Løsning	ELE 3719 Matematikk Valgfag
Dato	11. mai 2026 kl 0900-1400

Oppgave 1.

(a) Vi bruker Gauss-eliminasjon til å løse det lineære systemet:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vi ser at dette er en trappeform og at $x_3 = s$ og $x_4 = t$ er frie variabler. Baklengs substitusjon gir $x_2 = -1 - 4s - t$ og $x_1 = 1 - 3(-1 - 4s - t) + 2s - t = 4 + 14s + 2t$. Løsningene kan dermed skrives på vektorform som

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 14s + 2t \\ -1 - 4s - t \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

der s og t er parametre. Dette gir $x + y = 3 + 10s + t$ og $z + w = s + t$, og dermed gir $x + y = 0$ og $z + w = -3$ at $10s + t = -3$ og $s + t = -3$, det vil si $9s = 0$ og dermed $s = 0$ og $t = -3$. Vi konkluderer med at det finnes én løsning med $x + y = 0$ og $z + w = -3$: Det er løsningen $(-2,2,0,-3)$, som svarer til parameterverdiene $s = 0$ og $t = -3$.

(b) For å løse det homogene lineære systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, bytter vi ut $\mathbf{b}$ med $\mathbf{0}$ i siste kolonne i utregningen ovenfor, og vi finner da løsningene

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14s + 2t \\ 4s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = s \cdot \mathbf{w}_1 + t \cdot \mathbf{w}_2$$

Det betyr at $V = \operatorname{span}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ er utspent av de vektorene $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ gitt ovenfor, og siden s og t er frie variabler eller parametre, er de to vektorene lineært uavhengige og dermed en basis for V. Vi konkluderer dermed at $\dim V = 2$.

Oppgave 2.

(a) Betingelsene er at $f(x,y) \geq 0$ for alle x,y, og at den totale sannsynligheten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 1$$

Vi har at $f(x,y) \geq 0$ for alle x,y siden $x^3 + 3xy + y^3 \geq 0$ når $x,y \geq 0$. Dessuten har vi at

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 x^3 + 3xy + y^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left[x^3 y + \frac{3}{2}xy^2 + \frac{1}{4}y^4\right]_0^1 \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^3 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right]_0^1 = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Dette betyr at den totale sannsynligheten er $4/5 \cdot 5/4 = 1$, og f oppfyller begge kravene.

(b) Vi finner den marginale tettheten $f_X(x)$ til X når $0 \leq x \leq 1$ ved integralet

$$f_X(x) = \int_0^1 \frac{4}{5}\left(x^3 + 3xy + y^3\right)\,\mathrm{d}y = \frac{4}{5}\left[x^3 y + \frac{3}{2}xy^2 + \frac{1}{4}y^4\right]_0^1 = \frac{4}{5}\left(x^3 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\right)$$

For alle andre verdier av x er $f_X(x) = 0$. Forventningsverdien til X er dermed

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot \frac{4}{5}\left(x^3 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\right) \mathrm{d}x = \frac{4}{5}\int_0^1 x^4 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{4}{5}\left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^2\right]_0^1 = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) = \frac{4}{5} \cdot \frac{8+20+5}{40} = \frac{33}{50} = 0.66$$

(c) Vi har at X og Y er uavhengige hvis og bare hvis $f_X(x) \cdot f_Y(y) = f(x,y)$ for alle verdier av x og y. Vi har regnet ut $f_X(x)$ ovenfor, og finner på tilsvarende måte

$$f_Y(y) = \int_0^1 \frac{4}{5}\left(x^3 + 3xy + y^3\right) \mathrm{d}x = \frac{4}{5}\left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2y + xy^3\right]_0^1 = \frac{4}{5}\left(y^3 + \frac{3}{2}y + \frac{1}{4}\right)$$

Dette kan vi også se ved symmetri, siden $f(x,y) = f(y,x)$. Dermed har vi

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{4}{5}\left(x^3 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{4}{5}\left(y^3 + \frac{3}{2}y + \frac{1}{4}\right) \neq \frac{4}{5}\left(x^3 + 3xy + y^3\right) = f(x,y)$$

når $0 \leq x,y \leq 1$. For eksempel er $f(0,0) = 0$ mens $f_X(0) \cdot f_Y(0) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \neq 0$. Dette betyr at X og Y ikke er uavhengige.

