Eivind Eriksen

Digital Arbeidsbok i ELE 3719 Matematikk

30. april 2015

Handelshøyskolen BI

Innhold

Del I
Forelesninger i ELE3719 Matematikk

Forelesning 1
Vektorer og vektorregning

1.1 Kort sammendrag

En n-vektor er et n-tuppel av tall $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Den kalles ofte kun for en vektor, og skrives gjerne som en kolonnevektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Vi kan tolke en vektor som en forflytning, og framstille den geometrisk som en pil som starter i origo og ender i punktet $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ i et n-dimensjonalt koordinatsystem. Lengden av vektoren $\mathbf{v}$ er gitt ved

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

Addisjon og subtraksjon av vektorer, og skalarmultiplikasjon (multiplikasjon av en vektor med et tall) er viktige regneoperasjoner for vektorer, som gir nye vektorer som svar. Disse operasjonene skrives

$$\mathbf{v} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{v} - \mathbf{w}, \quad r\mathbf{v}$$

og utføres komponent for komponent. Nullvektoren $\mathbf{0}$ er vektoren $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$. En lineærkombinasjon av vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ er et uttrykk på formen

$$r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \cdots + r_m\mathbf{v}_m$$

der koeffisisentene $r_1, \ldots, r_m$ er vilkårlige tall.

Indreproduktet $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ mellom to vektorer (som også kalles for prikkproduktet eller skalarproduktet) er gitt ved

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n$$

Det gir et tall (og ikke en vektor) som svar. Indreproduktet har følgende egenskaper:

1. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$
2. $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}$
3. $(r\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = r(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$
4. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$, og likhet holder kun hvis $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Vi sier at vektorene $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ er ortogonale hvis $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$. Når vektorene kan tolkes geometrisk i et 2- eller 3-dimensjonalt koordinatsystem, så betyr ortogonalitet at vektorene står normalt på hverandre. Lengden til en vektor $\mathbf{v}$ kan skrive ved hjelp av indreproduktet som $||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$.

For to n-vektorer $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ gjelder Cauchy-Schwarz' ulikhet $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq ||\mathbf{v}|| \, ||\mathbf{w}||$. Hvis vektorene $\mathbf{v}, \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, kan den skrives på formen

$$-1 \leq \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{||\mathbf{v}|| \, ||\mathbf{w}||} \leq 1$$

Vi definerer vinkelen mellom vektorene $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ til å være den vinkelen α mellom 0 og 180 grader som er slik at

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{||\mathbf{v}|| \, ||\mathbf{w}||}$$

Uttrykkene er 0 om vinkelen α er 90 grader, positivt om den er mindre enn 90 grader, og negativt om den er større enn 90 grader.

Om $\mathbf{v}, \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ er to n-vektorer, så er projeksjonen $\text{proj}_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_{\mathbf{w}}$ vektoren som er parallell med $\mathbf{w}$ og slik at $\mathbf{v}_{\mathbf{w}}$ er ortogonal på $\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\mathbf{w}}$. Projeksjonen er gitt ved

$$\text{proj}_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}} \, \mathbf{w}$$

Mengden av alle lineærkombinasjoner av n-vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ kalles det lineært underrom utspent av disse vektorene, og skrives

$$W = \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m)$$

Vektorene kalles lineært avhengige om minst en av vektorene kan skrives som en lineærkombinasjon av de andre, og lineært uavhengige ellers. Vektorene er lineært uavhengige hvis og bare hvis likningen

$$x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + x_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

kun har den trivielle løsningen $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Gitt et lineært underrom W, kan vi alltid finne vektorer $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ som er lineært uavhengige og utspenner W. Da kalles $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ for en basis for W, og antall vektorer d er dimensjonen til W.

1.2 Oppgaver

1.1. Regn ut vektorene $\mathbf{v}+\mathbf{w}$, $3\mathbf{v}$ og $2\mathbf{v}-3\mathbf{w}$ når

$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

1.2. Regn ut vektorene $\mathbf{v}+\mathbf{w}$, $2\mathbf{v}$ og $3\mathbf{v}-\mathbf{w}$ når

$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$$

1.3. Løs følgende likning for den ukjente vektoren:

$$2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}3\\-2\\7\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$$

1.4. Vis at følgende vektorlikning kan skrives som to lineære likninger i to ukjente:

$$x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

Hva blir likningsystemet? Finn også løsningene av likningssystemet.

1.5. Avgjør om $\mathbf{w}$ er en lineærkombinasjon av vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ når

$$\mathbf{w}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

1.6. Avgjør om $\mathbf{w}$ er en lineærkombinasjon av vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ når

$$\mathbf{w}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

1.7. Avgjør om $\mathbf{w}$ er en lineærkombinasjon av vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ når

$$\mathbf{w}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}5\\0\\-5\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

1.8. Regn ut $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ og $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ når

$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{w}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

1.9. Regn ut lengden av vektorene $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ og indreproduktet $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, og bruk dette til å finne projeksjonen $\mathbf{v_w} = \text{proj}_{\mathbf{w}}(\mathbf{v})$ av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{w}$ når

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Tegn inn vektorene $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, og $\mathbf{v_w}$ i samme koordinatsystem.

1.10. Regn ut lengden av vektorene $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ og indreproduktet $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, og bruk dette til å finne projeksjonen $\mathbf{v_w} = \text{proj}_{\mathbf{w}}(\mathbf{v})$ av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{w}$ når

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1.11. Finn alle vektorer som står normalt på både $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ når

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1.12. Bestem de verdiene av h slik at de tre vektorene er lineært uavhengige:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ h \end{pmatrix}$$

1.13. Vis at at linjestykket fra $(0,0,0)$ til (a,b,c) har lengde gitt ved

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Hint: Ta utgangspunkt i et rektangulært prisme med sider a,b,c. Vi kan tenke på et rektangulært prisme som en «boks» der alle sideflater er rektangulære og står normalt på hverandre.

1.3 Løsninger

1.1 Vi har at

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 3\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad 2\mathbf{v} - 3\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \end{pmatrix}$$

1.2 Vi har at

$$\mathbf{v}+\mathbf{w}=\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}, \quad 2\mathbf{v}=\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}, \quad 3\mathbf{v}-\mathbf{w}=\begin{pmatrix}4\\-9\\7\end{pmatrix}$$

1.3 Vi har at

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left(-3\begin{pmatrix}3\\-2\\7\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-3/2\\6\\-19/2\end{pmatrix}$$

1.4 Vi kan skrive likningen som

$$\begin{pmatrix}x+3y\\2x-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

det vil si som likningssystemet

$$\begin{aligned} x + 3y &= 3\\ 2x - y &= 1\end{aligned}$$

Ved å legge sammen første likning med 3 ganger andre likning, kan vi eliminere y, og får at $7x = 6$, eller $x = 6/7$. Innsetting i andre likning gir da $y = 2x-1 = 5/7$. Likningssystemet har derfor løsningen $(x,y) = (6/7,5/7)$.

1.5 Vi ser at $\mathbf{w}$ er lineærkombinasjonen

$$\mathbf{w}=\mathbf{v}_1+3\mathbf{v}_2-2\mathbf{v}_3$$

1.6 Vi ser at $\mathbf{w}$ er lineærkombinasjonen

$$\mathbf{w}=2\mathbf{v}_1+3\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$$

1.7 Vi ser at $\mathbf{w}$ ikke er en lineærkombinasjonen av de andre vektorene. Vektorlikningen

$$\mathbf{w}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3$$

gir et likningsssystem med tre likninger, og den andre likningen er

$$1=c_1\cdot 0+c_2\cdot 0+c_3\cdot 0$$

Det finnes selvsagt ingen verdier av de ukjente slik at $1 = 0$, derfor har likningssystemet ingen løsninger. Det betyr at $\mathbf{w}$ ikke er en lineærkombinasjon av de andre vektorene.

1.8 Vi har at

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=2\cdot 3+(-1)\cdot 4=2 \quad \text{og} \quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=2\cdot 2+(-1)\cdot(-1)=5$$

Siden $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$, er $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})=2+5=7$.

1.9 Vi har at

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=5,\quad \mathbf{w}\cdot\mathbf{w}=25,\quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=2$$

Dermed er $||\mathbf{v}||=\sqrt{5}$ og $||\mathbf{w}||=5$, og projeksjonen er gitt ved

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{w}}(\mathbf{v})=\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}}\,\mathbf{w}=\frac{2}{25}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

1.10 Vi har at

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=6,\quad \mathbf{w}\cdot\mathbf{w}=29,\quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=12$$

Dermed er $||\mathbf{v}||=\sqrt{6}$ og $||\mathbf{w}||=\sqrt{29}$, og projeksjonen er gitt ved

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{w}}(\mathbf{v})=\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}}\,\mathbf{w}=\frac{12}{29}\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}$$

1.11 Vi kaller den ukjente vektoren $\mathbf{x}=(x,y,z)$. At den står normalt på $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ gir betingelsene

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}=0\quad\Leftrightarrow\quad 2x-3y+4z=0$$

og

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{w}=0\quad\Leftrightarrow\quad -3x+2y+3z=0$$

Løser vi de to likningene, gir den første at $z=(-2x+3y)/4=-x/2+3y/4$. Setter vi dette inn i den andre likningen får vi at

$$-3x+2y+3(-x/2+3y/4)=0\quad\text{eller}\quad -9x/2+17y/4=0$$

Den siste likningen gir $-18x+17y=0$, eller $y=18x/17$. Setter vi dette inn i uttrykket for z, får vi

$$z=-x/2+3y/4=-x/2+3/4(18x/17)=\frac{-2\cdot17+3\cdot18}{4\cdot17}\,x=\frac{5}{17}\,x$$

Dermed er alle vektorene som står normalt på $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ på formen

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\18x/17\\5x/17\end{pmatrix}=\frac{x}{17}\begin{pmatrix}17\\18\\5\end{pmatrix}$$

Det er altså alle multipler av vektoren $(17,18,5)$.

1.12 Vektorene er lineært uavhengige om ingen av vektorene kan skrives som en lineærkombinasjon av de andre, det vil si hvis likningen

$$x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2+x_3\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$$

kun har den trivielle løsningen $x_1=x_2=x_3=0$. Vi må derfor løse denne likningen og undersøke om det finnes andre løsninger enn den trivielle. Vi får likningssystemet

$$\begin{aligned} x - 2y - z &= 0 \\ 3x - 4y + z &= 0 \\ -3x + y + hz &= 0 \end{aligned}$$

Vi bruker den første likningen til å eliminere x fra de andre likningene. Da får vi

$$\begin{aligned} x - \quad 2y - \qquad\quad z &= 0 \\ 2y + \qquad 4z &= 0 \\ -5y + (h-3)z &= 0 \end{aligned}$$

Deretter bruker vi den andre likningen til å eliminere y fra siste likning. Det gir

$$\begin{aligned} x - 2y - \qquad z &= 0 \\ 2y + \qquad 4z &= 0 \\ (h+7)z &= 0 \end{aligned}$$

Hvis $h \neq -7$, gir den siste likningen $z = 0$. Innsetting i likningen over gir $y = 0$, og innsetting i den første likningen gir $x = 0$. Vi får dermed kun løsningen $x = y = z = 0$ når $h \neq -7$, og vektorene er lineært uavhengige i dette tilfellet. Hvis $h = -7$, så er den siste likningen $0 = 0$, og z blir en fri variabel. Vi har derfor (mange) andre løsninger enn den trivielle, og vektorene er lineært avhengige. Svaret er derfor at vektorene er lineært uavhengige hvis og bare hvis $h \neq -7$.

1.13 Vi kan tenke oss et rektangulært prisme, der grunnflaten er et rektangel med lengde a og bredde b, og høyden er c. Da er $(0,0,0)$ og (a,b,c) to motsatte hjørner, og vi må finne lengden L av linjestykket mellom disse to hjørnene. Diagonalen i grunnflaten, fra $(0,0,0)$ til $(a,b,0)$, har lengde

$$\sqrt{a^2+b^2}$$

ved Pytagoras' setning. Lengden L er derfor hypotenusen i en rettvinklet trekant med kateter av lengde $\sqrt{a^2+b^2}$ og c. Dermed har vi (igjen ved Pytagoras') at

$$L^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 + c^2 = a^2+b^2+c^2 \quad \Rightarrow \quad L = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Forelesning 2
Lineære systemer

2.1 Kort sammendrag

Et $m \times n$ *lineært system* i variablene $x_1, x_2, \dots, x_n$ er et system av m lineære likninger i disse variablene, og kan generelt sett skrives som

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Det lineære systemet kan skrives mer kompakt ved hjelp av matriser, og vi bruker ofte den *utvidede matrisen* $\hat{A} = (A|\mathbf{b})$ gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \hat{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

En løsning av det lineære systemet er en n-vektor $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ slik at $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$ løser alle m likninger samtidig. Dersom $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, så kalles det lineære systemet for *homogent*. Homogene systemer har alltid den trivielle løsningen $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Lemma 2.1. *Ethvert lineært system har enten ingen løsninger, én entydig løsning eller uendelig mange løsninger.*

Gauss' eliminasjonsmetode er en effektiv algoritme som kan brukes til å løse alle lineære systemer. Vi bruker *elementære radoperasjoner* på den utvidede koeffisient-matrisen inntil vi har en *trappeform*, skriver om til et lineært system igjen, and løser det ved *baklengs substitusjon*. Følgende operasjoner er elemenære radoperasjoner:

1. Å legge til et multippel av en rad til en annen rad
2. Å bytte om to rader
3. Å multiplisere en rad med et tall ulik null

I en rad som ikke består av kun nuller, er den *ledende koeffisienten* den første (altså den lengst til venstre) blant koeffisientene som ikke er null. En matrise har trappeform om følgende betingelser holder:

- Alle rader med bare nuller står nedenfor andre rader.
- Hver ledende koeffisient står lenger til høyre enn ledende koeffisienter i radene ovenfor.

En *pivot* er en ledende koeffisient i en trappeform. Baklengs substitusjon er prosessen hvor vi løser likningene i baklengs rekkefølge (vi starter med den nederste likningen). Hver likning løses for variabelen i pivotposisjonen. Variablene som ikke er i pivotposisjoner kalles *frie variabler*.

Lemma 2.2. *Enhver matrise kan gjøres om til en trappeform ved hjelp av elementære radoperasjoner. Trappeformen er ikke entydig, men pivot-posisjonene er det.*

Rangen til en matrise A, som skrives $\mathrm{rk}A$, er antallet pivot-posisjoner i A. Vi kan finne rangen ved å finne en trappeform for A og telle antall pivoter.

Lemma 2.3. *Et $m \times n$ lineært system har løsninger hvis $\mathrm{rk}A = \mathrm{rk}\hat{A}$, og ingen løsninger ellers. Hvis det lineære systemet har løsninger, er antallet frie variabler gitt ved $n - \mathrm{rk}A$.*

Dersom $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ er m-vektorer, så er de lineært uavhengige hvis og bare hvis likningen

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

kun har den trivielle løsningen $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Vi kan undersøke dette ved å danne $m \times n$-matrisen A med vektorene som kolonner, og finne trappeformen til A:

1. Vektorene er lineært uavhengige hvis og bare hvis $\mathrm{rk}(A) = n$, det vil si at det er en pivot-posisjon i hver kolonne.
2. Kolonnevektorene i A som svarer til pivot-posisjoner danner en basis for det lineære underrommet $W = \mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$.

2.2 Oppgaver

2.1. Skriv ned koeffisientmatrisen og den utvidede matrisen i hvert tilfelle:

$$a)\quad \begin{aligned} 2x + 5y &= 6 \\ 3x - 7y &= 4 \end{aligned} \qquad\qquad b)\quad \begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x - y + z &= 2 \\ x - 2y + 4z &= 3 \end{aligned}$$

2.2. Skriv ned det lineære systemet i variablene x, y, z med utvidet matrise

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

2.3. Løs det lineære systemet

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 4 \\ x + 2y + 4z &= 7 \end{aligned}$$

2.4. For hvilke verdier av h har det lineære systemet løsninger?

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 4 \\ x + 2y + z &= h \end{aligned}$$

2.5. Løs de lineære systemene

$$a)\quad \begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 4 \\ x + 2y + 4z &= 7 \end{aligned} \qquad\qquad b)\quad \begin{aligned} 2x + 2y - z &= 2 \\ x + y + z &= -2 \\ 2x + 4y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

2.6. Løs det lineære systemet ved hjelp av Gauss-Jordan eliminasjon:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 4 \\ x + 2y + 4z &= 7 \end{aligned}$$

2.7. Løs de lineære systemene

$$a)\quad \begin{aligned} -4x + 6y + 4z &= 4 \\ 2x - y + z &= 1 \end{aligned} \qquad\qquad b)\quad \begin{aligned} 6x + y &= 7 \\ 3x + y &= 4 \\ -6x - 2y &= 1 \end{aligned}$$

2.8. Bestem løsningene av

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ -x + ay - 21z &= 2 \\ 3x + 7y + az &= b \end{aligned}$$

for alle verdier av parametrene a og b.

2.9. Finn pivot-posisjoenene til matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

2.10. Vis at systemet har uendelig mange løsninger:

$$\begin{aligned} x + 6y - 7z + 3w &= 1 \\ x + 9y - 6z + 4w &= 2 \\ x + 3y - 8z + 4w &= 5 \end{aligned}$$

Finn frie variabler og uttrykk de andre variablene ved hjelp av de frie.

2.11. Løs de lineære systemene:

$$a) \quad \begin{aligned} x - 3y + 6z &= -1 \\ 2x - 5y + 10z &= 0 \\ 3x - 8y + 17z &= 1 \end{aligned} \qquad b) \quad \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 12x + 2y - 3z &= 5 \\ 3x + 4y + z &= -4 \end{aligned}$$

2.12. Finn rangen til matrisene:

$$a) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} \qquad b) \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad c) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

2.13. Finn rangen til matrisene:

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad b) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 11 \end{pmatrix} \qquad c) \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & -5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

2.14. Vis at et 4×6 homogent lineært system har ikke-trivielle løsninger.

2.15. Finn en basis for det lineære underrommet utspent av vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2.3 Løsninger

Legg merke til: Vi regner ut en trappeform i flere av oppgavene, og en trappeform er ikke entydig. Dermed er det fullt mulig å komme fram til en annen trappeform enn i løsningene nedefor som gir riktig svar.

2.1 The coefficient matrix and the augmented matrix of the system is given by

$$a) \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 6 \\ 3 & -7 & 4 \end{array}\right) \qquad b) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

2.2 The linear system is given by

$$\begin{aligned} x + 2y \quad\;\; &= 4 \\ 2x - 3y + z &= 0 \\ 7x + 4y + z &= 3 \end{aligned}$$

2.3 We solve the linear system

$$\begin{aligned} x + \;\; y + \;\; z &= 1 \\ x - \;\; y + \;\; z &= 4 \\ x + 2y + 4z &= 7 \end{aligned}$$

by substitution. First, we solve the first equation for z and get $z = 1-x-y$. Then we substitute this expression for z in the last two equations. We get

$$\begin{aligned} -\,2y &= 3 \\ -3x - 2y &= 3 \end{aligned}$$

We solve the first equation for y, and get $y = -1.5$. Then we substitute this value for y in the second equation, and get $x = 0$. Finally, we substitute both these values in $z = 1-x-y$ and get $z = 2.5$. The solution is therefore $x = 0,\ y = -1.5,\ z = 2.5$.

2.4 We solve the linear system

$$\begin{aligned} x + \;\; y + z &= 1 \\ x - \;\; y + z &= 4 \\ x + 2y + z &= h \end{aligned}$$

by substitution. First, we solve the first equation for z and get $z = 1-x-y$. Then we substitute this expression for z in the last two equations. We get

$$\begin{aligned} -\,2y &= \quad 3 \\ y &= h-1 \end{aligned}$$

We solve the first equation for y, and get $y = -1.5$. Then we substitute this value for y in the second equation, and get $-1.5 = h-1$. If $h = -0.5$, this holds and the system have solutions (x is a free variable, $y = -1.5$ and $z = 1-x-y = 2.5-x$). If $h \neq -0.5$, then this leads to a contradiction and the system have no solutions. Therefore, the linear system have solutions if and only if $h = -0.5$.

