Eksamen	ELE 3719 Matematikk Valgfag
Dato	11. mai 2026 kl 0900-1400

Eksamensoppgaven består av 15 deloppgaver som vektes likt. Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1.
Vi ser på matrisen A og det lineære systemet $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -8 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Løs det lineære systemet $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Avgjør om det finnes løsninger med $x+y = 0$ og $z+w = -3$.
b) Mengden V består av alle vektorer $\mathbf{x}$ slik at $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vis at mengden V kan skrives på formen $V = \text{span}(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r)$ for noen vektorer $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r$. Bestem $\dim V$.

Oppgave 2.
Tetthetsfunksjonen for de simultant fordelte stokastiske variablene X og Y er oppgitt til å være

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{5}(x^3 + 3xy + y^3) & \text{hvis } 0 \le x \le 1 \text{ og } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

a) Avgjør om f oppfyller kravene til en tetthetsfunksjon.
b) Bestem den marginale sannsynlighetstettheten $f_X(x)$, og regn ut $E(X)$.
c) Er X og Y uavhengige stokastiske variabler?
d) Finn forventningsverdien til den betingede stokastiske variabelen $X|Y = \frac{1}{2}$.

Oppgave 3.
Finn den generelle løsningen $y = y(t)$ av følgende differensiallikninger:

a) $t^2 y' = 1 + y$ b) $y' - 2te^{-y} = 2t$

Oppgave 4.
Vi betrakter det optimale kontrollteoriproblemet

$$\min \int_0^1 4y^2 + 4yu + u^2 \, \mathrm{d}t \quad \text{når} \quad \begin{cases} y' = y + u \\ y(0) = 0 \\ y(1) = e - 1/e \end{cases}$$

a) Løs differensiallikningen $y'' - y = 0$ med initialbetingelsene $y(0) = 0$ og $y(1) = e - 1/e$.
b) Bruk Pontryagins førsteordensbetingelser til å finne en normal løsning på kontrollproblemet.
c) Gjør kontrollproblemet om til et variasjonsproblem, og bruke Eulerlikningen til å løse dette.

Oppgave 5.
Vi ser på matrisen A og funksjonen f gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad f(x,y,z) = 5x^2 + 6xy + 8xz + 5y^2 + 8yz + 4z^2 + 8x + 8y + 8z + 17$$

a) Regn ut determinanten til A, og bestem egenverdiene til A.
b) Finn en ortogonal matrise P slik at $P^T AP$ er diagonal.
c) Finn de stasjonære punktene til funksjonen f.
d) Avgjør om f har en maksimums- eller minimumsverdi, og beskriv løsningene av likningen $f(x,y,z) = k$ geometrisk for alle verdier av k.

Formelark

Matrisemetoder

Partiell derivasjon
Den kvadratiske funksjonen f i n variabler

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\,\mathbf{x} + B\,\mathbf{x} + C$$

der A er en symmetrisk $n \times n$-matrise, B er en $1 \times n$-matrise og C er en 1×1-matrise har de n partiellderiverte gitt ved vektoren

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 2A\,\mathbf{x} + B^T$$

Integrasjonsmetoder

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v\,\mathrm{d}t = uv - \int uv'\,\mathrm{d}t$$

b) Substitusjonen $u = u(t)$:

$$\int f(u)u'\,\mathrm{d}t = \int f(u)\,\mathrm{d}u$$

c) Delbrøksoppspaltning:

$$\int \frac{pt+q}{(t-a)(t-b)}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{A}{t-a} + \frac{B}{t-b}\right)\,\mathrm{d}t$$

Variasjonsregning og kontrollteori

Variasjonsregning
Variasjonsproblemet gitt ved

$$\max / \min \int_a^b F(t,y,y')\,\mathrm{d}t$$

med betingelsene

$$\begin{cases} y(a) &= y_a \\ y(b) &= y_b \end{cases}$$

har Euler-likning

$$F'_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F'_{y'}\right) = 0$$

Optimal kontrollteori
Kontrollproblemet gitt ved

$$\max / \min \int_a^b F(t,y,u)\,\mathrm{d}t$$

med betingelsene

$$\begin{cases} y'(t) &= G(t,y,u) \\ y(a) &= y_a \\ y(b) &= y_b \end{cases}$$

har Hamiltonfunksjonen

$$H(t,y,u,p) = p_0\,F(t,y,u) + p(t)\,G(t,y,u)$$

og første ordens Pontryaginbetingelser

$$\begin{cases} H'_u &= 0 \\ H'_y &= -p'(t) \end{cases}$$

med $p_0 = 1$ (normalløsningen) eller $p_0 = 0$ og $p(t) \neq 0$ (degenerert løsning)