Eksamen i ELE3719 Matematikk valgfag

10. desember 2025, kl. 9-14

Oppgavesettet har 15 underpunkter som alle vektes likt.
Vedlagte formelsamling er på 1 side.

Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1

Vi har

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & -12 & -16 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

a) Løs likningen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Avgjør om det finnes en løsning med $x_1 = x_2$.

b) La $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ være kolonnevektorene i matrisen A, dvs. $A = \left[\boldsymbol{u}_1 \vdots \boldsymbol{u}_2 \vdots \boldsymbol{u}_3 \vdots \boldsymbol{u}_4\right]$. Finn en basis for $\text{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$. Avgjør om vektorene $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ er lineært uavhengige.

Oppgave 2

Vi har matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Finn egenverdiene til A. Finn egenvektorene til hver av egenverdiene.

b) Finn en ortogonal (3×3)-matrise P slik at $P^T AP = D$ er en diagonalmatrise og bestem D.

Vi har andregradsfunksjonen

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 10x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_2x_3 + 40x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 2025$$

c) Bestem de stasjonære punktene til $f(x_1, x_2, x_3)$ og avgjør om de er maksimum- eller minimumspunkter, eller ingen av delene.

d) For hvilke tall k har likningen $f(x_1, x_2, x_3) = k$ ingen løsninger?

Oppgave 3

Vi har to simultant fordelte kontinuerlige stokastiske variabler X og Y som har simultan tetthetsfunksjon

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{200}(40-8x-10y+2xy) & \text{hvis } 0 \leqslant x \leqslant 5 \text{ og } 0 \leqslant y \leqslant 4 \\ \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

a) Beregn sannsynlighetene
i) $P(X \leqslant 2, Y \leqslant 3)$ ii) $P(Y \geqslant 2)$

b) Bestem den marginale sannsynlighetstettheten $f_X(x)$. Beregn medianen til X.

c) Beregn variansen til Y.

d) Avgjør om X og Y er uavhengige stokastiske variabler.

Oppgave 4

Vi lar y betegne en funksjon av t, dvs. $y = y(t)$.

a) Løs differensiallikningen $y' + 3y = 10te^{-3t} + 6075$. Finn likevektstilstanden og bestem om differensiallikningen er globalt asymptotisk stabil.

b) Løs differensiallikningen $3e^t y^2 y' = 1$.

Oppgave 5

Vi lar y og u betegne funksjoner av t, dvs. $y = y(t)$ og $u = u(t)$.

a) Løs differensiallikningen $y'' = 4y$ med initialbetingelsene $y(0) = 0$ og $y(\frac{1}{2}) = 10(e - \frac{1}{e})$.

b) Vi har kontrollproblemet

$$\text{maks} \int_0^{\frac{1}{2}} 100 - 4y^2 - 4yu - u^2 \, \mathrm{d}t \quad , \qquad \begin{cases} y' = u & (1) \\ y(0) = 0 & (2) \\ y(\frac{1}{2}) = 10(e - \frac{1}{e}) & (3) \end{cases}$$

Bruk Pontryagins maksimumsprinsipp til å finne en normal løsning på kontrollproblemet (bestem både y og u).

c) Gjør kontrollproblemet om til et variasjonsproblem og bruk Euler-likningen til å løse dette.