(d) Den betingede stokastiske variabelen $X|Y = 1/2$ har sannsynlighetstetthet

$$f_{X|Y=1/2}(x) = \frac{f(x,1/2)}{f_Y(1/2)} = \frac{x^3 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{8}}{\frac{1}{8} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{8}{9}\left(x^3 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{9}\left(8x^3 + 12x + 1\right)$$

Forventningsverdien er dermed

$$E(X|Y = 1/2) = \int_0^1 x \cdot \frac{1}{9}\left(8x^3 + 12x + 1\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{9}\int_0^1 8x^4 + 12x^2 + x \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{9}\left[\frac{8}{5}x^5 + 4x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{8}{5} + 4 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{61}{10} = \frac{61}{90} \approx 0.68$$

Oppgave 3.

(a) Likningen $t^2y' = 1 + y$ kan skrives $t^2y' - y = 1$, og er en førsteordens lineær differensiallikning som kan skrives på standard form som

$$y' - \frac{1}{t^2}y = \frac{1}{t^2}$$

og vi løser den ved hjelp av integrerende faktor. Den integrerende faktoren u er gitt ved

$$\int -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{t} + C \quad \Rightarrow \quad u = e^{1/t}$$

Multiplikasjon i likningen med $u = e^{1/t}$ gir

$$e^{1/t}y' - \frac{1}{t^2}e^{1/t}y = \frac{1}{t^2}e^{1/t} \quad \Rightarrow \quad \left(e^{1/t}y\right)' = \frac{1}{t^2}e^{1/t} \quad \Rightarrow \quad e^{1/t}y = \int \frac{1}{t^2}e^{1/t}\,\mathrm{d}t$$

og vi løser integralet ved substitusjonen $u = 1/t$ som gir $\mathrm{d}u = -1/t^2\,\mathrm{d}t$ og dermed

$$e^{1/t}y = \int \frac{1}{t^2}e^{1/t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^2}e^u \cdot (-t^2)\,\mathrm{d}u = \int -e^u\,\mathrm{d}u = -e^u + C = -e^{1/t} + C$$

Den generelle løsningen av differensiallikningen finner vi ved å dividere med integrerende faktor:

$$y = \frac{-e^{1/t} + C}{e^{1/t}} = -1 + Ce^{-1/t}$$

Likningen er også en separabel differensiallikning, og vi kunne alternativt ha løst den ved å separere variablene.

(b) Likningen $y' - 2te^{-y} = 2t$ kan skrives $y' = 2t + 2te^{-y} = 2t(1 + e^{-y})$ og er derfor en separabel differensiallikning. Vi skriver den på separert form

$$\frac{1}{1 + e^{-y}}y' = 2t \quad \text{eller} \quad \frac{e^y}{e^y + 1}y' = 2t \quad \Rightarrow \quad \int \frac{e^y}{e^y + 1}\,\mathrm{d}y = \int 2t\,\mathrm{d}t = t^2 + C_2$$

Vi bruker substitusjonen $u = e^y + 1$ med $\mathrm{d}u = e^y\,\mathrm{d}y$ for å løse integralet på venstre side:

$$\int \frac{e^y}{e^y+1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{e^y}{u}\frac{\mathrm{d}u}{e^y} = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + C_1 = \ln(e^y+1) + C_1$$

Dette gir $\ln(e^y+1) = t^2 + C$ med $C = C_2 - C_1$, og $e^y + 1 = e^{t^2+C} = Ke^{t^2}$ med $K = e^C$. Vi løser for y:

$$e^y = Ke^{t^2} - 1 \quad \Rightarrow \quad y = \ln(Ke^{t^2} - 1)$$

Oppgave 4.