2.5 The linear systems have the following augmented matrices:

$$a)\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \end{array}\right) \qquad\qquad b)\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

a) To solve the system, we reduce the system to an echelon form using elementary row operations. The row operations are indicated.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \bigm| & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \bigm| & 4 \\ 1 & 2 & 4 & \bigm| & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} R_2 \leftarrow R_2 + (-1)R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 + (-1)R_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \bigm| & 1 \\ 0 & -2 & 0 & \bigm| & 3 \\ 0 & 1 & 3 & \bigm| & 6 \end{pmatrix} \qquad R_3 \leftarrow R_3 + (0.5)R_2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \bigm| & 1 \\ 0 & -2 & 0 & \bigm| & 3 \\ 0 & 0 & 3 & \bigm| & 7.5 \end{pmatrix}$$

From the last equation we get $z = 2.5$, substitution in the second equation gives $y = -1.5$, and substitution in the first equation gives $x = 0$. Therefore, the solution of a) is $x = 0,\ y = -1.5,\ z = 2.5$.
b) To solve the system, we reduce the system to an echelon form using elementary row operations. The row operations are indicated.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & \bigm| & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \bigm| & -2 \\ 2 & 4 & -3 & \bigm| & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} R_2 \leftarrow R_2 + (-0.5)R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 + (-1)R_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & \bigm| & 2 \\ 0 & 0 & 1.5 & \bigm| & -3 \\ 0 & 2 & -2 & \bigm| & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} R_2 \leftarrow R_3 \\ R_3 \leftarrow R_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & \bigm| & 2 \\ 0 & 2 & -2 & \bigm| & -2 \\ 0 & 0 & 1.5 & \bigm| & -3 \end{pmatrix}$$

From the last equation we get $z = -2$, substitution in the second equation gives $y = -3$, and substitution in the first equation gives $x = 3$. Therefore, the solution of b) is $x = 3,\ y = -3,\ z = -2$.

2.6 We reduce the system to the reduced echelon form using elementary row operations:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} R_2 \leftarrow R_2 + (-1)R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 + (-1)R_1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right) \qquad R_3 \leftarrow R_3 + (0.5)R_2$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 7.5 \end{array}\right) \qquad \begin{matrix} R_2 \leftarrow (-1/2) \cdot R_2 \\ R_3 \leftarrow (1/3) \cdot R_3 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 2.5 \end{array}\right) \qquad R_1 \leftarrow R_1 + (-1)R_2 + (-1)R_3$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 2.5 \end{array}\right)$$

We read off the solution of the system: $x = 0,\ y = -1.5,\ z = 2.5$.

2.7 a) We reduce the linear system to an echelon form:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 6 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

We see that the system has infinitely many solutions (z is a free variable and x,y are basic variables). We reduce the system to a reduced echelon form:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1.5 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1.5 & 1.5 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1.25 & 1.25 \\ 0 & 1 & 1.5 & 1.5 \end{array}\right)$$

We see that $x + 1.25z = 1.25,\ y + 1.5z = 1.5$. Therefore the solution is given by $x = 1.25 - 1.25z,\ y = 1.5 - 1.5z$ (z is a free variable).
b) We reduce the linear system to an echelon form:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ -6 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 1 & 7 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & -1 & 8 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 1 & 7 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

We see that the system has no solutions.

2.8 We find the augmented matrix of the linear system and reduce it to an echelon form:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & a & -21 & 2 \\ 3 & 7 & a & b \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a+2 & -18 & 3 \\ 0 & 1 & a-9 & b-3 \end{array}\right)$$

We interchange the last two rows to avoid division with $a + 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & a-9 & | & b-3 \\ 0 & a+2 & -18 & | & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & a-9 & | & b-3 \\ 0 & 0 & -18-(a-9)(a+2) & | & 3-(b-3)(a+2) \end{pmatrix}$$

We compute $-18-(a-9)(a+2) = 7a-a^2$. So when $a \neq 0$ and $a \neq 7$, the system has a unique solution. When $a = 0$, we compute $3-(b-3)(a+2) = 9-2b$. So when $a = 0$ and $b \neq 9/2$, the system is inconsistent, and when $a = 0$, $b = 9/2$, the system has infinitely many solutions (one degree of freedom). When $a = 7$, we compute $3-(b-3)(a+2) = 30-9b$. So when $a = 7$ and $b \neq 30/9 = 10/3$, the system is inconsistent, and when $a = 7$, $b = 10/3$, the system has infinitely many solutions (one degree of freedom).

2.9 We redude the matrix to an echelon form using row elementary row operations:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -7 & -11 & -3 & -14 \\ 0 & 6 & 6 & 5 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -7 & -11 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & -24/7 & * & * \end{pmatrix}$$

We have not computed the entries marked $*$ since they are not needed to find the pivot positions. The pivot positions in the matrix are marked with a box:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & \boxed{2} & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & \boxed{2} & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

2.10 We find the augmented matrix and reduce it to an echelon form using elementary row operations:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 & | & 1 \\ 1 & 9 & -6 & 4 & | & 2 \\ 1 & 3 & -8 & 4 & | & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 & | & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 & | & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 5 \end{pmatrix}$$

We see that the system has infinitely many solutions and one degree of freedom (z is a free variable and x,y,w are basic variables). To express x,y,w in terms of z, we find the reduced echelon form:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 & | & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & | & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 5/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -9 & 0 & | & -7/2 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & | & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 5/2 \end{pmatrix}$$

We see that $x-9z = -7/2$, $y+z/3 = -1/2$ and $w = 5/2$. This means that the solution is given by $x = 9z-7/2$, $y = -z/3-1/2$, $w = 5/2$ (z is a free variable).

2.11 a) We find the augmented matrix of the linear system and reduce it to an echelon form:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & | & -1 \\ 2 & -5 & 10 & | & 0 \\ 3 & -8 & 17 & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & | & -1 \\ 0 & 1 & -2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

Back substitution gives the solution $x = 5,\ y = 6,\ z = 2$.
b) We find the augmented matrix of the linear system and reduce it to an echelon form:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 12 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & -4 \end{array}\right) \quad\Rightarrow\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -35 & -35 \end{array}\right)$$

Back substitution gives the solution $x = 1,\ y = -2,\ z = 1$.

2.12 a) We find an echelon form of the matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

We see that the rank of A is 1 since there is one pivot position.
b) We find an echelon form of the matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -7 \end{pmatrix}$$

We see that the rank of A is 2 since there are two pivot positions.
c) We find an echelon form of the matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

We see that the rank of A is 2 since there are two pivot positions.

2.13 a) We find an echelon form of the matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

We see that the rank of A is 3 by counting pivot positions.
b) We find an echelon form of the matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 11 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 4.5 & 4.5 & 4.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 4.5 & 4.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

We see that the rank of A is 2 by counting pivot positions.
c) We find an echelon form of the matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & -5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -9 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

We interchange the two middle rows to get easier computations:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -9 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 14 & 20 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

We see that the rank of A is 3 by counting pivot positions. T

2.14 Let A be the 4×6 coefficient matrix of the homogeneous linear system. Then $n = 6$ (there are 6 variables) while $\operatorname{rk} A \leq 4$ (there cannot be more than one pivot position in each row). So there are at least two degrees of freedom, and the system has non-trivial solutions.

2.15 Fra oppgave 2.13 c) vet vi at matrisen med disse vektorene som kolonner har pivot-posisjoner i de tre første kolonnene. Derfor er $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ en basis det lineære underrommet (mens $\mathbf{v}_4$ er en lineærkombinasjon av disse tre vektorene).

Forelesning 3
Matriser og matriseregning

3.1 Kort sammendrag

En $m \times n$ *matrise* er en samling av tall ordnet i m rader og n kolonner, og skrives

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Viktige operasjoner for matriser er addisjon, subtraksjon, transponering, multiplikasjon og skalarmultiplikasjon (multiplikasjon av en matrise med et tall), og skrives

$$A+B, \quad A-B, \quad A^T, \quad AB, \quad rA$$

Disse operasjonene gir nye matriser som svar. Regning med matriser følger de fleste regneregler som gjelder for regning med tall, men AB er ikke nødvendigvis lik BA når A,B er matriser, og $AB = 0$ betyr ikke nødvendigvis at $A = 0$ eller $B = 0$. Merk at $Ar = rA$ når r er et tall og at $(AB)^T = B^T A^T$.

En kvadratisk matrise er en matrise med like mange rader som kolonner. For kvadratiske matriser kan vi regne ut potensene

$$A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ faktorer}}$$

Det er ofte arbeidskrevende å regne ut potenser av matriser, men om A er en diagonal matrise (dvs $a_{ij} = 0$ om $i \neq j$) er det enklere:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^m = \begin{pmatrix} a_{11}^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^m \end{pmatrix}$$

En kvadratisk matrise kalles invertibel med invers A^{-1} om det finnes en matrise A^{-1} slik at $A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = I$, hvor $I = I_n$ er identitetsmatrisen (den diagonale matrisen med $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$). Videre er A symmetrisk om $A^T = A$ og ortogonal om $A^{-1} = A^T$.

Determinanten $\det(A) = |A|$ er en funksjon som er definert for alle kvadratiske matriser A, og som gir et tall som svar. En viktig egenskap er at

$$A \text{ er invertibel} \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0$$

Determinanten har egenskapen at $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ og at $\det(A^T) = \det(A)$. Hvis A,B er invertible, så er $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Determinanter kan regnes ut ved hjelp av kofaktorutvikling eller ved hjelp av Gauss-eliminasjon. For 2×2-matriser har vi at

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad \text{og} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Et homogent $m \times n$ lineært system kan skrives på formen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Om det lineære systemet er kvadratisk ($m = n$) og homogent ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$), så har vi at

$$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rk}(A) = n \quad \Leftrightarrow \quad A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ har kun triviell løsning } \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Hvis $\det(A) = 0$, betyr det at $\mathrm{rk}(A) < n$, og systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har uendelig mange løsninger og $n - \mathrm{rk}(A)$ frihetsgrader (frie variable).

Samlingen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ av vektorer kalles *ortonormal* dersom $||\mathbf{v}_i|| = 1$ for alle i, og $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ for alle $i \neq j$, altså om alle vektorene har lengde 1 og vektorene parvis står normalt på hverandre. En kvadratisk matrise er ortogonal hvis og bare hvis dens kolonnevektorer danner en ortonormal mengde av vektorer.

3.2 Oppgaver

3.1. Regn ut $4A + 2B$, AB, BA, BI og IA når

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2. Vis matriseloven $(AB)^T = B^T A^T$ når A og B er 2×2-matriser.

3.3. Forenkle følgende matriseuttrykk:

$$a) \quad AB(BC - CB) + (CA - AB)BC + CA(A - B)C$$
$$b) \quad (A - B)(C - A) + (C - B)(A - C) + (C - A)^2$$

3.4. En $m \times n$-matrise skrives ofte som $A = (a_{ij})_{m \times n}$, hvor a_{ij} er koeffisienten i A i rad i og kolonne j. Vis at hvis $m = n$ og $a_{ij} = a_{ji}$ for alle i og j, så er $A = A^T$. Gi et konkret eksempel på en matrise med denne egenskapen, og forklar hvorfor det er rimelig å kalle en matrise A symmetrisk når $A = A^T$.

3.5. Regn ut D^2, D^3 og D^n når

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3.6. Skriv ned det 3×3 lineære systemet som svarer til matriselikningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ når

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 5 & -3 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3.7. Løs matriselikningen $2A + 3X = I$ for X når

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3.8. Skriv det lineære likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

som en matriselikning og som en vektorlikning.

3.9. Regn ut $|A|$ ved hjelp av kofactorutvidelse langs første kolonne, og deretter langs den tredje raden, når

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Sjekk at svaret blir det samme. Er A inverterbar?

3.10. Beregn determinanten ved hjelp av kofaktorutvikling. Det lønner seg å velge en rad eller kolonne slik at regningen blir så enkel som mulig.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -8 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

3.11. Beregn determinanten ved hjelp av kofaktorutvikling. Det lønner seg å velge en rad eller kolonne slik at regningen blir så enkel som mulig.

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -6 & 4 & -8 \\ 5 & 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

3.12. La A og B være 3×3-matriser med $|A| = 2$ og $|B| = -5$. Finn $|AB|$, $|-3A|$ og $|-2A^T|$. Regn ut $|C|$ når C er matrisen vi får fra B når vi bytter om to rader.

3.13. Regn ut determinanten ved hjelp av elementære radoperasjoner:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 9 & 3 & 15 \\ -3 & -1 & -5 \end{vmatrix}$$

3.14. Finn den inverse matrisen A^{-1}, hvis den eksisterer, når A er matrisen gitt ved

$$a)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad b)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad c)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.15. Regn ut kofaktormatrisen, den adjungerte matrisen og den inverse matrisen til disse matrisene:

$$a)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad b)\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sjekk at $AA^{-1} = I$ og at $BB^{-1} = I$.

3.16. Skriv det lineære systemet av likninger

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 &= 4 \end{aligned}$$

på matriseform $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ og løs det ved å bruke A^{-1}.

3.17. Det finnes en effektiv metode for å finne den inverse til en matrise ved hjelp av radoperasjoner. Anta at vi skal finne den inverse til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Vi skriver da ned matrisen

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

og reduserer den til redusert trappeform ved å bruke elementære radoperasjoner: Først legger vi til (-1) ganger den første raden til den andre raden:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&3&1&0&0\\ 1&3&3&0&1&0\\ 2&5&7&0&0&1 \end{array}\right) \quad\Rightarrow\quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&3&1&0&0\\ 0&1&0&-1&1&0\\ 2&5&7&0&0&1 \end{array}\right)$$

Vi legger til (-2) ganger den første raden i siste rad:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&3&1&0&0\\ 0&1&0&-1&1&0\\ 2&5&7&0&0&1 \end{array}\right) \quad\Rightarrow\quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&3&1&0&0\\ 0&1&0&-1&1&0\\ 0&1&1&-2&0&1 \end{array}\right)$$

Vi legger til $(-1$ ganger den andre raden til den tredje raden:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&3&1&0&0\\ 0&1&0&-1&1&0\\ 0&1&1&-2&0&1 \end{array}\right) \quad\Rightarrow\quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&3&1&0&0\\ 0&1&0&-1&1&0\\ 0&0&1&-1&-1&1 \end{array}\right)$$

Så legger vi til (-3) ganger den siste raden til den første

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&3&1&0&0\\ 0&1&0&-1&1&0\\ 0&0&1&-1&-1&1 \end{array}\right) \quad\Rightarrow\quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&0&4&3&-3\\ 0&1&0&-1&1&0\\ 0&0&1&-1&-1&1 \end{array}\right)$$

og (-2) ganger den andre raden til den første:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&0&4&3&-3\\ 0&1&0&-1&1&0\\ 0&0&1&-1&-1&1 \end{array}\right) \quad\Rightarrow\quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&6&1&-3\\ 0&1&0&-1&1&0\\ 0&0&1&-1&-1&1 \end{array}\right)$$

Vi har nå fått matrisen på formen $(I|A^{-1})$ og derfor er

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6&1&-3\\ -1&1&0\\ -1&-1&1 \end{pmatrix}$$

Bruk samme teknikk til å finne den inverse matrisen til disse matrisene:

$a)$ $\begin{pmatrix} 0&1&0\\ 1&0&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$ $b)$ $\begin{pmatrix} 2&0&0\\ 0&3&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$ $c)$ $\begin{pmatrix} 1&1&1\\ 0&1&1\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$ $d)$ $\begin{pmatrix} 3&1&0\\ 0&1&0\\ 0&0&2 \end{pmatrix}$

3.18. Undersøk om det homogene likningssystemet har ikke-trivielle løsninger:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0\\ 2x_1 - 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

3.19. Finn alle løsninger av det homogene likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Hvor mange frihetsgrader har dette likningssystemet?

3.20. Vi betrakter det homogene likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, der A er gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & s & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

og s er en parameter. For hvilke verdier av s har dette likningssystemet ikke-trivielle løsninger? Finn eventuelt antall frihetsgrader i hvert tilfelle.

3.21. Anta at $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ er en ortonormal mengde med n-vektorer. Vis at vektorene da er lineært uavhengige.

3.3 Løsninger

3.1 Vi har at

$$4A + 2B = \begin{pmatrix} 12 & 24 \\ 30 & 4 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 25 & 12 \\ 15 & 24 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 28 & 12 \\ 14 & 21 \end{pmatrix}, \quad BI = B, \quad IA = A$$

3.2 La

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

Da får vi

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & bw + ay \\ cx + dz & dw + cy \end{pmatrix} \implies (AB)^T = \begin{pmatrix} ax + bz & cx + dz \\ bw + ay & dw + cy \end{pmatrix}$$

og

$$A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} \implies B^T A^T = \begin{pmatrix} ax + bz & cx + dz \\ bw + ay & dw + cy \end{pmatrix}$$

Ved å sammenlikne uttrykkene, ser vi at $(AB)^T = B^T A^T$.

3.3 Vi har

$$\begin{aligned}(a)\quad & AB(BC-CB)+(CA-AB)BC+CA(A-B)C = ABBC-ABCB+CABC \\ & -ABBC+CAAC-CABC = -ABCB+CAAC = -ABCB+CA^2C \\ (b)\quad & (A-B)(C-A)+(C-B)(A-C)+(C-A)^2 = AC-A^2-BC+BA+CA \\ & -C^2-BA+BC+C^2-CA-AC+A^2 = 0\end{aligned}$$

3.4 Uttrykket i posisjon (j,i) i A^T er lik uttrykket i posisjon (i,j) i A. Derfor vil en kvadratisk matrise A oppfylle $A^T = A$ hvis $a_{ij} = a_{ji}$. Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

har denne egenskapen. Betingelsen $a_{ij} = a_{ji}$ uttrykker symmetri om diagonalen i A, så det er rimelig å kalle en matrise med $A^T = A$ symmetrisk.

3.5 Vi regner ut

$$\begin{aligned} D^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ D^3 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ D^n &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.6 Vi regner ut

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 5 & -3 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 + 5x_3 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

Dermed ser vi at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hvis og bare hvis

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -2 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$$

3.7 Vi har at $2A + 3X = I$ gir $3X = I - 2A$, og dermed at

$$X = \frac{1}{3}(I-2A) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1-2\cdot 2 & -2\cdot 3 \\ -2\cdot 0 & 1-2\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.8 Vi skriver systemet på matriseform som

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og på vektorform som

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.9 Vi regner først ut $|A|$ ved å bruke kofaktorutvikling langs første kolonne:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \\ &= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ &= (5 \cdot 8 - 0 \cdot 6) + 0 + (2 \cdot 6 - 5 \cdot 3) \\ &= 40 + 12 - 15 = 37 \end{aligned}$$

Så regner vi ut $|A|$ ved å bruke kofaktorutvikling langs tredje rad:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \\ &= (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ &= (2 \cdot 6 - 5 \cdot 3) + 0 + 8 \cdot (1 \cdot 5 - 0 \cdot 2) \\ &= 12 - 15 + 8 \cdot 5 = 37 \end{aligned}$$

Vi ser at $\det(A) = 37 \neq 0$ ved begge metoder, dermed er A invertibel.

