cdot 3 + 2025 = 1935$$

Siden dette er den globale minimumsverdien har ikke likningen $f(x_1, x_2, x_3) = k$ løsninger for $k < 1935$. Hvis vi ser på funksjonen $f(x_1, x_2, x_3)$ innsatt $(x_2, x_3) = (-1, 3)$ får vi en ny andregradsfunksjon i én variabel:

$$g(x_1) = f(x_1, -1, 3) = 5x_1^2 + 40x_1 + 2045 = 5(x_1 + 4)^2 + 1935$$

Spesielt er det globale minimumspunktet $g(-4) = 1935$. Siden andregradsfunksjonen $g(x_1)$ vokser uten grenser når $x_1 \longrightarrow \infty$ vil $f(x_1, x_2, x_3) = k$ ha løsninger for alle $k \geqslant 1935$. Dermed har likningen $f(x_1, x_2, x_3) = k$ ingen løsninger akkurat for $k < 1935$.

Oppgave 3

a)

$$\begin{aligned}
P(X \leqslant 2, Y \leqslant 3) &= \int_0^3 \int_0^2 \frac{1}{200}(40-8x-10y+2xy)\,dx\,dy \\
&= \frac{1}{200}\int_0^3 \left[40x-4x^2-10xy+x^2y\right]_0^2\,dy = \frac{1}{200}\int_0^3 64-16y\,dy \\
&= \frac{1}{200}\left[64y-8y^2\right]_0^3 = \frac{120}{200} = \underline{\underline{0{,}6}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(Y \geqslant 2) &= \int_2^4 \int_0^5 \frac{1}{200}(40-8x-10y+2xy)\,dx\,dy \\
&= \frac{1}{200}\int_2^4 \left[40x-4x^2-10xy+x^2y\right]_0^5\,dy = \frac{1}{200}\int_2^4 100-25y\,dy \\
&= \frac{1}{200}\left[100y-\frac{25}{2}y^2\right]_2^4 = \frac{200-150}{200} = \underline{\underline{0{,}25}}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^4 \frac{1}{200}(40-8x-10y+2xy)\,dy = \frac{1}{200}\left[40y-8xy-5y^2+xy^2\right]_0^4 \\
&= \frac{1}{200}(80-16x) = \underline{\underline{\frac{2}{25}(5-x) \quad \text{for } 0 \leqslant x \leqslant 5 \text{ og } 0 \text{ ellers.}}}
\end{aligned}$$

Hvis $x = a$ er medianen, er $\int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx = \frac{1}{2}$. Dvs. $\int_0^a \frac{2}{25}(5-x)\,dx = \frac{1}{2}$. Integrerer og får likningen $\frac{2}{25}\left[5x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^a = \frac{1}{2}$. Setter inn grensene og får likningen $10a-a^2 = \frac{25}{2}$ som har løsninger $a = 5 \pm \frac{5}{\sqrt{2}}$. Men medianen til X må ligge i intervallet $[0, 5]$. Derfor er medianen $\underline{\underline{5\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}}$.

c) Vi bruker et integral fra (a) og får

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_0^5 \frac{1}{200}(40-8x-10y+2xy)\,dx = \frac{1}{200}\left[40x-4x^2-10xy+x^2y\right]_0^5 \\
&= \frac{1}{200}(100-25y) = \frac{1}{8}(4-y) \text{ for } 0 \leqslant y \leqslant 4 \text{ og } 0 \text{ ellers.}
\end{aligned}$$

Vi har at variansen $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - (\mathrm{E}(Y))^2$. Vi beregner derfor

$$\mathrm{E}(Y) = \int_0^4 y \cdot \frac{1}{8}(4-y)\,dy = \frac{1}{8}\left[2y^2-\frac{1}{3}y^3\right]_0^4 = \frac{1}{8}\cdot\frac{32}{3} = \frac{4}{3}$$

og

$$\mathrm{E}(Y^2) = \int_0^4 y^2 \cdot \frac{1}{8}(4-y)\,dy = \frac{1}{8}\left[\frac{4}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4\right]_0^4 = \frac{1}{8}\cdot\frac{4^4}{12} = \frac{8}{3}$$

Altså er $\mathrm{Var}(Y) = \frac{8}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{8}{9}}}$

d) Fra beregningene av $f_X(x)$ i (b) og $f_Y(y)$ i (c) får vi at produktet

$$f_X(x)\cdot f_Y(y) = \frac{2}{25}(5-x)\cdot\frac{1}{8}(4-y) = \frac{1}{100}(20-4x-5y+xy)$$
$$= \frac{1}{200}(40-8x-10y+2xy) \quad \text{for } 0\leqslant x\leqslant 5 \text{ og } 0\leqslant y\leqslant 4, \text{ og 0 ellers.}$$

Altså er $f_X(x)\cdot f_Y(y) = f(x,y)$ og da er X og Y uavhengige stokastiske variabler.