(a) Likningen $y'' - y = 0$ er en annenordens lineære homogen differensiallikning med karakteristisk likning $r^2 - 1 = 0$. Dette gir $r = \pm 1$, og generell løsning $y = C_1e^t + C_2e^{-t}$. Initialbetingelsene $y(0) = 0$ og $y(1) = e - 1/e$ gir $C_1 + C_2 = 0$, eller $C_2 = -C_1$, og $C_1e + (-C_1)\cdot 1/e = e - 1/e$ gir

$$C_1(e - 1/e) = e - 1/e \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{e - 1/e}{e - 1/e} = 1$$

Dermed blir $C_2 = -C_1 = -1$, og løsningen $y(t) = e^t - e^{-t}$.

(b) Vi skriver $H = 4y^2 + 4yu + u^2 + p\cdot(y+u)$ for Hamilton-funksjonen til dette kontrollproblemet (med $p_0 = 1$). Den normale løsningen er gitt ved Pontryaginbetingelsene

$$H'_u = 4y + 2u + p = 0, \quad H'_y = 8y + 4u + p = -p'$$

Den første likningen gir $4y + 2u = -p$, eller $8y + 4u = -2p$. Setter vi dette inn i den andre likningen, får vi $-2p + p = -p'$, eller $p' - p = 0$. Dette er en første ordens homogen lineær differensiallikning, og vi bruker karakteristisk likning $r - 1 = 0$, med rot $r = 1$, for å løse den: Det gir $p(t) = Ce^t$. Vi bruker så likningen $4y + 2u + p = 0$, som gir

$$4y + 2u + p = 4y + 2(y' - y) + Ce^t = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y' + 2y = -Ce^t \quad \Rightarrow \quad y' + y = -\frac{C}{2}e^t$$

Vi har brukt differensiallikningen $y' = y + u$ til å uttrykke u som $u = y' - y$. Vi løser så den lineære differensiallikningen for y ved å bruke superposisjonsprinsippet: Den karakteristiske likningen er $r + 1 = 0$ med rot $r = -1$, og dermed er den homogene løsningen $y_h = De^{-t}$. For å finne en partikulærløsning av $y' + y = -C/2\cdot e^t$, prøver vi med $y = Ae^t$, som gir $y' = Ae^t$ og

$$Ae^t + Ae^t = -\frac{C}{2}e^t \quad \rightarrow \quad 2A = -C/2$$

Dette gir $A = -C/4$, $y_p = -C/4\cdot e^t$, og generell løsning $y = y_h + y_p = De^{-t} - C/4\,e^t$. Dette er den samme løsningen som den generelle løsningen i (a) med $C_1 = -C/4$ og $C_2 = D$, og initialbetingelsene er de samme som i (a). Dermed blir normalløsningen av Pontryaginbetingelsene og betingelsene i kontrollproblemet $y = e^t - e^{-t}$. Vi sjekker at dette er et minimumspunkt for funksjonalen: Hessematrisen til Hamilton-funksjonen, som en funksjon av y og u, er gitt ved

$$H(H) = \begin{pmatrix} H''_{yy} & H''_{yu} \\ H''_{uy} & H''_{uu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Hessematrisen har determinant $\det H(H) = 8\cdot 2 - 4^2 = 0$, og elementene på diagonalen er $8, 2 \geq 0$. Dermed er H konveks som funksjon av y,u og normalløsningen $y = e^t - e^{-t}$ gir minimum i kontrollproblemet.