3.10 Vi utvikler langs første kolonne to ganger, og får

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -8 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot (1 \cdot 2) = 12$$

3.11 Vi utvikler langs andre rad og deretter langs andre kolonne, og får

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -6 & 4 & -8 \\ 5 & 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(-1) \begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 & -5 \\ 7 & 3 & 4 & -8 \\ 5 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 5 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Vi regner så ut 3×3-determinanten ved å utvikle langs først kolonne, og får at

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -6 & 4 & -8 \\ 5 & 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6(4(4-3)-5(6-5)) = -6(-1) = 6$$

3.12 Vi regner ut

$$\begin{aligned} |AB| &= |A||B| = 2\cdot(-5) = -10 \\ |-3A| &= (-3)^3|A| = (-27)\cdot 2 = -54 \\ |-2A^T| &= (-2)^3|A^T| = (-8)\cdot|A| = (-8)\cdot 2 = -16 \\ |C| &= -|B| = -(-5) = 5 \end{aligned}$$

3.13 Hvis vi legger til første rad i siste rad for å forenkle determinanten, får vi

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 9 & 3 & 15 \\ -3 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 9 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3.14 For å undersøke om matrisene er invertible, regner vi ut determinantene:

$$a)\quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad b)\quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0, \quad c)\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Dermed er matrisene i b) og c) invertible, og vi har at

$$b)\quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad c)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.15 For å finne kofaktormatrisen, må vi regne ut alle kofaktorene til A:

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40,\ C_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 6,\ C_{13} = (-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -16,\ C_{22} = (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 5,\ C_{23} = (-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3,\ C_{32} = (-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -6,\ C_{33} = (-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5$$

Fra dette finner vi kofaktormatrisen $C = (C_{ij})$ og den adjungerte matrisen C^T til A:

$$C = \begin{pmatrix} 40 & 6 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad C^T = \begin{pmatrix} 40 & 6 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 40 & -16 & -3 \\ 6 & 5 & -6 \\ -5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Vi fant at determinanten $|A| = 37$ of A i oppgave 3.14. Den inverse matrisen er da

$$A^{-1} = \frac{1}{37}\begin{pmatrix} 40 & -16 & -3 \\ 6 & 5 & -6 \\ -5 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{40}{37} & -\frac{16}{37} & -\frac{3}{37} \\ \frac{6}{37} & \frac{5}{37} & -\frac{6}{37} \\ -\frac{5}{37} & \frac{2}{37} & \frac{5}{37} \end{pmatrix}$$

Vi går fram på samme måte for matrisen B, og finner

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siden $|B| = 1$, er B^{-1} gitt ved

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi sjekker at $AA^{-1} = I$ og at $BB^{-1} = I$ ved å multiplisere sammen matrisene, og ser at det stemmer.

3.16 Merk at

$$\begin{pmatrix} 5x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Det betyr at

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 &= 4 \end{aligned}$$

kan skrives om som

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Derfor har vi at

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Siden $|A| = 5(-1) - 2 \cdot 1 = -7 \neq 0$, så er A invertibel og

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix}.$$

Multipliserer vi likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med A^{-1} fra venstre, får vi

$$A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Siden $A^{-1}A = I$ and $I\mathbf{x} = \mathbf{x}$ får vi at $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Løsningen er dermed

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Altså er $x_1 = 1$ og $x_2 = -2$.

3.17 Vi reduserer i hvert tilfelle matrisen $(A|I)$ til en redusert trappeform $(I|A^{-1})$ ved å bruke elementære radoperasjoner. Vi kan deretter lese av A^{-1} fra den reduserte trappeformen. I det første tilfellet får vi

$$a)\ \begin{pmatrix} 0\,1\,0\,1\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,0\,1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,1\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,0\,1 \end{pmatrix}$$

ved å bytte om de to øverste radene. Det betyr at

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0\,1\,0 \\ 1\,0\,0 \\ 0\,0\,1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0\,1\,0 \\ 1\,0\,0 \\ 0\,0\,1 \end{pmatrix}$$

I de andre tilfellene finner vi på tilsvarende måte den inverse matrisen:

$$b)\ A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c)\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d)\ A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3.18 Vi regner ut determinanten til koeffisientmatrisen:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5$$

Siden $|A| \neq 0$, så har det lineære systemet kun løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, og ingen ikke-trivielle løsninger.

3.19 Vi finner den reduserte trappeformen til koeffisientmatrisen til det lineære systemet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Altså er det en frihetsgrad, og vi kan bruke z som fri variabel, siden den tredje kolonnen er den eneste uten pivot. Likningene blir $x - 3z = 0$ og $y + 4z = 0$, så løsningene kan skrives som

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z \\ -4z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Det er uendelig mange løsninger og de ligger langs en rett linje utspent av vektoren $(3, -4, 1)$.

3.20 Vi regner ut determinanten til koeffisientmatrisen ved å utvikle langs andre rad:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & s & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = s \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6s$$

For $s \neq 0$ så er $\det(A) \neq 0$, og systemet har kun den trivielle løsningen. For $s = 0$ har systemet ikke-trivielle løsninger siden $\det(A) = 0$. Vi finner antall frihetsgrader i dette tilfellet ved å finne en trappeform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser at det er en frihetsgrad og at vi kan velge å bruke z som fri variabel når $s = 0$. Det er derfor et en-dimensjonalt rom (en linje) av løsninger i dette tilfellet.

3.21 Siden $n \times n$-matrisen A med vektorene som kolonner, gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$$

er en ortogonal matrise, så er $A^{-1} = A^T$. Det betyr spesielt at $\det(A) \neq 0$, og dermed at likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kun har den trivielle løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, og kolonnevektorene er derfor lineært uavhengige.

Forelesning 4
Egenverdier og egenvektorer

4.1 Kort sammendrag

La A være en kvadratisk $n \times n$ matrise. En *egenverdi* for A er et tall λ slik at likningen

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

har en ikke-trivielle løsninger $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (det vil andre løsninger enn $\mathbf{x} = \mathbf{0}$). Legg merke til at for ethvert tall λ er likningen ovenfor et $n \times n$ homogent lineært system med ukjent n-vektor $\mathbf{x}$, som kan skrives på formen

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Derfor er egenverdiene til A lik løsningene av den *karakteristiske likningen*

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

som er en likning av grad n med ukjent λ. Når A er en 2×2 matrise, så blir den karakteristiske likningen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Karakteristisk likning: } \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Vi kan skrive dette som $\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$, der $\mathrm{tr}(A)$ kalles sporet til A og er definert som summen av elementene på diagonalen i A. Når $n \geq 3$ kan det være vanskelig å løse den karakteristiske likningen siden den har grad minst tre.

Hvis λ er en egenverdi for A, så har det lineære systemet $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ minst en frihetsgrad, og løsningene av dette systemet kalles *egenvektorer* for A med egenverdi λ. Samlingen av disse egenvektorene kalles egenrommet E_λ og er et lineært underrom. For en gitt λ kan vi finne en basis for E_λ ved Gauss-eliminasjon. Antall frihetsgrader kan ikke være større enn multiplisiteten m til egenverdien λ.

Dersom en $n \times n$ matrise A har n egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (der vi tillatter at noen av egenverdiene er like; en egenverdi med multiplisitet m forekommer m ganger i listen), så har vi

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_n, \quad \operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

En symmetrisk $n \times n$ matrise har alltid n egenverdier.

En $n \times n$ matrise A er *diagonaliserbar* om det finnes en invertibel matrise P slik at

$$P^{-1}AP = D$$

er en diagonal matrise. Dette er tilfellet hvis og bare hvis A har n egenverdier og n lineært uavhengige egenvektorer. I så fall er P en matrise med disse egenvektorene som kolonner, og D har egenverdiene på diagonalen. En symmetrisk matrise er alltid diagonaliserbar, og P kan da velges som en ortogonal matrise.

4.2 Oppgaver

4.1. Finn egenverdiene til disse matrisene:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

4.2. Finn egenverdiene til A, og bruk dem til å finne $\det(A)$ og $\operatorname{tr}(A)$ i hvert tilfelle:

$$a)\, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b)\, A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad c)\, A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

4.3. Finn alle egenvektorene til følgende matriser:

$$a) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 17 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.4. Finn alle egenvektorer for disse matrisene:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

4.5. Finn egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & s & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Finn alle egenvektorene til A når $s = 2$. Er A diagonaliserbar for $s = 2$?

4.6. Finn alle egenverdier og egenvektorer til matrisen

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bruk dette til å gi en geometrisk tolkning av lineærtransformasjonen gitt ved multiplikasjon med A.

4.7. En kvadratisk matrise $A = (a_{ij})$ slik at $a_{ij} = 0$ når $i > j$ (altså at den delen av matrisen som er under diagonalen er null) kalles *øvre triangulær*. Hva kan du si om egenverdiene til en øvre triangulær matrise?

4.3 Løsninger

4.1 a) Matrisen har karakteristisk likning $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, og egenverdier

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = 1 \pm 2 = 3, -1$$

b) Matrisen har karakteristisk likning $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, og egenverdier $\lambda = 1$ og $\lambda = 1$ (en dobbelrot).
c) Matrisen har karakteristisk likning $\lambda^2 - 9\lambda + 8 = 0$, og egenverdier

$$\lambda = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{2} = \frac{9 \pm 7}{2} = 8, 1$$

4.2 a) Matrisen har karakteristisk likning $\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$, og egenverdier

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Derfor er

$$\det(A) = \lambda_1\lambda_2 = \frac{9-5}{4} = 1, \quad \mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = 3$$

b) Matrisen har karakteristisk likning $(-1-\lambda)(-2-\lambda)(-1-\lambda) = 0$, og $\lambda_1 = \lambda_3 = -1$ og $\lambda_2 = -2$. Derfor er

$$\det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2, \quad \mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -4$$

c) Matrisen har karakteristisk likning

$$(4-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 14) = 0$$

og egenverdier $\lambda = 4$ og

$$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64-56}}{2} = 4 \pm \sqrt{2}$$

Derfor er

$$\det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 4(16-2) = 56, \quad \operatorname{tr}(A) = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 4+8 = 12$$

4.3 a) Egenverdiene er $\lambda = -1$ og $\lambda = -2$ fra Oppgave 4.2. Egenvektorene for $\lambda = -1$ er gitt ved

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser at x og z er frie variabler, og $y = 0$. Egenvektorene med $\lambda = -1$ er dermed

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Egenvektorene for $\lambda = -2$ er gitt ved

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi ser at y er en fri variabel, og $x = z = 0$. Egenvektorene med $\lambda = -2$ er dermed

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Egenverdiene er $\lambda = 7, 3, 1$ siden matrisen er øvre triangulær, og egenvektorene for $\lambda = 7$ er gitt ved matrisen

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 17 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Vi ser at x er en fri variabel, og at $y = z = 0$. Egenvektorene med $\lambda = 7$ er dermed

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Egenvektorene for $\lambda = 3$ er gitt ved matrisen

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}4&4&-1\\0&0&17\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

Vi ser at y er en fri variabel, og at $x=-y$ og $z=0$. Egenvektorene med $\lambda=3$ er dermed

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}-y\\y\\0\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Egenvektorene for $\lambda=1$ er gitt ved matrisen

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}6&4&-1\\0&2&17\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Vi ser at z er en fri variabel, at $y=-17z/2$ og at $x=35z/6$. Egenvektorene med $\lambda=1$ er dermed

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}35z/6\\-17z/2\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}35/6\\-17/2\\1\end{pmatrix}$$

4.4 Egenverdiene i denne oppgaven har vi regnet ut i Oppgave 4.1. Egenvektorene i a) blir

$$\lambda=3:\ \mathbf{x}=y\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad \lambda=-1:\ \mathbf{x}=y\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

i b) blir det

$$\lambda=1:\ \mathbf{x}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

og i c) blir det

$$\lambda=8:\ \mathbf{x}=y\begin{pmatrix}3/2\\1\end{pmatrix},\quad \lambda=1:\ \mathbf{x}=y\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

Vi har brukt Gauss-eliminasjon for å løse likningen $(A-\lambda I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ i hvert tilfelle.

4.5 Egenverdiene til matrisen er gitt ved karakteristisk likning

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&7&-2\\0&s-\lambda&0\\1&1&4-\lambda\end{vmatrix}=(s-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6)=0$$

som gir $\lambda=s$, $\lambda=2$ og $\lambda=3$. Når $s=2$ er egenverdiene $\lambda=2$ og $\lambda=3$. For $\lambda=2$ er egenvektorene gitt av matrisen

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}-1&7&-2\\0&0&0\\1&1&2\end{pmatrix}$$

Vi ser at z er en fri variable, og at $y = 0$ og $x = -2z$. Dermed er egenvektorene med $\lambda = 2$ gitt ved

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

For $\lambda = 3$ er egenvektorene gitt av matrisen

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi ser at z er en fri variable, og at $y = 0$ og $x = -z$. Dermed er egenvektorene med $\lambda = 3$ gitt ved

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

For $s = 2$ har A tre egenverdier $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ og $\lambda_3 = 3$, men kun to lineært uavhengige egenvektorer. Derfor er A ikke diagonaliserbar.

4.6 Matrisen har karakteristisk likning $\lambda^2 - \lambda = 0$, og egenverdier $\lambda = 1$ og $\lambda = 0$. Egenvektorene er gitt ved

$$\lambda = 1 : \ \mathbf{x} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 0 : \ \mathbf{x} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Det betyr at egenrommet E_1 er linjen $y = -x$, og $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ når $\mathbf{x}$ ligger langs denne linjen. Egenrommet E_0 er linjen $y = x$, og $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ når $\mathbf{x}$ ligger langs denne linjen. Den geometriske tolkningen av T er derfor at det er projeksjon ned på linjen $y = x$.

4.7 Hvis A er øvre triangulær med $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ på diagonalen, så er $A - \lambda I$ øvre triangulær med $a_{11} - \lambda, a_{22} - \lambda, \ldots, a_{nn} - \lambda$ på diagonalen. Siden determinanten til en øvre triangulær matrise er produktet av elementene på diagonalen, så blir den karakteristiske likningen

$$\det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\ldots(a_{nn} - \lambda) = 0$$

Dermed er egenverdiene til A lik elementene tallene $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ på diagonalen til A.

Forelesning 5
Kvadratiske former

5.1 Kort sammendrag

En kvadratisk form i n variable $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ er et polynom som kan skrives som en sum av ledd av grad to. Vi kan ved hjelp av vektorer skrive en kvadratisk form Q som

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\, A\, \mathbf{x}, \quad \text{der } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Matrisen A kan velges til å være en symmetrisk $n \times n$-matrise, og den er da entydig bestemt av den kvadratiske formen.

En kvadratisk form kan klassifiseres etter sin definitthet. Vi sier at den kvadratiske formen Q, og den tilhørende symmetriske matrisen A, er

- *positiv semidefinitt* dersom $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ for alle $\mathbf{x}$
- *negativ semidefinitt* dersom $Q(\mathbf{x}) \leq 0$ for alle $\mathbf{x}$
- *indefinitt* dersom $Q(\mathbf{x})$ kan ta både positive og negative verdier

Den er indefinitt hvis og bare hvis den hverken er positiv eller negativ semidefinitt. Vi kan også snakke om positiv og negativ definitt, som er viktige spesialtilfeller. Vi sier at Q (og A) er

- *positiv definitt* dersom $Q(\mathbf{x}) > 0$ for alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- *negativ definitt* dersom $Q(\mathbf{x}) > 0$ for alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

Det er klart at $Q(\mathbf{0}) = 0$ når Q er en hvilken som helst kvadratisk form.

Teorem 5.1. *La Q være en kvadratisk form med symmetrisk $n \times n$-matrise A, og med n egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Da har vi:*

- *Q er* positiv semidefinitt *hvis og bare hvis $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0$*
- *Q er* negativ semidefinitt *hvis og bare hvis $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \leq 0$*
- *Q er* indefinitt *hvis og bare hvis A har både positive og negative egenverdier*

og at

- Q *er* positiv definitt *hvis og bare hvis* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$
- Q *er* negativ definitt *hvis og bare hvis* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n < 0$

Vi kan forklare dette resultatet på følgende måte: Siden A er symmetrisk, er den (ortogonal) diagonaliserbar. Om vi gjør koordinatskiftet $\mathbf{x} = P\mathbf{u}$, der P er den ortogonale matrisen slik at $P^T AP = D$ er diagonal, kan derfor den kvadratiske formen skrives som

$$Q = \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \cdots + \lambda_n u_n^2$$

i koordinatene u.

Når $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ er en funksjon i n variable, kan vi tenke på punktene $(x_1, \dots, x_n)$ som n-vektorer, og skrive $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\mathbf{x})$. De partielle deriverte til f danner da også en vektor

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x_1 \\ \partial f/\partial x_2 \\ \vdots \\ \partial f/\partial x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_{x_1} \\ f'_{x_2} \\ \vdots \\ f'_{x_n} \end{pmatrix}$$

En annengradsfunksjon kan skrives på formen $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + C$, der A er den symmetriske $n \times n$-matrisen til den kvadratiske formen, B er en $1 \times n$-matrise som gir den lineære formen og C er en konstant. Da er

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 2A\,\mathbf{x} + B^T$$

Annengradsfunksjonen er konveks hvis og bare hvis A er positiv semidefinitt, og konkav hvis og bare hvis A er negativ semidefinitt. I det første tilfellet er alle stasjonære punkter globale minima, og i det andre er alle stasjonære punkter globale maksima.

5.2 Oppgaver

5.1. Skriv ned et uttrykk for funksjonen $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ i hvert tilfelle:

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad c) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

5.2. Finn i hvert tilfelle den symmetriske matrisen A slik at $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$.

1. $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$
2. $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3 - x_3^2$

5.3. Klassifiser de kvadratiske formene som positivt semidefinitt, negativt semidefinitt eller indefinitt:

1. $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 2x_2^2$
2. $Q(\mathbf{x}) = -x_1^2 - 4x_2^2$
3. $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - x_2^2$
4. $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + x_3^2$

5.4. Gjør om den kvadratiske formen $Q(\mathbf{x}) = 4x_1x_2$ til en kvadratisk form i de nye variablene u og v ved å gjøre variabelskiftet $u = x_1 + x_2$ og $v = x_1 - x_2$. Er Q positivt semidefinitt, negativt semidefinitt eller indefinitt?

5.5. Avgjør om den kvadratiske formen $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ er positiv (semi)definitt eller negativ (semi)definitt i hvert tilfelle:

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad c) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

5.6. Klassifiser hver av de kvadratiske formene som positiv (semi)definitt, negativ (semi)definitt eller indefinitt:

1. $Q(x_1, x_2) = x_1x_2$
2. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 + 3x_3^2$
3. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 - x_2^2$

5.7. La A være en symmetrisk 2×2-matrise.

1. Vis at A er positiv definitt hvis og bare hvis $\det(A) > 0$ og $\mathrm{tr}(A) > 0$.
2. Vis at A er indefinitt hvis og bare hvis $\det(A) < 0$.

5.8. La A være en (ikke nødvendigvis kvadratisk) matrise, og la $B = A^T A$. Vis at B er en kvadratisk, symmetrisk og positiv semidefinitt matrise. Vis også at hvis A er en kvadratisk invertibel matrise, så er B positiv definitt.

5.9. Finn $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ når f er funksjonen gitt ved

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2 + x_3^2$$

5.10. Skriv den kvadratiske formen f på matriseform og finn $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ når

1. $f(x_1,x_2) = x_1^2 + 16x_1x_2 + x_2^2$
2. $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_3^2$

5.11. Skriv funksjonen f på formen $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + c$ og finn de stasjonære punktene. Er de stasjonære punktene maksimum- eller minimumspunkter?

1. $f(x_1,x_2) = x_1^2 + 16x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1 + 2x_2 + 3$
2. $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_3^2 - x_1$

5.12. Finn den deriverte av matrisefunksjonene A og B med hensyn til t når

$$A = \begin{pmatrix} t^3 & t^2 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t^2 & t^3 \end{pmatrix}$$

Vis at $(3A+2B)'_t = 3A'_t + 2B'_t$ og at $(AB)'_t = A'_t B + AB'_t$.

5.13. Finn den deriverte av matrisefunksjonene A og A^2 med hensyn til t når

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{t} & 1 \\ 0 & \sqrt{t} \end{pmatrix}$$

5.14. La $f(t) = \mathbf{b}^T A\mathbf{c}$, der

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} (t+1)^2 & t \\ 0 & t \\ t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finn $\frac{\partial f}{\partial t}$ ved hjelp av produktregelen for derivasjon av matriser.

5.15. Vi bruke regnereglene for derivasjon av matrisefunksjoner til å derivere en kvadratisk form $Q = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$.

