Eksamen	Prøve-eksamen i ELE 3719 Matematikk Valgfag
Dato	Mai 2015

Alle deloppgaver har samme vekt og gir maksimalt 6p hver. Svarene på de 15 ordinære deloppgavene gir maksimalt 90p (100%). Oppgaver merket Bonus kan sløyfes, men gir opp til 6p ekstra om de besvares korrekt.

Oppgave 1.

Vi betrakter matrisen A gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) **(6p)** Regn ut $\det(A)$ og det karakteristiske polynomet $|A - \lambda I|$ til A.
(b) **(6p)** Finn egenverdiene til A. Er A positiv (semi)definitt, negativ (semi)definitt eller indefinitt?
(c) **(6p)** Finn en matrise P slik at $P^{-1}AP$ er diagonal.

Vi betrakter funksjonen

$$f(x, y, z) = x^2 + 4xz + y^2 + 8yz + 2z^2 + 6y - 12z + 8$$

(d) **(6p)** Skriv f på matriseform, og bruk dette til å finne de stasjonære punktene til f. Er de stasjonære punktene maksimums- eller minimumspunkter?

En kvadratisk matrise B kalles *ortogonal* dersom den er inverterbar med $B^{-1} = B^T$.

(e) **(6p)** Er det mulig å velge matrisen P i (c) ortogonal? Begrunn svaret.
(f) **Bonus (6p)** Finn nye variabler (u, v, w) slik at funksjonen f blir en annengradsfunksjon i (u, v, w) uten kryssledd.

Oppgave 2.

La X og Y være simultant fordelte kontinuerlige stokastiske variable, med sannsynlighetstetthet gitt ved

$$f(x, y) = \begin{cases} k(x^3 + 3xy + y^3), & 0 \le x, y \le 2 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

for en positiv konstant k.

(a) **(6p)** Bestem k. Hva blir sannsynlighetstettheten $f_X(x)$?
(b) **(6p)** Finn $E(X)$ og $\mathrm{Var}(X)$.
(c) **(6p)** Finn $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Er X og Y uavhengige?

La U og V være normalfordelte stokastiske variable, med $E(U) = 1$, $\mathrm{Var}(U) = 4$, og $E(V) = 3$, $\mathrm{Var}(V) = 1$. Vi ser på den kontinuerlige stokastiske variabelen $Z = 2U + 3V$.

(d) **(6p)** Finn $E(Z)$ og $\mathrm{Var}(Z)$ når vi antar at U og V er uavhengige stokastiske variabler.
(e) **(6p)** Uttrykk $\mathrm{Var}(Z)$ ved hjelp av $c = E(UV)$ når U og V ikke nødvendigvis er uavhengige stokastiske variabler. Hvilken verdi må c ha for at U og V skal være uavhengige?

Oppgave 3.

Finn løsningen $y = y(t)$ av følgende differensiallikninger:

(a) **(6p)** $y'' - 8y' - 7y = 21$
(b) **(6p)** $t^2 y' - y = 1$
(c) **(6p)** $e^{-y} + ty' = 1$

Oppgave 4.

Vi betrakter variasjonsproblemet

$$\max \int_0^4 \ln(y - y')\, e^{-rt}\, \mathrm{d}t \quad \text{når} \quad \begin{cases} y(0) & = 1 \\ y(4) & = e^{4-4r} \end{cases}$$

der $r > 0$ er en gitt positiv konstant (diskonteringsrenten).

(a) **(6p)** Finn Euler-likningen for dette problemet, og bestem den entydige løsningen $y^* = y^*(t)$ av Euler-likningen som også oppfyller bibetingelsene.
(b) **(6p)** Løser $y^*(t)$ variasjonsproblemet? Begrunn svaret.