(c) Vi bruker at $y' = y + u$, eller $u = y' - y$, til å skrive om $F = y^2 + 4yu + u^2$ som

$$F(t,y,y') = 4y^2 + 4yu + u^2 = 4y^2 + 4y(y' - y) + (y' - y)^2 = y^2 + +2yy' + (y')^2$$

Dermed kan kontrollproblemet skrives som et variasjonsproblem:

$$\min \int_0^1 y^2 + 2yy' + (y')^2\,\mathrm{d}t \text{ når } \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = e - 1/e \end{cases}$$

For å finne Euler-likningen regner vi ut de partiell-deriverte til F:

$$F'_y = 2y + 2y', \quad F'_{y'} = 2y + 2y' \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F'_{y'}\right) = 2y' + 2y''$$

Dermed er Euler-likningen for dette problemet gitt ved

$$2y + 2y' - (2y' + 2y'') = 0 \quad \Rightarrow \quad -2y'' + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' - y = 0$$

Dette er den samme homogene annenordens lineære differensiallikningen som vi løste i (a), med de samme initialbetingelsene. Dermed blir løsningen av Euler-likningen og initialbetingelsene blir $y = e^t - e^{-t}$ den samme som i (a). Vi sjekker om til slutt om F er konveks som funksjon i y og y' ved å regne ut Hesse-matrisen:

$$H(F) = \begin{pmatrix} F''_{y,y} & F''_{y,y'} \\ F''_{y',y} & F''_{y',y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Hessematrisen har determinant $\det H(F) = 2 \cdot 2 - 2^2 = 0$, og elementene på diagonalen er $2, 2 \geq 0$. Dermed er F konveks som funksjon av y,y' og løsningen $y = e^t - e^{-t}$ gir minimum i variasjonsproblemet.

Oppgave 5.

(a) Vi finner determinanten ved å bruke Gauss-eliminasjon, og starter med å trekke siste rad fra den første for å få enklere regning:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Siden trappeformen har en nullrad, så er $\det(A) = 0$. Dette betyr også at $\lambda = 0$ er en av egenverdiene siden produktetet av egenverdiene er $\det(A) = 0$. Vi finner den karakteristiske likningen til A ved å regne ut $|A - \lambda I|$, og bruker kofaktorutvikling langs første rad:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 & 4 \\ 3 & 5-\lambda & 4 \\ 4 & 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)((5-\lambda)(4-\lambda) - 16) - 3(3(4-\lambda) - 16) + 4(12 - 4(5-\lambda))$$

$$= (5-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 4) + 9\lambda + 12 + 16\lambda - 32$$

$$= -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 24\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 14\lambda + 24) = 0$$

Siden $\lambda^2 - 14\lambda + 24 = (\lambda - 2)(\lambda - 12)$, er de to andre egenverdiene $\lambda = 2$ og $\lambda = 12$. Vi finner altså de tre egenverdiene $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 12$.

(b) Siden A er symmetrisk med tre ulike egenverdier, vet vi at A har en ortogonal diagonalisering $P^T AP = D$, og hver kolonne i P er en basisvektor av lengde 1 i hver av de tre egenrommene E_λ av egenvektorer. Vi finner først en basis for egenrommet E_0 for $\lambda = 0$ ved å bruke trappeformen til A fra (a):

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette gir z fri, $8y + 4z = 0$, eller $y = -z/2$, og $x - y = 0$, eller $x = y = -z/2$. Egenvektorene for $\lambda = 0$ er derfor $(x,y,z) = (-z/2, -z/2, z) = -z/2(1,1,-2)$ med z fri, og vektoren $\mathbf{u}_1 = (1,1,-2)$ er en basis for E_0. Tilsvarende regning for E_2 gir

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette gir y fri, $10z = 0$, eller $z = 0$, og $-x + -y + 2(0) = 0$, eller $x = -y$. Egenvektorene for $\lambda = 2$ er derfor $(x,y,z) = (-y,y,0) = y(-1,1,0)$ med y fri, og vektoren $\mathbf{u}_2 = (-1,1,0)$ er en basis for E_2. Til slutt gir tilsvarende regning for E_{12} (der vi starter med å legge til to ganger tredje rad i første rad for å få enklere regning):