1. Vis at $\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \mathbf{e}_1^T A\mathbf{x} + (\mathbf{x}^T A)\mathbf{e}_1$, der $\mathbf{e}_1$ er kolonnevektoren som har 1 på første plass og 0 ellers.
2. Vis at $(\mathbf{x}^T A)\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^T A^T \mathbf{x}$ og konkluder at $\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \mathbf{e}_1^T (A+A^T)\mathbf{x}$.
3. Forklar at $\frac{\partial Q}{\partial x_i} = \mathbf{e}_i^T (A+A^T)\mathbf{x}$ der $\mathbf{e}_i$ er kolonnevektoren som har 1 på i'te plass og 0 ellers.
4. Vis at $\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}} := \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x_1} \\ \frac{\partial Q}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial x_n} \end{pmatrix} = (A+A^T)\mathbf{x} = 2A\,\mathbf{x}$

5.16. Vis at den deriverte til en lineær form $L = B\mathbf{x}$ er gitt ved

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = B^T$$

5.17. En symmetrisk 2×2-matrise H kan skrives på formen

$$H = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

Bruk Oppgave 5.7 til å finne hvilke betingelser A,B,C må tilfredsstille for at matrisen H skal være
a) positiv definitt b) negativ definitt c) indefinitt

5.18. Vi ser på den kvadratiske formen $Q(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 17x_3^2$. Finn den symmetriske matrisen A som svarer til denne kvadratiske formen, og en ortogonal diagonalisering av A. Bruk dette til å finne nye variable u_1,u_2,u_3 slik at den kvadratiske formen kan skrives som

$$Q = \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \lambda_3 u_3^2$$

og klassifiser den kvadratiske formen.

5.3 Løsninger

5.1 De kvadratiske formene er
$a)$ $-x^2-2y^2-z^2$ $\quad b)$ $x^2+2xy+2y^2$ $\quad c)$ $3x^2+2xz+4y^2+5z^2$

5.2 De symmetriske matrisene er

$$a) \begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

5.3 Siden de tre første kvadratiske formene kun har kvadratledd, kan vi avgjøre definittheten ved å se på fortegnet til koeffisientene, og finner at de er:
$a)$ positiv definitt $\quad b)$ negativ definitt $\quad c)$ indefinitt
Den siste kvadratiske formen har kryssledd, og vi finner derfor egenverdiene til den symmetriske matrisen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{gir karakteristisk likning} \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dette gir $(1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-4)=0$, og dermed egenverdier $\lambda=1$, $\lambda=4$ og $\lambda=-1$. Dermed finner vi at den er:
$d)$ indefinitt

5.4 Siden $u^2 = x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$ og $v^2 = x_1^2-2x_1x_2+x_2^2$, så er

$$u^2-v^2 = 4x_1x_2 \quad \Rightarrow \quad Q = 4x_1x_2 = u^2-v^2$$

Dermed ser vi at Q er indefinitt.

5.5 Klassifikasjon av de kvadratiske formene:
a) Vi ser direkte at den kvadratiske formen er negativ definitt.
b) Vi finner egenverdiene til den symmetriske matrisen:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-3\lambda+1=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

Dette gir to positive egenverdier siden $\sqrt{5} < 3$, og den kvadratiske formen er postiv definitt.
c) Vi finner egenverdiene til den symmetriske matrisen:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 14) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 4,\ \lambda = \frac{8 \pm \sqrt{8}}{2}$$

Dette gir tre positive egenverdier siden $\sqrt{8} < 8$, og den kvadratiske formen er postiv definitt.

5.6 Klassifikasjon av de kvadratiske formene:
a) Vi finner egenverdiene til den symmetriske matrisen:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1/4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\frac{1}{2}$$

Den kvadratiske formen er derfor indefinitt.
b) Vi finner egenverdiene til den symmetriske matrisen:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - 5) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 3,\ \lambda = \pm\sqrt{5}$$

Den kvadratiske formen er derfor indefinitt.
c) Vi finner egenverdiene til den symmetriske matrisen:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1/2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1/2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(\lambda^2 - 1/4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1,\ \lambda = \pm\frac{1}{2}$$

Den kvadratiske formen er derfor indefinitt.

5.7 En symmetrisk 2×2-matrise A har to egenverdier λ_1, λ_2 slik at $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ og $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$. Dermed har vi:
a) Matrisen er positiv definitt hvis og bare hvis $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, og dette intreffer hvis og bare hvis $\mathrm{tr}(A) > 0$ og $\det(A) > 0$.
b) Matrisen er indefinitt hvis og bare hvis λ_1 og λ_2 har motsatte fortegn, og dette intreffer hvis og bare hvis $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 < 0$.

5.8 La A være en $m \times n$-matrise. Da er A^T en $n \times m$-matrise, og $B = A^T A$ er en $n \times n$-matrise (altså en kvadratisk matrise). Siden

$$B^T = (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A = B$$

så er B også symmetrisk. Den kvadratiske formen med symmetrisk matrise B kan skrives som

$$\mathbf{x}^T B\mathbf{x} = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x}) = (A\mathbf{x})\cdot(A\mathbf{x}) = ||A\mathbf{x}||^2 \geq 0$$

for alle $\mathbf{x}$, og dermed er B også positiv semidefinitt. Matrisen B har egenverdier $\lambda_1,\dots,\lambda_n \geq 0$ siden B er symmetrisk og positiv semidefinitt, og $|B| = \lambda_1\cdot\dots\cdot\lambda_n$. Dermed ser vi at $|B| \neq 0$ betyr at $\lambda_1,\dots,\lambda_n > 0$. Hvis B er invertibel er den derfor positiv definitt.

5.9 Vi har at

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ f_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 1 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

5.10 Vi har at $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ og at $\partial f/\partial\mathbf{x} = 2A\,\mathbf{x}$ i hvert tilfelle. Det gir i a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 16 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

og i b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

5.11 Hver av annengradsfunksjonene kan skrives på formen $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + c$ ved at vi i a) velger

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = 3$$

og i b) velger

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = 0$$

I a) finner vi de stasjonære punktene ved å løse likningen $2A\mathbf{x} = -B^T$:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 2A\mathbf{x} + B^T = \mathbf{0} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 16 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Siden $|A| = 4 - 256 < 0$, så har det lineære systemet en entydig løsning som er et sadelpunkt. Det stasjonære punktet kan vi finne ved hjelp av Gauss eliminasjon, og det er $(x,y) = (-13/126, -22/126)$.
I b) finner vi de stasjonære punktene ved å løse likningen $2A\mathbf{x} = -B^T$:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 2A\mathbf{x} + B^T = \mathbf{0} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi finner egenverdiene til A, som er $\lambda = -1$ og $\lambda = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Dermed er $|A| \neq 0$, og det lineære likningssystemet har en entydig løsning. Dette punktet er et sadelpunkt siden A er indefinitt, og vi kan finne punktet ved Gauss eliminasjon. Vi finner at $(x,y,z) = (0,1/2,0)$.

5.12 Vi har at

$$A'_t = \begin{pmatrix} 3t^2 & 2t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B'_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2t & 3t^2 \end{pmatrix}$$

Vi regner ut $3A+2B$ og AB, og finner at

$$(3A+2B)'_t = \begin{pmatrix} 9t^2 & 6t+2 \\ 3+4t & 6t^2 \end{pmatrix}, \quad (AB)'_t = \begin{pmatrix} 3t^2+4t^3 & 4t^3+5t^4 \\ 1+2t & 2t+3t^2 \end{pmatrix}$$

Dette viser at $(3A+2B)'_t = 3A'_t + 2B'_t$ og at $(AB)'_t = A'_t B + AB'_t$.

5.13 Vi har at

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{t} & 1 \\ 0 & \sqrt{t} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^2 = \begin{pmatrix} t & 2\sqrt{t} \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

Dermed får vi

$$A'_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{t}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{pmatrix}, \quad (A^2)'_t = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{t}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.14 Vi bruker produktregelen $(AB)' = AB' + A'B$ to ganger, og får da at

$$(\mathbf{b}^T A\mathbf{c})' = \mathbf{b}^T (A\mathbf{c}' + A'\mathbf{c})$$

siden $\mathbf{b}$ består av konstanter. Dette gir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} (t+1)^2 & t \\ 0 & t \\ t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2(t+1) & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Dermed er

$$(\mathbf{b}^T A\mathbf{c})' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (t+1)^2 + 2t(t+1) \\ 0 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} = 3t^2 + 4t + 1 + 6t = 3t^2 + 10t + 1$$

5.15 Vi kan skrive Q som en sum

$$Q = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$$

og da følger det at

$$\frac{\partial Q}{\partial x_p} = \sum_{p,j} a_{pj}x_j + \sum_{i,p} a_{ip}x_i = \mathbf{e}_p^T A\mathbf{x} + \mathbf{x}^T A\mathbf{e}_p$$

for $p = 1, 2, \ldots, n$. Bytter vi ut symbolet p med i får vi formelen

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i} = \mathbf{e}_i^T A\mathbf{x} + \mathbf{x}^T A\mathbf{e}_i$$

Legg merke til at $\mathbf{x}^T A\mathbf{e}_i$ er en 1×1-matrise, og den er derfor symmetrisk. Det betyr at

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{e}_i = (\mathbf{x}^T A\mathbf{e}_i)^T = \mathbf{e}_i^T A^T \mathbf{x}$$

Dermed er $\partial Q/\partial x_i = \mathbf{e}_i^T (A + A^T)\mathbf{x}$ for $i = 1, 2, \ldots, n$. Siden vi har

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \partial Q/\partial x_1 \\ \partial Q/\partial x_2 \\ \vdots \\ \partial Q/\partial x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T (A + A^T)\mathbf{x} \\ \mathbf{e}_2^T (A + A^T)\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n^T (A + A^T)\mathbf{x} \end{pmatrix}$$

så betyr det at $\partial Q/\partial \mathbf{x} = (A + A^T)\mathbf{x} = 2A\mathbf{x}$.

5.16 Hvis $L = B\mathbf{x}$ er en lineær form definert av matrisen

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix}$$

så er $L = b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n$, og har derivert

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = B^T$$

5.17 Siden $\mathrm{tr}(H) = A + C$ og $\det(H) = AC - B^2$, så har vi:
a) H er *positiv definitt* hvis og bare hvis $AC - B^2 > 0$ og $A > 0$
b) H er *negativ definitt* hvis og bare hvis $AC - B^2 > 0$ og $A < 0$
c) H er *indefinitt* hvis og bare hvis $AC - B^2 < 0$
Merk at hvis $AC - B^2 > 0$, så er $AC > 0$, og det betyr at A og C har samme fortegn. Vi kjenner igjen disse formlene fra klassifikasjonen av stasjonære punkter i tilfellet med funksjoner i to variable.

5.18 Den kvadratiske formen har symmetrisk matrise A med egenverdier gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 17 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 17-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dette gir $(3-\lambda)(\lambda^2 - 19\lambda + 18) = 0$, med løsninger $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ og $\lambda_3 = 18$. Vi finner egenvektorene til A. For $\lambda = 3$ får vi

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}-1&0&4\\0&0&0\\4&0&14\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{x}=\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

For $\lambda=1$ får vi

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&2&0\\4&0&16\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{x}=\begin{pmatrix}-4z\\0\\z\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{v}_2=\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix}$$

For $\lambda=18$ får vi

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}-16&0&4\\0&-15&0\\4&0&-1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{x}=\begin{pmatrix}z/4\\0\\z\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{v}_3=\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$$

Ved å velge egenvektorene slik vi har gjort ovenfor, blir $\mathscr{B}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ en ortonormal basis av egenvektorer. Vi setter $\mathbf{x}=P\mathbf{u}$, eller $\mathbf{u}=P^T\mathbf{x}$, der P er matrisen med vektorene i $\mathscr{B}$ som kolonner:

$$P=\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}0&-4&1\\\sqrt{17}&0&0\\0&1&4\end{pmatrix}$$

Da er den kvadratiske formen gitt ved $Q=3u_1^2+u_2^2+18u_3^2$, med

$$\begin{aligned}u_1&=x_2\\u_2&=\frac{x_3-4x_1}{\sqrt{17}}\\u_3&=\frac{4x_3+x_1}{\sqrt{17}}\end{aligned}$$

Den kvadratiske formen er positiv definitt.

Forelesning 6
Lineær regresjon og sannsynlighetsteori

6.1 Kort sammendrag

Lineær regresjon. Gitt et datasett med N observasjoner av variabelen y som skal forklares og av de n forklaringsvariable $x_1, x_2, \dots, x_n$, så ønsker vi å finne den lineære likningen

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n$$

som gir beste tilnærming til dataene i datasettet. Vi kan sjelden finne en tilnærming uten feil, og må derfor istedet å gjøre feilen ε gitt ved

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n + \varepsilon$$

minst mulig. Vi antar at datasettet er gitt ved følgende tabell (der hver linje svarer til en observasjon):

	x_1	x_2	$\dots$	x_n	y
1	x_{11}	x_{21}	$\dots$	x_{n1}	y_1
2	x_{12}	x_{22}	$\dots$	x_{n2}	y_2
3	x_{13}	x_{23}	$\dots$	x_{n3}	y_3
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
N	x_{1N}	x_{2N}	$\dots$	x_{nN}	y_N

Vi får det lineært likningssystem $\mathbf{y} = X\beta + \varepsilon$ der

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & x_{1N} & x_{2N} & \dots & x_{nN} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{pmatrix}$$

Vi sier at feilen er minst mulig når $||\varepsilon||^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_N^2$ er minst mulig, og metoden kalles derfor *minste kvadraters metode*. Problemet har en entydig løsning

$$\beta = (X^T X)^{-1} \cdot X^T \mathbf{y}$$

når kolonnene i X er lineært uavhengige.

Sannsynlighetsteori. Et *stokastisk forsøk* er en prosess med en gitt mengde mulige utfall, men der det faktiske utfallet av prosessen er stokastisk (tilfeldig), og dermed ikke er kjent. *Utfallsrommet* kalles Ω og er samlingen av mulige utfall. Om utfallsrommet er endelig, kan vi skrive det

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$$

der ω_i er de mulige utfallene. Utfallsrommet kan også være uendelig diskret (som for eksempel de naturlige tallene $\{1,2,3,\dots,\}$) eller kontinuerlig (som for eksempel et intervall $[1,3]$).

En *hendelse* eller *begivenhet* er en samling av mulig utfall (eller en delmengde av utfallsrommet), som for eksempel $E = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}$. Hver hendelse kan tilordnes en *sannsynlighet* $p(E)$ som tilfredsstiller følgende krav:

1. $0 \leq p(E) \leq 1$ for alle hendelser E
2. $p(E_1 \cup E_2 \cup \dots) = p(E_1) + p(E_2) + \dots$ når $E_i \cap E_j = \emptyset$ for $i \neq j$
3. $p(\Omega) = 1$

Fra dette følger det for eksempel at

1. $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$
2. $p(E^c) = 1 - p(E)$
3. $p(E) = p(\omega_1) + p(\omega_2) + \dots + p(\omega_i)$ når $E = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i\}$

To hendelser E,F sies å være uavhengige om $p(E \cap F) = p(E) \cdot p(F)$. Sannsynligheten for E gitt at F har inntruffet skrives $p(E|F)$, og er gitt ved

$$p(E|F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)}$$

Ifølge Bayes' lov er

$$p(F|E) = \frac{p(E|F) \cdot p(F)}{p(E|F) \cdot p(F) + p(E|F^c) \cdot p(F^c)}$$

6.2 Oppgaver

6.1. Estimer β_0,β_1 i den lineære regresjonsmodellen $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$ ut fra de to observasjonene

$$(x_1,y_1) = (0,1)$$
$$(x_2,y_2) = (1,0)$$

Kan du komme frem til svaret på en annen måte?

6.2. Estimer β_0,β_1 og β_2 i den lineære regresjonsmodellen $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \varepsilon$ ut fra de tre observasjonene

$$\begin{aligned} y_1 &= 2, \quad (x_{11}, x_{12}) = (1,1) \\ y_2 &= 0, \quad (x_{21}, x_{22}) = (1,0) \\ y_3 &= 1, \quad (x_{31}, x_{32}) = (0,0) \end{aligned}$$

og beregn feilleddene e_1, e_2 og e_3.

6.3. Estimer β_0,β_1 i den lineære regresjonsmodellen $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$ ut fra de tre observasjonene

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= (0,1) \\ (x_2, y_2) &= (1,0) \\ (x_3, y_3) &= (1,1) \end{aligned}$$

og beregn feilleddene e_1, e_2 og e_3.

6.4. Estimer $\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3$ i den lineære regresjonsmodellen $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon$ ut fra observasjonene

$$\begin{aligned} (x_{11}, x_{12}, x_{13}, y_1) &= (13,3,-1,7) \\ (x_{21}, x_{22}, x_{23}, y_2) &= (10,14,3,8) \\ (x_{31}, x_{32}, x_{33}, y_3) &= (2,1,5,9) \\ (x_{41}, x_{42}, x_{43}, y_4) &= (1,4,1,3) \\ (x_{51}, x_{52}, x_{53}, y_5) &= (4,11,3,4) \\ (x_{61}, x_{62}, x_{63}, y_6) &= (0,0,0,4) \end{aligned}$$

(Hint: Du kan for eksempel bruke Wolfram Alpha til å regne med matriser).

6.5. Anta at E og F er to hendelser med $p(E) = 0.3$ og $p(F) = 0.5$. Hva er største og minste mulige verdi for $p(E \cap F)$ og $p(E \cup F)$?

6.6. Oppgaver fra Stirzaker [S]:
2.3.1, 2.5.4, 2.5.5, 2.6.5, 2.9.2, 2.9.3, 2.13.1

6.7. Eksamen i ELE 3719 fra 13/06/2013, Oppgave 1b
Vi skal gjøre en lineær regresjon med modell $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$ basert på de fire datapunktene

$$(y, x_1, x_2) = (2,0,0),\ (1,1,0),\ (3,0,-1),\ (4,1,1)$$

Finn beste tilpasning $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$.

6.8. Eksamen i ELE 3719 fra 27/11/2013, Oppgave 1b
Vi skal gjøre en lineær regresjon med modell $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$ basert på de fire datapunktene

$$(y, x_1, x_2) = (1,0,0),\ (2,1,0),\ (-1,0,-1),\ (8,1,1)$$

Finn beste tilpasning $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$.

6.9. Eksamen i ELE 3719 fra 10/06/2014, Oppgave 7
Estimer α og β i regresjonsmodellen $y = \alpha + \beta x + \varepsilon$ og forklar hvorfor disse verdiene er optimale når

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 5 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad (X^T X)^{-1} = \frac{1}{89} \begin{pmatrix} 119 & -25 \\ -25 & 6 \end{pmatrix}$$

6.3 Løsninger

6.1 Med utgangspunkt i de to datapunktene definerer vi X og $\mathbf{y}$ ved

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi regner ut $X^T X$ og $X^T \mathbf{y}$, og finner at

$$X^T X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X^T \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser at $\det(X^T X) = 1 \neq 0$, så beste tilpasning er gitt ved

$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = (X^T X)^{-1}(X^T \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Altså er den beste tilpasningen $y = 1 - x$. Det er likningen for den rette linjen gjennom de to punktene.

6.2 Med utgangspunkt i de tre datapunktene definerer vi X og $\mathbf{y}$ ved

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi regner ut $X^T X$ og $X^T \mathbf{y}$, og finner at

$$X^T X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X^T \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vi ser at $\det(X^T X) = 1 \neq 0$, så beste tilpasning er gitt ved

$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = (X^T X)^{-1}(X^T \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Altså er den beste tilpasningen $y = 1 - x_1 + 2x_2$. Siden de tre punktene tilfredsstiller denne likningen, så er feilleddene $e_1 = e_2 = e_3 = 0$.

6.3 Med utgangspunkt i de tre datapunktene definerer vi X og $\mathbf{y}$ ved

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi regner ut $X^T X$ og $X^T \mathbf{y}$, og finner at

$$X^T X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad X^T \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi ser at $\det(X^T X) = 2 \neq 0$, så beste tilpasning er gitt ved

$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = (X^T X)^{-1}(X^T \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Altså er den beste tilpasningen $y = 1 - x/2$. Det gir feilleddene

$$\varepsilon = \mathbf{y} - X\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

6.4 Med utgangspunkt i de tre datapunktene definerer vi X og $\mathbf{y}$ ved

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 13 & 3 & -1 \\ 1 & 10 & 14 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 11 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vi bruker kalkulator/Excel/Wolfram Alpha til regningene, og ser at $\det(X^T X) \neq 0$. Beste tilpasning er gitt ved

$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = (X^T X)^{-1}(X^T \mathbf{y}) \approx \begin{pmatrix} 3.11 \\ 0.48 \\ -0.29 \\ 1.04 \end{pmatrix}$$

Altså er den beste tilpasningen $y \approx 3.11 + 0.48x_1 - 0.29x_2 + 1.04x_3$.