Oppgave 4

a) Dette er en lineær, første ordens differensiallikning. Vi multipliserer begge sider av likningen med den integrerende faktoren e^{3t} og får $e^{3t}y' + 3e^{3t}y = 10t + 6075e^{3t}$, dvs. $(e^{3t}y)' = 10t + 6075e^{3t}$. Ved integrasjon får vi $e^{3t}y = 5t^2 + 2025e^{3t} + C$. Multiplikasjon på begge sider med e^{-3t} gir
$y(t) = 5t^2e^{-3t} + 2025 + Ce^{-3t} = \underline{\underline{\frac{5t^2+C}{e^{3t}} + 2025}}$. Da e^{3t} vokser raskere enn alle polynomer, eller ved å bruke l'Hôpitals regel to ganger, får vi likevektstilstanden som grensen

$$\lim_{t\to\infty}\frac{5t^2+C}{e^{3t}} + 2025 = \lim_{t\to\infty}\frac{10t}{3e^{3t}} + 2025 = \lim_{t\to\infty}\frac{10}{9e^{3t}} + 2025 = \underline{\underline{2025}}.$$

Grensen 2025 er uavhengig av initialbetingelser (dvs. av C) og derfor er differensiallikningen globalt asymptotisk stabil.

b) Vi deler begge sider av likningen med e^t og får den separable differensiallikningen $3y^2y' = e^{-t}$. Vi integrerer begge sider med hensyn på t: $\int 3y^2y'\,\mathrm{d}t = \int e^{-t}\,\mathrm{d}t$. På venstresiden bruker vi substitusjonen $y = y(t)$ med $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}t$. Det gir $\int 3y^2y'\,\mathrm{d}t = \int 3y^2\,\mathrm{d}y = y^3 + C_1$. Høyresiden er $\int e^{-t}\,\mathrm{d}t = -e^{-t} + C_2$. Dette gir likningen $y^3 = -e^{-t} + C$ (hvor $C = C_2 - C_1$). Vi får $\underline{\underline{y(t) = \sqrt[3]{C - e^{-t}}}}$.

Oppgave 5

a) Dette er en lineær, homogen andre ordens differensiallikning som på standardform er $y'' - 4y = 0$. Den karakteristiske likningen er $r^2 - 4 = 0$, dvs. $r = \pm 2$. Dette gir den generelle løsningen $y(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t}$. Initialbetingelsene gir likningene $C_1 + C_2 = 0$ og $C_1e + C_2e^{-1} = 10(e - \frac{1}{e})$. Vi setter $C_2 = -C_1$ inn i den andre likningen og får $C_1(e - \frac{1}{e}) = 10(e - \frac{1}{e})$ som gir $C_1 = 10$, $C_2 = -10$ og $\underline{\underline{y(t) = 10(e^{2t} - e^{-2t})}}$.

b) Hamiltonfunksjonen for den normale løsningen er $H = H(t, y, u, p) = 100 - 4y^2 - 4yu - u^2 + pu$ hvor $p = p(t)$. Vi har $H'_y = -8y - 4u$ og $H'_u = -4y - 2u + p$. Pontryaginbetingelsene er da

$$\begin{cases} -4y - 2u + p = 0 \\ p' = 8y + 4u \end{cases} \quad \text{dvs.} \quad \begin{cases} p = 4y + 2u & (4) \\ p' = 8y + 4u & (5) \end{cases}$$

Substituerer $u = y'$ fra (1), deriverer (4) og får $p' = 4y' + 2y''$. Innsatt i (5) gir dette differensiallikningen $4y' + 2y'' = 8y + 4y'$, dvs. $y'' - 4y = 0$ som har løsningen $y(t) = 10(e^{2t} - e^{-2t})$ (se (a)). Vi har også $u(t) = y'(t) = 20(e^{2t} + e^{-2t})$.

Hvis H er en konkav funksjon i (y, u) så gir $y(t)$ og $u(t)$ maksimum i kontrollproblemet. Vi har

$$\begin{cases} H''_{yy} = -8 = A \\ H''_{yu} = -4 = B \\ H''_{uu} = -2 = C \end{cases} \quad \text{som gir} \quad \begin{cases} AC - B^2 = 0 \geqslant 0 \\ A = -8 < 0 \end{cases} \quad \text{så } H \text{ er konkav.}$$

c) Substituerer $u = y'$ i H og får $F = F(t, y, y') = 100 - 4y^2 - 4yy' - (y')^2$. Vil løse variasjonsproblemet

$$\text{maks} \int_0^{\frac{1}{2}} 100 - 4y^2 - 4yy' - (y')^2 \, \mathrm{d}t \quad , \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(\frac{1}{2}) = 10(e - \frac{1}{e}) \end{cases}$$

Vi har

$$\begin{cases} F'_y = -8y - 4y' \\ F'_{y'} = -4y - 2y' \end{cases} \quad \text{som gir} \quad \frac{\mathrm{d}(F'_{y'})}{\mathrm{d}t} = -4y' - 2y''$$

og Eulerlikningen blir $-8y - 4y' - (-4y' - 2y'') = 0$ som forenkles til standardformen $y'' - 4y = 0$. Dette er samme differensiallikning med samme initialbetingelser som i (b) som dermed har løsningen $y(t) = 10(e^{2t} - e^{-2t})$.

Hvis F er en konkav funksjon i (y, y') så gir $y(t)$ maksimum i variasjonsproblemet. Vi har

$$\begin{cases} F''_{yy} = -8 = A \\ F''_{yy'} = -4 = B \\ F''_{y'y'} = -2 = C \end{cases} \quad \text{som gir} \quad \begin{cases} AC - B^2 = 0 \geqslant 0 \\ A = -8 < 0 \end{cases} \quad \text{så } F \text{ er konkav.}$$