$$A - 12I = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 4 \\ 3 & -7 & 4 \\ 4 & 4 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 11 & -12 \\ 3 & -7 & 4 \\ 4 & 4 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 11 & -12 \\ 0 & -40 & 40 \\ 0 & -40 & 40 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 11 & -12 \\ 0 & -40 & 40 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette gir z fri, $-40y + 40z = 0$, eller $y = z$, og $x + 11(z) - 12z = 0$, eller $x = z$. Egenvektorene for $\lambda = 12$ er derfor $(x,y,z) = (z,z,z) = z(1,1,1)$ med z fri, og vektoren $\mathbf{u}_3 = (1,1,1)$ er en basis for E_{12}. Siden A er en symmetrisk matrise med tre ulike egenverdier, vet vi at de tre basisvektorene er parvis ortogonale. Vi regner ut lengden til de tre basisvektorene:

$$||\mathbf{u}_1|| = \sqrt{6}, \quad ||\mathbf{u}_2|| = \sqrt{2}, \quad ||\mathbf{u}_3|| = \sqrt{3}$$

Dette gir en ortonormal basis av egenvektorer

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), \quad \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

og matrisen P med disse tre vektorene som kolonnevektorer er en ortogonal matrise slik at $P^TAP = D$ er diagonal. Dette gir

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

(c) Funksjonen f kan skrives på matriseform som $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^TA\mathbf{x} + B\mathbf{x} + C$, hvor A er matrisen fra tidligere i oppgaven, $B = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$ og $C = 17$. De stasjonære punktene til f er dermed gitt ved

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 2A\mathbf{x} + B^T = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad A\mathbf{x} = -\frac{1}{2}B^T \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Vi løser likningen ved Gauss-eliminasjon, og bruker stegene fra (a) på den utvidede matrisen. Dette gir

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & -4 \\ 3 & 5 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & -4 \\ 0 & 8 & 4 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vi ser at z er fri og at det er uendelig mange stasjonære punkter. Vi får at $8y + 4z = -4$, eller $y = -1/2 - z/2$, og at $x - y = 0$, eller at $x = y = -1/2 - z/2$. Altså er punktene $\mathbf{x} = (-1/2 - z/2, -1/2 - z/2, z)$ (med z fri) de stasjonære punktene til f.

(d) Siden A har egenverdier $\lambda = 0, 2, 12 \geq 0$, er A en positiv semidefinitt matrise, og alle de stasjonære punktene til f er derfor minimumspunkter for f. Det betyr at alle de stasjonære punktene har samme verdi som $(-1/2, -1/2, 0)$ (det stasjonære punktet med $z = 0$), og vi finner den felles minimumsverdien:

$$f(-1/2, -1/2, 0) = 5/4 + 6/4 + 5/4 + 8(-1/2) + 8(-1/2) + 17 = 13$$

Dermed er minimumsverdien $f_{\min} = 13$. Ved variabelskiftet $\mathbf{u} = P\mathbf{x}$ med $\mathbf{u} = (u,v,w)$ kan vi skrive likningen $f(x,y,z) = k$ som

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^TA\mathbf{x} + B\mathbf{x} + 17 = \mathbf{u}^TP\mathbf{u} + BP\mathbf{u} + 17 = 0 \cdot u^2 + 2 \cdot v^2 + 12 \cdot w^2 + BP\mathbf{u} + 17 \\ &= 2v^2 + 12w^2 + \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \mathbf{u} + 17 \\ &= 2v^2 + 12w^2 + \frac{24}{\sqrt{3}}w + 17 = 2v^2 + 12\left(w + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{12}{3} + 17 = k \end{aligned}$$

Dette gir at likningen $f(x,y,z) = k$ kan skrives om i de nye koordinatene som

$$2v^2 + 12\left(w + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = k - 13$$

Dermed får vi ingen løsninger for $k < 13$, at løsningen danner en rett linje når $k = 13$ (gitt ved at u er fri, $v = 0$ og $w = -1/\sqrt{3}$), og en sylinder med en ellipse som tverrflate når $k > 13$ (tverrflaten i vw-planet er en ellipse med sentrum i $(0, -1/\sqrt{3})$ når $k > 13$).