6.5 Vi har at $p(E \cup F) = p(E) + p(F) - p(E \cap F)$, og dermed er

$$p(E \cup F) = 0.8 - p(E \cap F)$$

Den største verdien for $p(E \cup F)$ er derfor 0.8. Den inntreffer hvis og bare hvis $p(E \cap F) = 0$, som er den minste verdien for $p(E \cap F)$. Den minste verdien for $p(E \cup F) = 0.5$, og den inntreffer hvis og bare hvis $p(E \cap F) = 0.3$, som er den største verdien for $p(E \cap F)$.

6.6 Oppgaver fra Stirzaker [S]:
Se løsning av 2.3.1, 2.5.4, 2.5.5, 2.6.5, 2.9.2, 2.9.3 på s. 336. For 2.13.1, se Monty Hall problemet på s. 84.

6.7 Eksamen i ELE 3719 fra 13/06/2013, Oppgave 1b
Med utgangspunkt i de tre datapunktene definerer vi X og $\mathbf{y}$ ved

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vi regner ut $X^T X$ og $X^T \mathbf{y}$, og finner at

$$X^T X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X^T \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi ser at $\det(X^T X) = 4 \neq 0$, så beste tilpasning er gitt ved

$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = (X^T X)^{-1}(X^T \mathbf{y}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -4 & 8 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Altså er den beste tilpasningen $y = 3 - x_1 + x_2$.

6.8 Eksamen i ELE 3719 fra 27/11/2013, Oppgave 1b
Med utgangspunkt i de tre datapunktene definerer vi X og $\mathbf{y}$ ved

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Vi regner ut $X^T X$ og $X^T \mathbf{y}$, og finner at

$$X^T X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X^T \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Vi ser at $\det(X^T X) = 4 \neq 0$, så beste tilpasning er gitt ved

$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = (X^T X)^{-1}(X^T \mathbf{y}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -4 & 8 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Altså er den beste tilpasningen $y = 2 + x_1 + 4x_2$.

6.9 Eksamen i ELE 3719 fra 10/06/2014, Oppgave 7

Vi har at $\varepsilon = \mathbf{y} - X\mathbf{u}$ med $\mathbf{u} = (\alpha, \beta)$ og dette gir at

$$||\varepsilon||^2 = (\mathbf{y} - X\mathbf{u})^T(\mathbf{y} - X\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T(X^T X)\mathbf{u} - 2\mathbf{y}^T \mathbf{X}\mathbf{u} + \mathbf{y}\mathbf{y}^T$$

er en kvadratisk funksjon. Siden $X^T X$ er positiv definitt, har den et minimum gitt ved

$$2(X^T X)\mathbf{u} - 2X^T \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = (X^T X)^{-1} \cdot X^T \mathbf{y}$$

Vi regner ut

$$X^T \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 4 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 156 \end{pmatrix}$$

og derfor er beste tilpasning gitt ved

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (X^T X)^{-1}(X^T \mathbf{y}) = \frac{1}{89} \begin{pmatrix} 119 & -25 \\ -25 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 31 \\ 156 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -211/89 \\ 161/89 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2.37 \\ 1.81 \end{pmatrix}$$

Altså er den beste tilpasningen $y \approx -2.37 + 1.81x$.

Forelesning 7
Stokastiske variable

7.1 Kort sammendrag

Stokastiske variable. Dersom verdien av en variabel X avhenger av utfallet av et stokastisk forsøk, kalles X en *stokastisk variabel*. Vi skriver de mulige verdiene av X som $X(\omega_1), X(\omega_2), \ldots, X(\omega_k)$ om $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}$ er utfallsrommet til det stokastisk forsøket.

En stokastisk variabel kalles *diskret* om utfallsrommet er diskret, og *kontinuerlig* om utfallsrommet er kontinuerlig. Vi ser i første omgang kun på diskrete stokastiske variable, men kommer tilbake til kontinuerlige variable i Forelesning 9.

Sannsynligheten $p(X = n)$ er sannsynligheten til en begivenhet, nemlig begivenheten $\{\omega : X(\omega) = n\}$ som består av alle utfall ω med $X(\omega) = n$. Den kalles en *punktsannsynlighet*, og vi skriver ofte $p(n)$ for $p(X = n)$. Den akkumulerte sannsynligheten

$$F(n) = p(X \leq n) = \sum_{i \leq n} p(X = i)$$

definerer den *kumulative fordelingsfunksjonen* F til X. Dette er en funksjon som tilfredsstiller kravene

1. F er monotont voksende funksjon
2. Grenseverdiene til F er gitt ved

$$\lim_{n \to -\infty} F(n) = 0 \quad \text{og} \quad \lim_{n \to \infty} F(n) = 1$$

Forventningsverdien $E(X)$ til en stokastisk variabel X er et vektet gjennomsnitt av verdiene til X med sannsynlighetene som vekter. Den er gitt ved

$$E(X) = \sum_x x \cdot p(x)$$

der vi summerer over de mulige verdiene x av X. Om $h(X)$ er en funksjon av X, definerer vi forventningsverdien til $h(X)$ som

$$E(h(X)) = \sum_x h(x) \cdot p(x)$$

Variansen til en stokastisk variabel X med forventingsverdi $\mu = E(X)$ er definert til å være

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

Forventning og varians har egenskapene at

1. $E(aX+b) = aE(X)+b$
2. $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$
3. $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$

når a,b er konstanter og X er en stokastisk variabel.

Uniform fordeling. Når X er en stokastisk variabel med mulige verdier $1,2,\ldots,n$ og alle verdier er like sannsynlige, kalles X en *uniformt fordelt* variabel med parametet n. Vi har da $p(x) = 1/n$ for $x = 1,2,\ldots,n$ og

$$E(X) = \frac{n+1}{2}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(n+1)(n-1)}{12}$$

Binomisk fordeling. Når vi gjentar n uavhengige forsøk, der sannsynligheten for suksess er p i hvert forsøk, kalles antall suksesser X en *binomisk fordelt* variabel med parametre (n,p). Vi har da

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{1-x}$$

og

$$E(X) = np, \quad \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

Geometrisk fordeling. Når vi gjentar uavhengige forsøk, der sannsynligheten for suksess er p i hvert forsøk, kalles antall gjentagelser X inntil først suksess en *geometrisk fordelt* variabel med parameter $p > 0$. Vi har da $p(x) = p(1-p)^{x-1}$ og

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Poisson fordeling. Når vi ser på hendelser som forekommer uavhengig av hverandre, med forventet antall forekomster per tidsintervall er $\lambda > 0$, så kalles antall forekomster X per tidsintervall en *Poisson fordelt* stokastisk variabel med parameter λ. Vi har da

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

og

$$E(X) = \mathrm{Var}(X) = \lambda$$

7.2 Oppgaver

7.1. Oppgaver fra Stirzaker [S]:
4.2.1, 4.2.2, 4.8.1, 4.8,2, 4.16.1, 4.16.2, 5.2.3, 5.2.4, 5.3.3

7.2. Prøve-eksamen i ELE 3719 fra 05/2011, Oppgave 5
Aksjen Statoil omsettes nå for kr 151.10 på Oslo Børs. Vi ønsker å vurdere kursutviklingen de neste 5 handelsdagene og benytter følgende enkle sannsynlighetsmodell: Vi antar at i løpet av en handelsdag vil prisen enten gå opp med en faktor $u > 1$ eller ned med en faktor $d < 1$. Vi antar videre at sannsynligheten for en bevegelse opp en gitt handelsdag er p og for en bevegelse ned er $1 - p$, og til slutt at bevegelsene de ulike handelsdagene er uavhengige av hverandre. Basert på historiske data fra de siste 100 handelsdagene, går vi ut i fra at $u = 1.012$, $d = 1/u \simeq 0.988$ og at $p = 0.53$. En modell av denne typen kalles en *binomisk modell*.

1. La X være antall handelsdager med prisbevegelse opp blant de neste 5 handelsdagene. Hvilken fordeling har den stokastiske variabelen X? Regn ut $P(X = 3)$ og $P(X \geq 3)$.
2. Finn $E[X]$ og $\text{Var}[X]$.
3. La Y være prisen på aksjen Statoil etter 5 handelsdager. Uttrykk Y ved hjelp av X, og finn $E[Y]$ og $\text{Var}[Y]$.
4. La Z være den minste sluttkursen i løpet av de 5 handelsdagene. Regn ut $P(Z < 146)$.

7.3. Eksamen i ELE 3719 fra 10/06/2014, Oppgave 5
Et firma selger en bestemt type TV-apparat med 3 års garanti. Det er kjent at det vil oppstå minst en feil på 1% av TV-apparatene i løpet av garantiperioden. Firmaet selger et parti med 200 TV-apparater. La X være antall TV-apparater i partiet der det oppstår minst en feil i løpet av garantiperioden.

1. Hva er sannsynligheten det oppstår minst en feil i løpet av garantiperioden på akkurat 3 av TV-apparatene når du antar at X er i) binomisk fordelt ii) Poissonfordelt?
2. Anta at X er Poissonfordelt. Hva er sannsynligheten for at det oppstår minst en feil på færre enn 3 TV-apparater i løpet av garantiperioden?

7.3 Løsninger

8.1 Oppgaver fra Stirzaker [S]:
Se løsning av 4.2.1, 4.2.2, 4.8.1, 4.8,2, 4.16.1, 4.16.2, 5.2.3, 5.2.4, 5.3.3 på s. 336.

7.2 Prøve-eksamen i ELE 3719 fra 05/2011, Oppgave 5

1. X er **binomisk fordelt** med parametre $n = 5$ og $p = 0.53$. Vi har at $P(X = 3) \simeq \mathbf{0.329}$ og $P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \simeq \mathbf{0.556}$.

2. Vi har $E[X] = np = \mathbf{2.65}$ og $\text{Var}[X] = np(1-p) \simeq \mathbf{1.246}$.
3. Vi uttrykker Y ved hjelp av X som

$$Y = 151.10 \cdot u^X d^{n-X} = 151.10 \cdot u^{2X-n} = \mathbf{151.10 \cdot 1.012^{2X-5}}$$

Vi regner ut $E[Y]$ som tilnærmingsverdi:

$$E[Y] = \sum_{i=0}^{5} P(X=i) \cdot 151.10 \cdot 1.012^{2i-5} \simeq \mathbf{151.70}$$

For å finne $\text{Var}[Y]$, regner vi også ut det andre momentet til Y som tilnærmingsverdi:

$$E[Y^2] = \sum_{i=0}^{5} P(X=i) \cdot \left(151.10 \cdot 1.012^{2i-5}\right)^2 \simeq 23028.00$$

Dermed er $\text{Var}[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 \simeq \mathbf{16.30}$.

4. Verdien av Z avhenger ikke kun av X, antall bevegelser opp, men også rekkefølgen de kommer i. Vi må derfor tenke oss et stokastisk forsøk der utfallsrommet er alle sekvenser ω av synmbolene u og d av lengde fem, med utfallsrom $S = \{\text{ddddd}, \text{ddddu}, \text{dddud}, \text{ddduu}, \dots, \text{uuuuu}\}$. Tabellen viser verdien av Z for de

$\omega = \text{ddddd}$	$Z = 151.10 \cdot 1.012^{-5} \simeq 142.35$
$\omega = \text{ddddu}$	$Z = 151.10 \cdot 1.012^{-4} \simeq 144.06$
$\omega = \text{dddud}$	$Z = 151.10 \cdot 1.012^{-3} \simeq 145.79$
$\omega = \text{ddduu}$	$Z = 151.10 \cdot 1.012^{-3} \simeq 145.79$
$\omega = \text{ddudd}$	$Z = 151.10 \cdot 1.012^{-3} \simeq 145.79$
$\omega = \text{duddd}$	$Z = 151.10 \cdot 1.012^{-3} \simeq 145.79$
$\omega = \text{udddd}$	$Z = 151.10 \cdot 1.012^{-3} \simeq 145.79$

ulike utfallene, og vi har kun tatt med de 7 utfallene som gir $Z < 146$ (det er $2^5 = 32$ utfall i alt). Vi får dermed

$$P(Z < 146) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \cdot \frac{1}{10} \simeq \mathbf{0.181}$$

siden alle utfallene som gir $X = 0$ og $X = 1$ er med i listen ovenfor, mens ett av de ti utfallene som gir $X = 2$ er med. Hint: Det kan være litt enklere å se hvilke verdier av Z de ulike utfallene gir hvis vi tegner opp et binomisk tre for de ulike utfallene.

7.3 Eksamen i ELE 3719 fra 10/06/2014, Oppgave 5

1. Når X er binomisk fordelt med $n = 200,\ p = 0.01$ har vi at

$$P(X=3) = \binom{200}{3} 0.01^3 0.99^{197} \approx 0.1814$$

Når X er Poissonfodelt med $\lambda = np = 2$, så har vi at

$$P(X = 3) = \frac{2^3}{3!} e^{-3} \approx 0.1804$$

2. Når X er Poissonfordelt, så har vi at

$$\begin{aligned} P(X < 3) &= P(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) \\ &= \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} \right) e^{-2} = 5e^{-2} \approx 0.6767 \end{aligned}$$

Forelesning 8
Kontinuerlige stokastiske variable

8.1 Kort sammendrag

Kontinuerlige stokastiske variable. En stokastisk variabel X med en kontinuerlig mengde av mulige verdier kalles en *kontinuerlig* stokastisk variabel. Dersom X er kontinuerlig, finnes det en kontinuerlig funksjon $f_X = f$ slik at

$$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Denne funksjonen kalles *sannsynlighetstettheten* til X. Den *kumulative fordelingsfunksjonen* $F_X = F$ til X er

$$F(b) = p(X \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$$

Dette er en funksjon som tilfredsstiller kravene

1. $F(x) \geq 0$ for alle x
2. Grenseverdiene til F er gitt ved

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \quad \text{og} \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$$

Forventningsverdien $E(X)$ til en stokastisk variabel X er gitt ved

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

der vi integrerer over de mulige verdiene x av X. Om $h(X)$ er en kontinuerlig funksjon av X, definerer vi forventningsverdien til $h(X)$ som

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot f(x)\,dx$$

Variansen til en stokastisk variabel X med forventingsverdi $\mu = E(X)$ er definert til å være

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

Forventning og varians har egenskapene at

1. $E(aX+b) = aE(X)+b$
2. $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$
3. $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$

når a,b er konstanter og X er en stokastisk variabel.

Uniform fordeling. Når X er en stokastisk variabel med mulige verdier $I = [a,b]$ og alle verdier er like sannsynlige, kalles X en *uniformt fordelt* variabel med parameter I. Vi har da $f(x) = 1/(b-a)$ for $x \in I$ og

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a))^2}{12}$$

Eksponentialfordeling. Når X er en stokastisk variabel med mulige verdier $X \geq 0$ og med sannsynlighetstetthet $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, kalles X en *eksponentialfordelt* variabel med parameter λ. Vi har da

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Normalfordeling. Når X er en stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet $f(x)$ gitt ved parametrene μ og $\sigma \geq 0$ ved

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

kalles X en *normalfordelt* variabel med parametre μ,σ. Vi har da

$$E(X) = \mu, \quad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

Chebyshev's ulikhet. Når X er en vilkårlig stokastisk variabel med $E(X) = \mu$ og $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$, så har vi at

$$p\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| > k\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

for ethvert positivt tall k.

8.2 Oppgaver

8.1. Oppgaver fra Stirzaker [S]:
5.4.1 - 5.4.3, 5.5.1, 5.5.4, 5.6.1, 5.12.5, 5.12.6, 5.12.26

8.2. En kontinuerlig stokastisk variabel X har sannsynlighetstetthet gitt ved

$$f(x) = k(e^{-x} + e^{-2x}) \quad \text{for } x \geq 0$$

for en positiv konstant k. Det er underforstått at $f(x) = 0$ for $x < 0$.

1. Finn k og fordelingsfunksjonen $F(x)$.
2. Regn ut $E(X)$ og $\mathrm{Var}(X)$.
3. Finn $p(X > 1)$.

8.3. En stokastisk variabel X har forventningsverdi μ og varians σ^2 (med $\sigma \geq 0$). Vi definerer den stokastiske variabelen Z ved

$$Z = \frac{1}{\sigma}(X - \mu)$$

1. Finn $E(Z)$ og $\mathrm{Var}(Z)$.
2. Vis at hvis X er normalfordelt, så er også Z normalfordelt.
3. Bruk Chebyshev's ulikhet til å estimere $p(Z > 2)$. Hva er $p(Z > 2)$ om Z er normalfodelt?

8.3 Løsninger

8.1 Oppgaver fra Stirzaker [S]:
Se løsning av på s. 336.

8.2

1. Siden $f(x) \geq 0$ for alle x, er f en tetthet om k oppfyller kravet $\int f(x)\,dx = 1$. Vi regner ut integralet:

$$\int_0^\infty k(e^{-x} + e^{-2x})\,dx = k\left[-e^{-x} - e^{-2x}/2\right]_0^\infty = k(1 + 1/2) = 3k/2$$

Det betyr at f er en tetthet når $k = 2/3$. Vi finner den kumulative fordelingsfunksjonen F:

$$F(b) = \int_0^b \frac{2}{3}(e^{-x} + e^{-2x})\,dx = \frac{2}{3}\left[-e^{-x} - e^{-2x}/2\right]_0^b = 1 - \frac{2e^{-b}}{3} - \frac{e^{-2b}}{3}$$

2. Vi regner ut $E(X) = \int x f(x)\,dx$. Vi kan forenkle regningen ved å bruke at $\int xe^{-x}\,dx = 1$ og $\int 2xe^{-2x}\,dx = 1/2$ siden $E(X) = 1/\lambda$ når X er eksponentialfordelt med parameter λ. Dette gir

$$E(X) = \int_0^\infty x \cdot \frac{2}{3}(e^{-x} + e^{-2x})\,dx = \frac{1}{3}\left(2 \cdot xe^{-x} + 2xe^{-2x}\right)\,dx = \frac{1}{3}\left(2 \cdot 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}$$

Vi bruker at $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$. For en eksponentialfordelt variabel X med parameter λ er $E(X) = 1/\lambda$ og $\mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2$, så $E(X^2) = 2/\lambda^2$. Vi bruker dette til å regne ut

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \cdot \frac{2}{3}(e^{-x} + e^{-2x})\,dx = \frac{1}{3}\left(2 \cdot \frac{2}{1} + \frac{2}{4}\right) = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Dette gir $\mathrm{Var}(X) = 3/2 - (5/6)^2 = 54/36 - 25/36 = 29/36$. Alternativt kunne vi selvsagt ha regnet ut de to integralene ovenfor ved å bruke delvis integrasjon (i det siste tilfellet to ganger).

3. Vi har at $p(X > 1) = 1 - p(X \le 1) = 1 - F(1) = 2e^{-1}/3 + e^{-2}/3$.

8.3

1. Ved å bruker formlene for $E(aX + b)$ og $\mathrm{Var}(aX + b)$ får vi at $E(Z) = 0$ og $\mathrm{Var}(Z) = 1$.
2. Vi har at $F_Z(b) = p(Z \le b) = p(X \le \mu + b\sigma)$, og siden X er normalfordelt er det siste uttrykket gitt ved integralet

$$\int_{-\infty}^{\mu+b\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx$$

Gjør vi variabelskiftet $z = (x-\mu)/\sigma$ med $dz = dx/\sigma$, blir dette integralet, og derfor $F_Z(b)$, lik

$$F_Z(b) = \int_{-\infty}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-z^2/2}\,dz$$

Dette betyr at tetthetsfunksjonen til Z er funksjonen $f_Z(z)$ under integralet, og vi ser at dette er tettheten til en standard normfordelt variabel Z med $\mu = 0$ og $\sigma = 1$.

3. Ved Chebyshev's ulikhet er $p(Z > 2) \le p(|Z| > 2) \le 1/2^2 = 1/4$. Om Z er normalfordelt, så er $p(Z > 2) = 1 - p(Z \le 2) \approx 1 - 0.9773 = 0.0227$.

Forelesning 9
Simultant fordelte stokastiske variable

9.1 Kort sammendrag

Simultant fordelte diskrete variabler. La $X = X(\omega)$ og $Y = Y(\omega)$ være diskrete stokastiske variabler som avhenger av utfall ω i det samme utfallsrommet Ω, og la x og y være mulige verdier av disse stokastiske variablene. Den *simultane fordelingsfunksjonen* til X og Y er gitt ved

$$F(a,b) = F_{X,Y}(a,b) = p(X \leq a, Y \leq b) = \sum_{x \leq a, y \leq b} p(x,y)$$

hvor $p(x,y)$ er den simultane punktsannsynligheten for at $X = x$ og $Y = y$, som skrives

$$p(x,y) = p(X = x, Y = y)$$

Den simultane punktsannsynligheten $p(x,y)$ tilfredsstiller kravene

1. $p(x,y) \geq 0$ for alle x,y
2. $\sum_{x,y} p(x,y) = 1$

Vi kan finne den *marginale* punktsannsynligheten for hver av de to variablene ved

$$p(x) = \sum_{y} p(x,y), \quad p(y) = \sum_{x} p(x,y)$$

De to variablene er *uavhengige* om $p(x,y) = p(x) \cdot p(y)$ for alle verdier x,y.

Vi kan finne forventningsverdien $E[h(X,Y)]$ for en vilkårlig funksjon $h(X,Y)$ i de to variablene ved

$$E[h(X,Y)] = \sum_{x,y} h(x,y) \cdot p(x,y)$$

Kovariansen til variablene X og Y er gitt ved $\text{Cov}(X,Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$ hvor $\mu_X = E(X)$ og $\mu_Y = E(Y)$, og vi har at $\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Dersom de to variablene er uavhengige, så er kovariansen $\text{Cov}(X,Y) = 0$.

Simultant fordelte kontinuerlige variable. La $X = X(\omega)$ og $Y = Y(\omega)$ være kontinuerlige stokastiske variabler som avhenger av utfall ω i det samme utfallsrommet Ω, og la x og y være mulige verdier av disse stokastiske variablene. Den *simultane fordelingsfunksjonen* til X og Y er gitt ved

$$F(a,b) = F_{X,Y}(a,b) = p(X \leq a, Y \leq b) = \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} f(x,y)\, dy\, dx$$

hvor $f(x,y)$ er den simultane sannsynlighetstettheten til X og Y, som har egenskapen at

$$p(a' \leq X \leq a, b' \leq Y \leq b) = \int_{a'}^{a} \int_{b'}^{b} f(x,y)\, dy\, dx$$

Den simultane sannsynlighetstettheten $f(x,y)$ tilfredsstiller kravene

1. $f(x,y) \geq 0$ for alle x,y
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy\, dx = 1$

Vi kan finne den *marginale* punktsannsynligheten for hver av de to variablene ved

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx$$

De to variablene er *uavhengige* om $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ for alle verdier x,y.

Vi kan finne forventningsverdien $E[h(X,Y)]$ for en vilkårlig funksjon $h(X,Y)$ i de to variablene ved

$$E[h(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) \cdot f(x,y)\, dy\, dx$$

Kovariansen til variablene X og Y er gitt ved $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$ hvor $\mu_X = E(X)$ og $\mu_Y = E(Y)$, og vi har at $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Dersom de to variablene er uavhengige, så er kovariansen $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

9.2 Oppgaver

9.1. Oppgaver fra Stirzaker [S]:
6.2.2, 6.3.1, 6.3.3

9.2. Eksamen i ELE 3719 fra 16/06/2011, Oppgave 5
La X være antall mål til hjemmelaget og Y være antall mål til bortelaget i løpet av en fotballkamp. Vi antar at X og Y er uavhengige stokastiske variable, at X er Poisson-fordelt med parameter $\lambda_X = 2$, og at Y er Poisson-fordelt med parameter $\lambda_Y = 1$.

1. Finn $P(X = x, Y = y)$, og regn ut sannsynligheten for hvert av resultatene 0-0, 1-0 og 2-1.

2. Regn ut sannsynligheten $P(X = Y, X \leq 4)$. Gi en tolkning av denne sannsynligheten.
3. Regn ut den betingede sannsynligheten $P(X = Y | X \leq 4)$.
4. Finn sannsynligheten $P(X + Y \geq 2)$. Du vil tilby et veddemål der spilleren vinner d ganger innsatsen hvis det blir minst 2 mål, og taper innsatsen om det blir færre enn 2 mål. Hvor stor bør d være om veddemålet skal lønne seg for deg?

9.3. Eksamen i ELE 3719 fra 16/06/2011, Oppgave 6
La X og Y være simultant fordelte stokastiske variable, med sannsynlighetstetthet gitt ved

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy(x^2 + y^2) & 0 \leq x,y \leq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

1. Finn $f_X(x)$ når $0 \leq x \leq 1$, og sjekk at $f(x,y)$ er en sannsynlighetstetthet.
2. Regn ut $E[X]$ og $\mathrm{Var}[X]$.
3. Vis at $E[Y^n] = E[X^n]$ for $n \geq 1$, og bruk dette til å finne $E[Y]$ og $\mathrm{Var}[Y]$.
4. Regn ut $E[XY]$ og $\mathrm{Cov}(X,Y)$.
5. Regn ut $P(X \geq 1/2, Y \geq 1/2)$.

9.4. Eksamen i ELE 3719 fra 28/11/2011, Oppgave 1
Anta at X og Y er simultant fordelte diskrete stokastiske variable, med sannsynlighetstetthet gitt ved

$$\begin{array}{lll} P(X=1,Y=1)=0.20 & P(X=1,Y=2)=0.20 & P(X=1,Y=3)=0.20 \\ P(X=2,Y=1)=0.25 & P(X=2,Y=2)=0.10 & P(X=2,Y=3)=0.05 \end{array}$$

1. Regn ut $P(X < Y)$.
2. Finn forventning og varians for Y.
3. Finn $\mathrm{Cov}(X,Y)$. Er X og Y uavhengige?

9.5. Eksamen i ELE 3719 fra 28/11/2011, Oppgave 2
La X og Y være simultant fordelte stokastiske variable, med sannsynlighetstetthet gitt ved

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x^2 - 2xy + y^2) & 0 \leq x \leq 1 \text{ og } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

for en positiv konstant $k > 0$.

1. Finn $f_X(x)$ når $0 \leq x \leq 1$, og bruk dette til å bestemme k.
2. Finn $F(a,b) = P(X \leq a, Y \leq b)$ når $0 \leq a \leq 1$ og $0 \leq b \leq 1$.
3. Regn ut $E[X]$ og $\mathrm{Var}[X]$.
4. Regn ut $E[XY]$ og $\mathrm{Cov}(X,Y)$.
5. Regn ut $P(X \geq 1/2, Y \leq 1/2)$.

9.3 Løsninger

9.1 Oppgaver fra Stirzaker [S]:
Se løsning av 6.2.2, 6.3.1, 6.3.3 på s. 336.

9.2 Eksamen i ELE 3719 fra 16/06/2011, Oppgave 5

1. Vi har at $P(X=x,Y=y) = P(X=x)P(Y=y)$ siden X og Y er uavhengige, så
$$P(X=x,Y=y) = e^{-2}\frac{2^x}{x!}\cdot e^{-1}\frac{1^y}{y!} = \mathbf{e^{-3}\,\frac{2^x}{x!y!}}$$
Innsetting gir $P(0-0) = e^{-3} \simeq \mathbf{0.0498}$, $P(1-0) = 2e^{-3} \simeq \mathbf{0.0996}$, $P(2-1) = 2e^{-3} \simeq \mathbf{0.0996}$.
2. Vi har at $P(X=Y, X\le 4) = P(0-0)+\cdots+P(4-4)$, så
$$P(X=Y,X\le 4) = e^{-3}(1+2+1+2/9+1/36) = 4.25e^{-3} \simeq \mathbf{0.2116}$$
Dette er sannsynligheten for et uavgjort resultat med maksimalt fire mål til hjemmelaget.
3. Vi har $P(X=Y|X\le 4) = P(X=Y,X\le 4)/P(X\le 4)$. Siden
$$P(X\le 4) = P(X=0)+\cdots+P(X=4) = e^{-2}(1+2+2+4/3+2/3) = 7e^{-2}$$
så får vi
$$P(X=Y|X\le 4) = \frac{4.25e^{-3}}{7e^{-2}} \simeq \mathbf{0.2234}$$
4. Vi har $P(X+Y\ge 2) = 1-P(X+Y<2)$ og
$$P(X+Y<2) = P(0-0)+P(1-0)+P(0-1) = 4e^{-3}$$
så $P(X+Y\ge 2) = 1-4e^{-3} \simeq \mathbf{0.8009}$. La Z være netto utbetaling i veddemålet. Da har vi
$$Z = \begin{cases} dI-I & X+Y\ge 2\\ -I & X+Y<2\end{cases}$$
der I er innsatsen. Setter vi $p = P(X+Y\ge 2)\simeq 0.8009$, finner vi at forventet netto utbetaling blir
$$E[Z] = (dI-I)p+(-I)(1-p) = dIp-I = I(dp-1)$$
Veddemålet gir forventet netto innbetaling om $E[Z]<0$, dvs $dp-1<0$ eller $d<1/p\simeq 1.2487$. Altså lønner det seg å tilby veddemålet om $\mathbf{d<1.2487}$.

9.3 Eksamen i ELE 3719 fra 16/06/2011, Oppgave 6

1. Vi regner ut $f_X(x)$ når $0 \le x \le 1$ ved integrasjon:

$$f_X(x) = \int_0^1 4xy(x^2+y^2)\,\mathrm{dy} = \left[x(x^2+y^2)^2\right]_0^1 = x(x^2+1)^2 - x^5 = \mathbf{2x^3} + \mathbf{x}$$

Vi har $f(x,y) \ge 0$ for alle x,y, og regner ut

$$\int_0^1 f_X(x)\,\mathrm{dx} = \int_0^1 (2x^3+x)\,\mathrm{dx} = \left[\frac{2}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 1$$

Dermed følger det at $f(x,y)$ er en sannsynlighetstetthet.

2. Vi regner ut $E[X]$:

$$E[X] = \int_0^1 x(2x^3+x)\,\mathrm{dx} = \left[\frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{11}{15}}$$

For å finne Var$[X]$ regner vi først ut $E[X^2]$:

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2(2x^3+x)\,\mathrm{dx} = \left[\frac{2}{6}x^6 + \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{2}{6} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

Dermed er

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{7}{12} - \left(\frac{11}{15}\right)^2 = \mathbf{\frac{41}{900}}$$

3. Siden $f(a,b) = f(b,a)$ for alle reelle tall a,b (symmetri om linjen $y = x$), så kan vi bytte om rollene til x og y uten at integralet endrer verdi:

$$E[X^n] = \int\int x^n f(x,y)\,\mathrm{dydx} = \int\int y^n f(y,x)\,\mathrm{dxdy} = \int\int y^n f(x,y)\,\mathrm{dxdy} = E[Y^n]$$

Dermed er $E[X^n] = E[Y^n]$ for alle $n \ge 1$. Da har vi

$$E[Y] = E[X] = \mathbf{\frac{11}{15}}, \quad \mathrm{Var}[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = E[X^2] - E[X]^2 = \mathrm{Var}[X] = \mathbf{\frac{41}{900}}$$

4. Vi regner ut $E[XY]$ ved integrasjon:

$$\begin{aligned}
E[XY] &= \int_0^1 \int_0^1 xy \cdot 4xy(x^2+y^2)\,\mathrm{dydx} = \int_0^1 \int_0^1 (4x^4y^2 + 4x^2y^4)\,\mathrm{dydx} \\
&= \int_0^1 4x^4\left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^1 + 4x^2\left[\frac{1}{5}y^5\right]_0^1 \mathrm{dx} = \int_0^1 \left(\frac{4}{3}x^4 + \frac{4}{5}x^2\right)\mathrm{dx} \\
&= \left[\frac{4}{15}x^5 + \frac{4}{15}x^3\right]_0^1 = \mathbf{\frac{8}{15}}
\end{aligned}$$

Dette gir $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{8}{15} - \left(\frac{11}{15}\right)^2 = -\mathbf{\frac{1}{225}}$.

5. Vi har at

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 1/2, Y \geq 1/2) &= \int_{1/2}^{1}\int_{1/2}^{1} 4xy(x^2+y^2)\,\mathrm{dydx} = \int_{1/2}^{1}\int_{1/2}^{1} (4x^3y+4xy^3)\,\mathrm{dydx} \\
&= \int_{1/2}^{1} 4x^3\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{1/2}^{1} + 4x\left[\frac{1}{4}y^4\right]_{1/2}^{1}\,\mathrm{dx} = \int_{1/2}^{1}\left(\frac{3}{2}x^3+\frac{15}{16}x\right)\mathrm{dx} \\
&= \left[\frac{3}{8}x^4+\frac{15}{32}x^2\right]_{1/2}^{1} = \frac{3}{8}\cdot\frac{15}{16}+\frac{15}{32}\cdot\frac{3}{4} = \mathbf{\frac{45}{64}}
\end{aligned}
$$

9.4 Eksamen i ELE 3719 fra 28/11/2011, Oppgave 1

1. Vi har at $P(X<Y) = P(X=1,Y=2)+P(X=1,Y=3)+P(X=2,Y=3) = \mathbf{0.45}$.
2. Vi har at $P(Y=1)=0.45,\ P(Y=2)=0.30,\ P(Y=3)=0.25$. Dermed får vi

$$E[Y^n] = 1^n\cdot 0.45 + 2^n \cdot 0.30 + 3^n \cdot 0.25$$

   Dette gir $E[Y] = \mathbf{1.80}$ og $E[Y^2] = 3.90$, og dermed er

$$\mathrm{Var}[Y] = E[Y^2]-E[Y]^2 = 3.90 - 1.80^2 = \mathbf{0.66}$$

3. Vi har $\mathrm{Cov}[X,Y] = E[XY]-E[X]E[Y]$, og vi ser at

$$E[X] = 1\cdot 0.60 + 2\cdot 0.40 = 1.40$$

   og at

$$E[XY] = 1\cdot 0.20 + 2\cdot(0.20+0.25)+3\cdot 0.20+4\cdot 0.10+6\cdot 0.05 = 2.4$$

   Dermed er $\mathrm{Cov}[X,Y] = 2.4 - 1.8\cdot 1.4 = -\mathbf{0.12}$. Variablene ikke uavhengige.

9.5 Eksamen i ELE 3719 fra 28/11/2011, Oppgave 2

1. Vi regner ut $f_X(x)$ når $0 \leq x \leq 1$ ved integrasjon:

$$f_X(x) = \int_0^1 k(x^2-2xy+y^2)\,\mathrm{dy} = k\left[x^2y - xy^2 + y^3/3\right]_0^1 = \mathbf{k(x^2-x+1/3)}$$

   Siden f er en sannsynlighetstetthet, må vi ha

$$\int_0^1 k(x^2-x+1/3)\,\mathrm{dx} = k\left[x^3/3 - x^2/2 + x/3\right]_0^1 = k(1/3-1/2+1/3) = k/6 = 1$$

   Det følger at $k=\mathbf{6}$. (Vi har at $f(x,y) = k(x^2-2xy+y^2) = k(x-y)^2 \geq 0$, så $k=6$ gjør f til en sannsynlighetstetthet.)
2. Vi regner ut den kumulative fordelingen $F(a,b) = P(X\leq a, Y\leq b)$ for $0\leq a\leq 1$ og $0 \leq b \leq 1$ ved å regne ut integralet

$$\begin{aligned}
P(X \le a, Y \le b) &= \int_0^a \int_0^b 6x^2 - 12xy + 6y^2 \,\mathrm{dydx} \\
&= \int_0^a 6x^2 \,[y]_0^b - 12x \left[y^2/2\right]_0^b + \left[2y^3\right]_0^b \,\mathrm{dx} = \int_0^a 6x^2 b - 6xb^2 + 2b^3 \,\mathrm{dx} \\
&= \left[2x^3 b - 3x^2 b^2 + 2b^3 x\right]_0^a = \mathbf{2a^3b - 3a^2b^2 + 2ab^3}
\end{aligned}$$

3. Vi bruker $f_X(x) = 6x^2 - 6x + 2$ og regner ut $E[X]$:

$$E[X] = \int_0^1 x(6x^2 - 6x + 2)\,\mathrm{dx} = \left[\frac{6}{4}x^4 - 3x^2 + 2x\right]_0^1 = \frac{3}{2} - 3 + 2 = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

For å finne $\mathrm{Var}[X]$ regner vi først ut $E[X^2]$:

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2(6x^2 - 6x + 2)\,\mathrm{dx} = \left[\frac{6}{5}x^5 - \frac{6}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{6}{5} - \frac{6}{4} + \frac{2}{3} = \frac{11}{30}$$

Dermed er

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{11}{30} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \mathbf{\frac{7}{60}}$$

4. Vi regner ut $E[XY]$ ved integrasjon:

$$\begin{aligned}
E[XY] &= \int_0^1 \int_0^1 xy \cdot (6x^2 - 12xy + 6y^2)\,\mathrm{dydx} = \int_0^1 \int_0^1 (6x^3 y - 12x^2 y^2 + 6xy^3)\,\mathrm{dydx} \\
&= \int_0^1 6x^3 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1 - 12x^2 \left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^1 + 6x \left[\frac{1}{4}y^4\right]_0^1 \mathrm{dx} = \int_0^1 \left(3x^3 - 4x^2 + \frac{3}{2}x\right) \mathrm{dx} \\
&= \left[\frac{3}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^2\right]_0^1 = \mathbf{\frac{1}{6}}
\end{aligned}$$

Dette gir $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\mathbf{\frac{1}{12}}$ siden $E[Y] = E[X]$ ved symmetri.

5. Vi har at

$$\begin{aligned}
P(X \ge 1/2, Y \le 1/2) &= \int_{1/2}^1 \int_0^{1/2} 6x^2 - 12xy + 6y^2 \,\mathrm{dydx} \\
&= \int_{1/2}^1 6x^2 \,[y]_0^{1/2} - 12x \left[y^2/2\right]_0^{1/2} + \left[2y^3\right]_0^{1/2} \mathrm{dx} \\
&= \int_{1/2}^1 \left(3x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\right) \mathrm{dx} = \left[x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right]_{1/2}^1 \\
&= (1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}) - (\frac{1}{8} - \frac{3}{16} + \frac{1}{8}) = \mathbf{\frac{7}{16}}
\end{aligned}$$

Alternativt kan man bruke at sannsynligheten er gitt ved $F(1,1/2) - F(1/2,1/2)$ og bruke uttrykket for $F(a,b)$ fra oppgave b).

Forelesning 10
Stokastiske variable: Anvendelser

10.1 Kort sammendrag

Betingede fordelinger: Diskret tilfelle. La X og Y være simultant fordelte diskrete stokastiske variabler. Vi definerer den *betingede sannsynlighetsfordelingen* $p_{X|Y}(x|y)$ til å være

$$p(x|y) = p_{X|Y}(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$$

for enhver verdi y slik at $p_Y(y) \neq 0$. Vi kan tolke $p(x|y)$ som den betingede sannsynligheten $p(X = x|Y = y)$, og det er en sannsynlighetsfordling for hver y i den forstand at

1. $p(x|y) \geq 0$ for alle x
2. $\sum_x p(x|y) = 1$

Vi kan finne den *betingede forventningsverdien* $E[X|Y = y]$ for en vilkårlig verdi y med $p_Y(y) \neq 0$. Den er gitt ved

$$E(X|Y = y) = \sum_x x \cdot p(x|y)$$

Betingede fordelinger: Kontinuerlig tilfelle. La X og Y være simultant fordelte kontinuerlige stokastiske variabler. Vi definerer den *betingede sannsynlighetsfordelingen* $f_{X|Y}(x|y)$ til å være

$$f(x|y) = f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

for enhver verdi y slik at $f_Y(y) \neq 0$. Den er en sannsynlighetsfordling for hver y i den forstand at

1. $f(x|y) \geq 0$ for alle x
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x|y)\,dx = 1$

Vi kan finne den *betingede forventningsverdien* $E[X|Y=y]$ for en vilkårlig funksjon verdi y med $f_Y(y) \neq 0$, som er gitt ved

$$E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x|y)\, dx$$

10.2 Oppgaver

10.1. La X,Y,Z være stokastiske variable og la c være en konstant. Vis at

1. $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$
2. $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$
3. $\mathrm{Cov}(cX,Y) = c\,\mathrm{Cov}(X,Y)$
4. $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y) = \mathrm{Cov}(X_1,Y) + \mathrm{Cov}(X_2,Y)$

10.2. La X_1,X_2 være stokastiske variable. Vi definerer forventningsvektoren μ og kovariansmatrisen Σ ved

$$\mu = \begin{pmatrix} E[X_1] & E[X_2] \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X_1,X_1) & \mathrm{Cov}(X_1,X_2) \\ \mathrm{Cov}(X_2,X_1) & \mathrm{Var}(X_2,X_2) \end{pmatrix}$$

La $Y = a_1X_1 + a_2X_2$. Vis at $E[Y] = \mu \cdot \mathbf{a}$ og at $\mathrm{Var}[Y] = \mathbf{a}^T \cdot \Sigma \cdot \mathbf{a}$.

10.3. La X_1,X_2,X_3 være stokastiske variable, med forventningsvektor μ og kovariansmatrise Σ gitt ved

$$\mu = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

La $Y = 5X_1 - X_2 + 2X_3$. Finn $E[Y]$ og $\mathrm{Var}[Y]$.

10.4. La X_1 og X_2 være stokastiske variable med henholdsvis forventingsverdier og kovariansmatrise gitt ved

$$\mu = \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Hvis mulig, bestem a_1 og a_2 slik at $Y = a_1X_1 + a_2X_2$ har minst mulig varians $\mathrm{Var}[Y]$ og samtidig slik at $E[Y] = 6$.

10.5. La $X_1, X_2, \dots, X_n$ være uavhengige stokastiske variable med samme sannsynlighetsfordeling, og la $\mu = E[X_i]$ og $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_i)$ for $i = 1,2,\dots,n$. Vi definerer *(empirisk) gjennomsnitt* $\overline{X}$ ved

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Vis at $E[\overline{X}] = \mu$ og at $\text{Var}[\overline{X}] = \sigma^2/n$.

10.6. Prøve-eksamen i ELE 3719 fra 05/2011, Oppgave 6
La X og Y være simultant fordelte stokastiske variable, med sannsynlighetstetthet gitt ved

$$f(x,y) = \begin{cases} 6e^{-2x-3y} & x,y \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

1. Finn $f_X(x)$. Hva slags fordeling har den stokastiske variabelen X?
2. Regn ut $E[X]$ og $\text{Var}[X]$.
3. Regn ut den betingede sannsynlighetstettheten $f_{Y|X}(y|x)$ når $x \geq 0$.
4. Finn $f_Y(y)$. Er X og Y uavhengige stokastiske variable?
5. Finn $P(X \geq 1, Y \leq 1)$.

10.7. Eksamen i ELE 3719 fra 14/06/2012, Oppgave 1
La X og Y være simultant fordelte kontinuerlige stokastiske variable, med sannsynlighetstetthet gitt ved

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x^2 + k(x-y)^2, & 0 \leq x \leq 1 \text{ og } 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

for en konstant $k \geq 0$.

1. Bestem k. Hva blir sannsynlighetstettheten $f_X(x)$?
2. Regn ut $E(X)$ og $\text{Var}(X)$.
3. Regn ut $E(XY)$.
4. Finn den kumulative fordelingsfunksjonen $F(a,b) = p(X \leq a, Y \leq b)$, og regn ut $F(1,1)$.

10.8. Eksamen i ELE 3719 fra 14/06/2012, Oppgave 2
La X og Y være simultant fordelte diskrete stokastiske variable, med sannsynlighetstetthet gitt ved

$$\begin{array}{lll} p(X=1,Y=1)=0.1 & p(X=1,Y=2)=a & p(X=1,Y=3)=0.2 \\ p(X=2,Y=1)=b & p(X=2,Y=2)=0.1 & p(X=2,Y=3)=0.3 \end{array}$$

for konstanter $a, b \geq 0$. Vi antar at $p(X = x, Y = y) = 0$ for alle andre verdier av x og y.

1. Forklar hvorfor $b = 0.3 - a$, og finn uttrykk for $E(X)$ og $E(Y)$ som funksjoner av a.
2. Regn ut $\text{Cov}(X,Y)$. For hvilken verdi av a er kovariansen minst mulig?
3. Er X og Y uavhengige for noen verdier av a?

10.9. Prøve-eksamen i ELE 3719 fra 05/2013, Oppgave 4
La X og Y være simultant fordelte kontinuerlige stokastiske variable, med sannsynlighetstetthet gitt ved

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{k(x+y)}, & x,y \geq 0 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

for en konstant k.

1. Bestem k. Hva blir sannsynlighetstettheten $f_X(x)$? Hva slags fordeling har X?
2. Finn $E(X)$ og $\mathrm{Var}(X)$.
3. Er X og Y uavhengige stokastiske variable? Begrunn svaret.
4. Finn $E(XY)$ og $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

10.10. Prøve-eksamen i ELE 3719 fra 05/2013, Oppgave 5
En bedrift ønsker å fordele to kontrakter i et prosjekt helt tilfeldig blant tre firmaer A, B og C. Utvelgelsen skjer ved loddtrekning, og trekningen foregår slik at hvert av firmaene har mulighet til å få 0, 1 eller 2 kontrakter. Vi skriver (i,j) for utfallet at kontrakt 1 går til firma i og kontrakt 2 går til firma j, der i og j er enten A, B eller C.

1. Skriv en komplett liste over mulige utfall. Hva er sannsynligheten for at A og B får en kontrakt hver? Hva er sannsynligheten for at A får minst en kontrakt?
2. La X være antall kontrakter A får, og Y være antall kontrakter B får. Finn $P(X = x, Y = y)$ for alle x,y og $P(X = x)$ for alle x. Er X og Y uavhengige stokastiske variable?
3. Anta nå at bedriften ønsker å fordele to kontrakter til ti firmaer istedet for tre, og at A er en av disse firmaene. La X være antall kontrakter A får. Fordelingen foregår fortsatt tilfeldig på tilsvarende måte som før. Hva slags fordeling har X? Hva er sannsynligheten for at firma A tildeles en kontrakt? Hva er sannsynligheten for at A tildeles minst en kontrakt?

10.11. Eksamen i ELE 3719 fra 13/06/2013, Oppgave 4
La X og Y være simultant fordelte kontinuerlige stokastiske variable, med sannsynlighetstetthet gitt ved

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x^2+y^2), & -1 \leq x \leq 1 \text{ og } -1 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

for en positiv konstant k.

1. Bestem k. Hva blir sannsynlighetstettheten $f_X(x)$?
2. Regn ut $E(X)$ og $\mathrm{Var}(X)$.
3. Regn ut $E(XY)$ og $\mathrm{Cov}(X,Y)$.
4. Er X og Y uavhengige stokastiske variable? Begrunn svaret.

10.12. Eksamen i ELE 3719 fra 13/06/2012, Oppgave 5
La X være antall interne og Y antall eksterne samtaler som kommer inn til en resepsjon i løpet av en tilfeldig valgt time. Vi antar at X og Y er uavhengige Poisson-fordelte stokastiske variable med parametre $\lambda_X = 3$ og $\lambda_Y = 1$.

1. Finn sannsynlighet for 2 interne og 1 eksterne samtaler i løpet av en time. Finn også sannsynligheten for at kommer inn minst en samtale i løpet av en time.

2. Finn sannsynligheten for at det kommer inn tre samtaler i løpet av en time.
3. Finn et uttrykk for $p(X+Y=n)$, og bruk dette til å vise at $X+Y$ er Poisson-fordelt.

10.3 Løsninger

Problem 10.1 - 10.4: Løsninger finnes i forelesningsplanen (håndskrevne, se lenke under Forelesning 10). Oppgave 10.1-10.4 er der betegnet som Oppgave 5-8 i det håndskrevne notatet.

10.5 Vi har at $E(\overline{X}) = \frac{1}{n}(E(X_1)+\cdots+E(X_n)) = n\mu/n = \mu$, og $\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=0$ for $i \neq j$ siden variablene er uavhengige. Dermed har vi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\overline{X}) &= \mathrm{Var}(\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)) \\
&= \frac{1}{n^2}\mathrm{Cov}(X_1+\cdots+X_n, X_1+\cdots+X_n) \\
&= \frac{1}{n^2}(\mathrm{Cov}(X_1,X_1)+\mathrm{Cov}(X_1,X_2)+\cdots+\mathrm{Cov}(X_n,X_n)) \\
&= \frac{1}{n^2}\left(n\sigma^2\right) = \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

10.6 Prøve-eksamen i ELE 3719 fra 05/2011, Oppgave 6

1. Vi regner ut $f_X(x)$ når $x \geq 0$ ved integrasjon:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{dy} = \int_0^{\infty} 6e^{-2x-3y}\,\mathrm{dy} = \left[-2e^{-2x-3y}\right]_0^{\infty} = \mathbf{2e^{-2x}}$$

   Når $x<0$ er $f_X(x) = \mathbf{0}$. Dermed er den stokastiske variabelen X **eksponensielt fordelt** med parameter $\lambda = 2$.
2. Siden X er eksponensielt fordelt med $\lambda = 2$, så er $E[X] = 1/\lambda = \mathbf{1/2}$ og $\mathrm{Var}[X] = 1/\lambda^2 = \mathbf{1/4}$.
3. Den betingede sannsynlighetstettheten $f_{Y|X}(y|x)$ når $x \geq 0$ er gitt ved

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

   Dersom også $y \geq 0$, så er den betingede sannsynlighetstettheten $f_{Y|X}(y|x)$ gitt ved

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{6e^{-2x-3y}}{2e^{-2x}} = \mathbf{3e^{-3y}}$$

   Dersom $x \geq 0$ men $y<0$, så er $f_{Y|X}(y|x) = \mathbf{0}$.
4. Vi regner ut $f_Y(y)$ når $y \geq 0$ ved integrasjon:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{dx} = \int_0^{\infty} 6e^{-2x-3y}\,\mathrm{dx} = \left[-3e^{-2x-3y}\right]_0^{\infty} = \mathbf{3e^{-3y}}$$

Når $y < 0$ er $f_Y(y) = \mathbf{0}$. Dermed er $f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x)$, og det betyr at X og Y er **uavhengige** stokastiske variabler.

5. Siden X og Y er uavhengige stokastiske variable, har vi

$$P(X \geq 1, Y \leq 1) = P(X \geq 1)P(Y \leq 1) = (1 - P(X \leq 1))P(Y \leq 1)$$

Både X og Y er ekponensielt fordelte, med $\lambda = 2$ og $\lambda = 3$ henholdsvis. Vi regner ut den kumulative fordelingsfunksjonen for en vilkårlig eksponensielt fordelt variabel Z:

$$F_Z(a) = P(Z \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda z}\,\mathrm{dz} = \left[-e^{-\lambda z}\right]_0^a = 1 - e^{-\lambda a}$$

Vi setter inn og får

$$P(X \geq 1, Y \leq 1) = (1 - P(X \leq 1))P(Y \leq 1) = e^{-2}(1 - e^{-3}) = \mathbf{e^{-2}} - \mathbf{e^{-5}} \simeq 0.129$$

10.7 Eksamen i ELE 3719 fra 14/06/2012, Oppgave 1

1. Vi regner først ut $f_X(x)$ når $0 \leq x \leq 1$ ved integrasjon, og får at

$$f_X(x) = \int_0^1 2x^2 + k(x-y)^2\,\mathrm{dy} = \left[2x^2y + \frac{k}{3}(x-y)^3(-1)\right]_0^1 = 2x^2 + \frac{k}{3}(x^3 - (x-1)^3)$$

Siden $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, så får vi at $f_X(x) = 2x^2 + k(x^2 - x + 1/3)$. Men f er en sannsynlighetstetthet, så vi har at

$$\int_0^1 2x^2 + k(x^2 - x + 1/3)\,\mathrm{dx} = \left[2x^3/3 + k(x^3/3 - x^2/2 + x/3)\right]_0^1 = 2/3 + k/6 = 1$$

Dette gir $\mathbf{k = 2}$. Dermed følger det at $f_X(x) = \mathbf{4x^2 - 2x + 2/3}$.

2. Vi bruker $f_X(x) = 4x^2 - 2x + 2/3$ og finner $E(X)$ ved å løse integralet

$$E(X) = \int_0^1 x(4x^2 - 2x + 2/3)\,\mathrm{dx} = \left[x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2\right]_0^1 = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

For å finne $\mathrm{Var}[X]$ regner vi først ut $E[X^2]$ ved å løse integralet

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2(4x^2 - 2x + 2/3)\,\mathrm{dx} = \left[\frac{4}{5}x^5 - \frac{2}{4}x^4 + \frac{2}{9}x^3\right]_0^1 = \frac{47}{90}$$

Dermed blir

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{47}{90} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \mathbf{\frac{7}{90}}$$

3. Vi bruker $f(x,y) = 4x^2 - 4xy + 2y^2$, og regner ut $E[XY]$ ved å løse integralet

$$\begin{aligned}
E[XY] &= \int_0^1 \int_0^1 xy \cdot (4x^2 - 4xy + 2y^2)\,\mathrm{dydx} = \int_0^1 \int_0^1 (4x^3y - 4x^2y^2 + 2xy^3)\,\mathrm{dydx} \\
&= \int_0^1 \left[2x^3y^2 - \frac{4}{3}x^2y^3 + \frac{1}{2}xy^4 \right]_0^1 \mathrm{dx} = \int_0^1 \left(2x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{2}x \right) \mathrm{dx} \\
&= \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{9}x^3 + \frac{1}{4}x^2 \right]_0^1 = \mathbf{\frac{11}{36}}
\end{aligned}$$

4. Vi regner ut den kumulative fordelingen $F(a,b) = P(X \leq a, Y \leq b)$ for $0 \leq a \leq 1$ og $0 \leq b \leq 1$ ved å regne ut integralet

$$\begin{aligned}
P(X \leq a, Y \leq b) &= \int_0^a \int_0^b 4x^2 - 4xy + 2y^2\,\mathrm{dydx} \\
&= \int_0^a \left[4x^2y - 2xy^2 + \frac{2}{3}y^3 \right]_0^b \mathrm{dx} = \int_0^a 4x^2b - 2xb^2 + \frac{2}{3}b^3\,\mathrm{dx} \\
&= \left[\frac{4}{3}x^3b - x^2b^2 + \frac{2}{3}xb^3 \right]_0^a = \mathbf{\frac{4}{3}a^3b - a^2b^2 + \frac{2}{3}ab^3}
\end{aligned}$$

Vi har at $F(1,1) = 4/3 - 1 + 2/3 = \mathbf{1}$.

10.8 Eksamen i ELE 3719 fra 14/06/2012, Oppgave 2

1. Siden summen av sannsynlighetene er 1, har vi at

$$0.1 + a + 0.2 + b + 0.1 + 0.3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b = 0.3 - a}$$

Vi bruker derfor at $b = 0.3 - a$ i resten av oppgaven. Forventningsverdiene er gitt ved

$$\begin{aligned}
E(X) &= 1 \cdot (0.1 + a + 0.2) + 2 \cdot (b + 0.1 + 0.3) = a + 2b + 1.1 = \mathbf{1.7 - a} \\
E(Y) &= 1 \cdot (0.1 + b) + 2 \cdot (a + 0.1) + 3 \cdot 0.50 = 2a + b + 1.80 = \mathbf{a + 2.1}
\end{aligned}$$

2. Vi har at $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, og vi regner ut forventningsverdien

$$E(XY) = 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot (a + b) + 3 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.1 + 6 \cdot 0.3 = 2a + 2b + 2.9 = 3.5$$

Dette gir kovarians $\mathrm{Cov}(X,Y) = 3.5 - (1.7 - a)(a + 2.1) = \mathbf{a^2 + 0.4a - 0.07}$. Siden $0 \leq a \leq 0.3$, så har vi at variansen er minst mulig for $\mathbf{a = 0}$; i så fall er $\mathrm{Cov}(X,Y) = -0.07$.

3. Hvis X og Y er uavhengige, så er $p(X = x) \cdot p(Y = y) = p(X = x, Y = y)$ for alle verdier av x og y. La oss anta at dette er tilfelle. Vi har $p(X = 1) = 0.3 + a$ og $p(Y = 3) = 0.5$, og dermed

$$p(X = 1) \cdot p(Y = 3) = p(X = 1, Y = 3) \quad \Rightarrow \quad (0.3 + a) \cdot 0.5 = 0.2$$

Dette gir $a = 0.1$ og dermed $b = 0.2$. På den andre siden er $p(Y = 1) = 0.1 + b = 0.3$, og dermed er

$$p(X = 1) \cdot p(Y = 1) = 0.4 \cdot 0.3 = 0.12 \neq 0.1 = p(X = 1, Y = 1)$$

Dette betyr at X og Y **ikke er uavhengige** for noen verdier av a.

10.9 Prøve-eksamen i ELE 3719 fra 05/2013, Oppgave 4

1. Vi ser at $f(x,y) \geq 0$. Vi regner så ut $f_X(x)$:

$$f_X(x) = \int_0^\infty e^{k(x+y)}\,\mathrm{dy} = \left[\frac{1}{k}e^{k(x+y)}\right]_0^\infty = \frac{1}{k}e^{kx}(e^{k\cdot\infty} - 1)$$

   Vi ser at grenseverdien $e^{k\infty} = \lim_{y\to\infty} e^{ky} = 0$ når $k < 0$ og at den ikke eksisterer når $k > 0$. Når $k = 0$ er den 1. Dermed må vi ha $k < 0$ (for vi kan ikke ha $f_X(x) = 0$). Altså er $f_X(x) = -1/k \cdot e^{kx}$. For å bestemme k regner vi ut

$$\int_0^\infty f_X(x)\,\mathrm{dx} = \int_0^\infty -\frac{1}{k}e^{kx}\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{k^2}\left[e^{kx}\right]_0^\infty = \frac{1}{k^2}$$

   Siden dette uttrykket skal være lik 1 (summen av sannsynlighetene) og $k < 0$, må vi ha $k = -1$. Dermed er $f_X(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$. Dette betyr at X er eksponensielt fordelt med $\lambda_X = 1$.
2. Vi vet at $E(X) = 1/\lambda_X = 1$ og $\mathrm{Var}(X) = 1/\lambda_X^2 = 1$ når X er eksponsielt fordelt med $\lambda_X = 1$. Alternativt kan vi finne dette ved å regne ut integralene for $E(X)$ og $E(X^2)$.
3. Vi ser at $f_Y(y) = e^{-y}$, $y \geq 0$ siden $f(x,y)$ er symmetrisk i x og y, slik at Y også er eksponentielt fordelt med $\lambda_Y = 1$. Dermed er $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ siden $e^{-(x+y)} = e^{-x-y} = e^{-x}e^{-y}$, og dette betyr at X og Y er uavhengige.
4. Siden X og Y er uavhengige, har vi at

$$E(XY) = E(X)E(Y) = 1 \cdot 1 = 1$$

   Vi har brukt at X,Y er eksponentielt fordelt med $\lambda_X = \lambda_Y = 1$. Alternativt kunne vi regnet ut integralet for $E(XY)$ og $E(Y)$. Vi har dermed at $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$.

10.10 Prøve-eksamen i ELE 3719 fra 05/2013, Oppgave 5

1. Utfallsrommet er $\{(A,A),(A,B),(A,C),(B,A),(B,B),(B,C),(C,A),(C,B),(C,C)\}$. Sannsynligheten for at A og B får en kontrakt hver er $p(A,B) + p(B,A) = 2/9$. Sannsynligheten for at A får minst en kontrakt er $5/9$ siden det er fem gunstige utfall i utfallsrommet.
2. Sannsynlighetstettheten $f(x,y) = P(X = x, Y = y)$ er gitt ved tabellen

	y = 0	y = 1	y = 2
x = 0	1/9	2/9	1/9
x = 1	2/9	2/9	0
x = 2	1/9	0	0

Dette gir

$$f_X(x) = \begin{cases} 4/9, & x = 0 \\ 4/9, & x = 1 \\ 1/9, & x = 2 \end{cases}$$

Fordelingen til Y er helt tilsvarende, det ser vi ved hjelp av symmetri, så

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4/9, & y = 0 \\ 4/9, & y = 1 \\ 1/9, & y = 2 \end{cases}$$

For eksampel er $f(0,0) = 1/9 \neq f_X(0) f_Y(0) = 4/9 \cdot 4/9$, så X og Y er ikke uavhengige.

3. Tildeling av kontrakt 1 og kontrakt 2 er uavhengig av hverandre, og sannsynligheten for at A tildeles kontrakten er i hvert tilfelle $p = 1/10$. Dermed er X binomisk fordelt med $p = 1/10$ og $n = 2$. Sannynligheten for at A tildeles en kontrakt er gitt ved

$$p(X = 1) = \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} = 2 \cdot 1/10 \cdot 9/10 = 18/100 = 0.18$$

Sannsynligheten for at A tildeles minst en kontrakt er gitt ved $p(X = 1) + p(X = 2) = 0.19$, siden

$$p(X = 2) = \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} = (1/10)^2 = 0.01$$

10.11 Eksamen i ELE 3719 fra 13/06/2013, Oppgave 4

1. La oss først regne ut $f_X(x)$ for $-1 \leq x \leq 1$, som er gitt ved

$$f_X(x) = \int_{-1}^{1} k(x^2 + y^2)\,\mathrm{dy} = k\left[x^2 y + y^3/3\right]_{-1}^{1} = k(x^2 + 1/3 + x^2 + 1/3) = k(2x^2 + 2/3)$$

Konstanten k må oppfylle likningen

$$\int_{-1}^{1} f_X(x)\,\mathrm{dx} = k\left[2x^3/3 + 2x/3\right]_{-1}^{1} = k(2/3 + 2/3 + 2/3 + 2/3) = k \cdot 8/3 = 1$$

Dette gir at $k = 3/8$. Dermed er $f_X(x) = 3/8(2x^2 + 2/3) = (3x^2 + 1)/4$.

2. Vi regner ut $E(X)$ og $E(X^2)$ ved å bruke $f_X(x)$:

$$E(X) = \int_{-1}^{1} x f_X(x) \text{ dx} = \int_{-1}^{1} (3x^3 + x)/4 \text{ dx} = 0$$

og

$$E(X^2) = \int_{-1}^{1} x^2 f_X(x) \text{ dx} = \int_{-1}^{1} (3x^4 + x^2)/4 \text{ dx} = 1/4 \left[3x^5/5 + x^3/3\right]_{-1}^{1}$$

Dette gir $E(X^2) = 1/4(3/5+1/3+3/5+1/3) = 7/15$ og dermed $\text{Var}(X) = 7/15 - 0^2 = 7/15$.

3. Vi regner ut $E(XY)$ ved å bruke $f(x,y)$:

$$E(XY) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} xyf(x,y) \text{ dydx} = 3/8 \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^3y + xy^3 \text{ dydx}$$

Vi har indre integral

$$\int_{-1}^{1} x^3y + xy^3 \text{dy} = \left[x^3y^2/2 + xy^4/4\right]_{-1}^{1} = 0$$

Dette gir

$$E(XY) = 3/8 \cdot 0 = 0$$

Dermed er $\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$ siden $E(X) = 0$.

4. Hvis X og Y er uavhengige stokastiske variable, så er $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. Ved symmetri ser vi at $f_Y(y) = (3y^2+1)/4$ siden $f_X(x) = (3x^2+1)/4$, og vi får

$$f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{16}(x^2+1)(y^2+1) \neq f(x,y)$$

for $-1 \leq x,y \leq 1$. Dermed er X og Y ikke uavhengige.

10.12 Eksamen i ELE 3719 fra 13/06/2013, Oppgave 5

1. Sannsynlighet for x interne og y interne samtaler i løpet av en time er gitt ved

$$f(x,y) = e^{-3}3^x/x! \cdot e^{-1}1^y/y! = e^{-4} \cdot \frac{3^x}{x! \cdot y!}$$

Sannsynlighet for 2 interne og 1 interne samtaler i løpet av en time blir dermed

$$f(2,1) = e^{-4} \cdot \frac{3^2}{2} = \frac{9}{2}e^{-4} \cong 0.082$$

siden X og Y er uavhengige og Poisson-fordelte. Sannsynligheten for at det kommer inn minst en samtale er

$$1 - f(0,0) = 1 - e^{-4} \cong 0.982$$

2. Sannsynligheten for at det kommer inn tre samtaler i løpet av en time er gitt ved

$$f(0,3)+f(1,2)+f(2,1)+f(3,0)=e^{-4}\cdot(\frac{1}{6}+\frac{3}{2}+\frac{9}{2}+\frac{27}{6})=e^{-4}\cdot\frac{32}{3}\cong 0.195$$

3. Vi har at $p(X+Y=n)$ kan uttrykkes som

$$f(0,n)+f(1,n-1)+\cdots+f(n,0)=\sum_{i=0}^{n} f(i,n-i)=\sum_{i=0}^{n} e^{-4}\frac{3^i}{i!(n-i)!}$$

Vi setter $Z=X+Y$. Dette betyr at sannsynligheten

$$p(Z=n)=e^{-4}\cdot\sum_{i=0}^{n}\frac{3^i}{i!(n-i)!}$$

Vi vil forsøke å vise at Z er Poisson-fordelt med parameter $\lambda_Z=4$. Vi bruker Poisson fordelingen, og ser at vi må vise at

$$p(Z=n)=e^{-4}\cdot\frac{4^n}{n!}=e^{-4}\cdot\sum_{i=0}^{n}\frac{3^i}{i!(n-i)!}$$

Med andre ord, vi må vise at

$$\frac{4^n}{n!}=\sum_{i=0}^{n}\frac{3^i}{i!(n-i)!}\quad\Leftrightarrow\quad 4^n=\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}3^i$$

Men binomial-formelen sier at

$$4^n=(3+1)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}3^i\cdot 1^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!\cdot(n-i)!}\cdot 3^i$$

og dermed har vi vist at $Z=X+Y$ er Poisson-fordelt med $\lambda_Z=4$.

Forelesning 11
Differensial-likninger

11.1 Kort sammendrag

En *differensial-likning* for funksjonen $y = y(t)$ er en likning som inneholder den deriverte funksjonene y', og eventuelt høyere ordens deriverte av y. For eksempel er

$$y' = yt^2 \quad \text{eller} \quad y'(t) = y(t) \cdot t^2$$

en differensiallikning av *første orden* siden den inneholder y' men ingen høyere ordens deriverte. Differensiallikningen $y'' = 2y$ er et eksempel på en annen ordens differensiallikning.

En løsning av en differensial-likning er en funksjon $y = y(t)$ som tilfredsstiller differensiallikningen. En første orden differensiallikning vil ha en generell løsning som avhenger av en ubestemt konstant C. For eksempel vil $y' = 3t^2$ ha løsningen $y = t^3 + C$. Det er noen ganger mulig å løse differensiallikninger ved regning, og det involverer ofte å regne ut ubestemte integraler.

En første ordens differensiallikning er *separabel* dersom den er, eller kan skrives på, formen

$$y' = f(y) \cdot g(t)$$

for uttrykk $f(y)$ og $g(t)$. En separabel differensial-likning kan separeres og løses ved følgende framgangsmåte:

$$\begin{aligned} y' &= f(y) \cdot g(t) \\ \frac{1}{f(y)} y' &= g(t) \\ \int \frac{1}{f(y)} y' \, dt &= \int g(t) \, dt \\ \int \frac{1}{f(y)} \, dy &= \int g(t) \, dt \end{aligned}$$

11.2 Oppgaver

11.1. Finn den deriverte $\dot{y} = y'$ av følgende funksjoner:

1. $y = \frac{1}{2}t - \frac{3}{2}t^2 + 5t^3$
2. $y = (2t^2 - 1)(t^4 - 1)$
3. $y = (\ln t)^2 - 5\ln t + 6$
4. $y = \ln(3t)$
5. $y = 5e^{-3t^2+t}$
6. $y = 5t^2e^{-3t}$

11.2. Regn ut integralene:

1. $\int t^3 dt$
2. $\int_0^1 (t^3 + t^5 + \frac{1}{3})dt$
3. $\int \frac{1}{t} dt$
4. $\int te^{t^2} dt$
5. $\int \ln t dt$

11.3. Finn den generelle løsningen og den partikulære løsningen med $y(0) = 1$:

1. $\dot{y} = 2t$
2. $\dot{y} = e^{2t}$
3. $\dot{y} = (2t+1)e^{t^2+t}$
4. $\dot{y} = \frac{2t+1}{t^2+t+1}$

11.4. Vi ser på differensiallikningen $\dot{y} + y = e^t$. Vis at $y(t) = Ce^{-t} + \frac{1}{2}e^t$ er en løsning for alle verdier av C.

11.5. Løs $y^2\dot{y} = t + 1$, og finn en løsning som går gjennom punktet $(t,y) = (1,1)$.

11.6. Løs differensiallikningene:

1. $\dot{y} = t^3 - 1$
2. $\dot{y} = te^t - t$
3. $e^y\dot{y} = t + 1$

11.7. Løs differensiallikningene med initialverdier:

1. $t\dot{y} = y(1-t)$, with $(t_0,y_0) = (1,\frac{1}{e})$
2. $(1+t^3)\dot{y} = t^2y$, with $(t_0,y_0) = (0,2)$
3. $y\dot{y} = t$, with $(t_0,y_0) = (\sqrt{2},1)$
4. $e^{2t}\dot{y} - y^2 - 2y = 1$, with $(t_0,y_0) = (0,0)$

11.8. Løs differensiallikningen $2t + 3y^2\dot{y} = 0$.

11.9. Følgende differentiallikninger kan løses ved å integrere høyre side. Finn den generelle løsningen i hvert tilfelle, og finn også den partikulære løsningen som oppfyller $y(0) = 1$.

1. $y' = 2t$
2. $y' = e^{2t}$
3. $y' = (2t+1)e^{t^2+t}$

11.10. Vis at $y(t) = Ce^{-t} + \frac{1}{2}e^t$ er en løsning av $y' + y = e^t$.

11.11. Løs differensiallikningen $y^2 y' = t+1$. Finn løsningen som oppfyller $y(1) = 1$.

11.12. Løs følgende differensiallikninger:

1. $y' = t^3 - t$
2. $y' = te^t - 1$
3. $e^y y' = t+1$

11.13. Løs følgende differensiallikninger. Her er $y = f(x)$ en funksjon av x, og ikke t som i tidligere oppgaver.

1. $y' = \frac{x}{y}$
2. $y' = e^{x-y}$
3. $x^2 y' = 2$

11.3 Løsninger

11.1

1. $\dot{y} = \frac{1}{2} - 3t + 15t^2$
2. $\dot{y} = 4t(t^4-1) + (2t^2-1)4t^3 = 12t^5 - 4t^3 - 4t$
3. $\dot{y} = 2(\ln t)\frac{1}{t} - 5\frac{1}{t}$
4. $\dot{y} = \frac{1}{t}$
5. $\dot{y} = 5e^{-3t^2+t}(-6t+1)$
6. $\dot{y} = 10te^{-3t} - 15t^2e^{-3t}$

11.2

1. $\int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + C$
2. $\int_0^1 (t^3 + t^5 + \frac{1}{3})dt = \frac{3}{4}$
3. $\int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C$
4. To find the integral $\int te^{t^2} dt$ we substitute $u = t^2$. This gives $\frac{du}{dt} = 2t$ or $\frac{du}{2} = tdt$. We get
$$\int te^{t^2} dt = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{t^2} + C$$
5. We use integration by parts
$$\int uv' dt = uv - \int u'v dt.$$

We write $\int \ln t dt$ as $\int (\ln t) \cdot 1 dt$ and let $u = \ln t$ and $v' = 1$. Thus $u' = \frac{1}{t}$ and $v = t$, and

$$\begin{aligned}\int \ln t dt &= (\ln t)t - \int \frac{1}{t} t dt \\ &= t \ln t - \int 1 dt \\ &= t \ln t - t + C\end{aligned}$$

11.3

1. $y = \int 2t dt = t^2 + C$. The general solution is $y = t^2 + C$. We get $y(0) = C = 1$, so $y = t^2 + 1$ is the particular solution satisfying $y(0) = 1$.
2. $y = \frac{1}{2}e^{2t} + C$ is the general solution. We get $y(0) = \frac{1}{2}e^{2\cdot 0} + C = \frac{1}{2} + C = 1 \implies C = \frac{1}{2}$. Thus $y(t) = \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}$ is the particular solution.
3. To find the integral $\int (2t+1)e^{t^2+t} dt$, we substitute $u = t^2 + t$. We get $\frac{du}{dt} = 2t + 1 \implies du = (2t+1)dt$, so

$$\int (2t+1)e^{t^2+t} dt = \int e^u du = e^u + C = e^{t^2+t} + C.$$

   The general solution is $y = e^{t^2+t} + C$. This gives $y(0) = 1 + C = 1 \implies C = 0$. The particular solution is $y = e^{t^2+t}$.
4. We substitute $u = t^2 + t + 1$ in $\int \frac{2t+1}{t^2+t+1} dt$ to find the general solution $y = \ln(t^2 + t + 1) + C$. We get $y(0) = \ln 1 + C = C = 1$. The particular solution is $y(t) = \ln(t^2 + t + 1) + 1$.

11.4 $y(t) = Ce^{-t} + \frac{1}{2}e^t \implies \dot{y} = -Ce^{-t} + \frac{1}{2}e^t$. From this we get

$$\dot{y} + y = -Ce^{-t} + \frac{1}{2}e^t + Ce^{-t} + \frac{1}{2}e^t = e^t$$

so we see that $\dot{y} + y = e^t$ is satisfied when $y = Ce^{-t} + \frac{1}{2}e^t$.

11.5 The equation $y^2\dot{y} = t + 1$ is separable:

$$y^2 \frac{dy}{dt} = t + 1$$

gives

$$\begin{aligned}\int y^2 dy &= \int (t+1) dt \\ \frac{1}{3}y^3 &= \frac{1}{2}t^2 + t + C \\ y^3 &= \frac{3}{2}t^2 + 3t + 3C\end{aligned}$$

Taking third root and renaming the constant

$$y(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + 3t + K}$$

We want the particular solution with $y(1) = 1$. We have

$$\begin{aligned} y(1) &= \sqrt[3]{\frac{3}{2}1^2 + 3 + K} \\ &= \sqrt[3]{K + \frac{9}{2}} = 1 \implies K + \frac{9}{2} = 1 \end{aligned}$$

We get $K = -\frac{7}{2}$. Thus

$$y(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + 3t - \frac{7}{2}}$$

is the particular solution.

11.6

1. $\dot{y} = t^3 - 1$ gives

$$y = \int (t^3 - 1)dt$$

We get

$$y = \frac{1}{4}t^4 - t + C.$$

2. We must evaluate the integral $\int (te^t - t)dt$. To evaluate $\int te^t dt$ we use integration by parts

$$\int uv' dt = uv - \int u'v dt.$$

with $v' = e^t$ and $u = t$. We get $u' = 1$ and $v = e^t$. Thus

$$\int te^t dt = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C$$

We get

$$y = \int (te^t - t)dt = te^t - e^t - \frac{1}{2}t^2 + C$$

3. $e^y \dot{y} = t + 1$ is separated as

$$e^y dy = (t + 1)dt \implies \int e^y dy = \int (t + 1)dt$$

Thus we get

$$e^y = \frac{1}{2}t^2 + t + C.$$

Taking the natural logarithm on each side, we get

$$y(t) = \ln(\frac{1}{2}t^2 + t + C).$$

11.7

1. $t\dot{y} = y(1-t)$ is separated as

$$\frac{dy}{y} = \frac{1-t}{t}dt \implies \int \frac{dy}{y} = \int \frac{1-t}{t}dt$$

Note that $\frac{1-t}{t} = \frac{1}{t} - 1$, so

$$\ln|y| = \ln|t| - t + C$$

From this we get

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|t|-t+C} = e^{\ln|t|}e^{-t}e^{C} \implies |y| = |t|e^{-t}e^{C}$$

From this we deduce that

$$y(t) = te^{-t}K$$

where K is a constant as the general solution. We will find the particular solution with $y(1) = \frac{1}{e}$. We get

$$y(1) = e^{-1}K = e^{-1} \implies K = 1.$$

The particular solution is

$$y(t) = te^{-t}.$$

2. The equation $(1+t^3)\dot{y} = t^2 y$ is separated as

$$\frac{dy}{y} = \frac{t^2}{1+t^3}dt \implies \int \frac{dy}{y} = \int \frac{t^2}{1+t^3}dt$$

We get

$$\ln|y| = \frac{1}{3}\ln|1+t^3| + C = \ln|1+t^3|^{\frac{1}{3}} + C$$

This gives

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|1+t^3|^{\frac{1}{3}}+C}$$

This gives

$$|y| = |1+t^3|^{\frac{1}{3}}e^{C}$$

from which we deduce the general solution

$$y(t) = K(1+t^3)^{\frac{1}{3}}$$

where K is a constant. We which to find the particular solution with $y(0) = 2$. We get

$$y(0) = K = 2.$$

Thus the particular solution is

$$y(t) = 2(1+t^3)^{\frac{1}{3}}.$$

3. $y\dot{y} = t$ is separated as

$$ydy = tdt \implies \int ydy = \int tdt$$

The general solution is

$$y^2 = t^2 + C$$

where y is define implicitly. We want the particular solution where $y(\sqrt{2}) = 1$. We get

$$1^2 = (\sqrt{2})^2 + C \implies 1 = 2 + C \implies C = -1$$

We have

$$y^2 = t^2 - 1 \implies y = \pm\sqrt{t^2 - 1}$$

since $y(\sqrt{2}) < 0$ we have

$$y(t) = \sqrt{t^2 - 1}$$

as the particular solution.

4. $e^{2t}\frac{dy}{dt} - y^2 - 2y = 1$, is separated as follows:

$$e^{2t}\dot{y} - y^2 - 2y = 1 \implies e^{2t}\dot{y} = 1 + y^2 + 2y = (y+1)^2 \implies$$
$$\frac{dy}{(y+1)^2} = e^{-2t}dt \implies \int \frac{dy}{(y+1)^2} = \int e^{-2t}dt$$

To solve the integral

$$\int \frac{dy}{(y+1)^2}$$

we substitute $u = y+1$. We get $\frac{du}{dy} = 1 \implies dy = du$. Thus

$$\int \frac{dy}{(y+1)^2} = \int \frac{1}{u^2}du = \int u^{-2}du = \frac{1}{-1}u^{-2+1} + C = -u^{-1} + C = -\frac{1}{(y+1)} + C$$

Thus we get

$$-\frac{1}{(y+1)} = \frac{1}{-2}e^{-2t} + C = -\frac{1}{2}e^{-2t} + C \implies -y - 1 = \frac{1}{-\frac{1}{2}e^{-2t} + C}$$

From this we get

$$y(t) = \frac{-1}{-\frac{1}{2}e^{-2t} + C} - 1$$

as the general solution. We want the particular solution with $y(0) = 0$. We get

$$y(0) = \frac{-1}{-\frac{1}{2}e^{0} + C} - 1 = 0$$

From this we get $C = -\frac{1}{2}$. Thus the particular solution is

$$y(t) = \frac{-1}{-\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}} - 1 = \frac{1 - e^{-2t}}{1 + e^{-2t}}.$$

11.8 The differential equation $2t + 3y^2\dot{y} = 0$ can be written as $3y^2\dot{y} = -2t$, and is therefore separable with solution $y^3 = -t^2 + C$, which gives $y = \sqrt[3]{C - t^2}$. We write $f = 2t$ and $g = 3y^2$; then $h = t^2 + y^3$ has the property that $h'_t = f$ and $h'_y = g$, so the equation is exact with solution $t^2 + y^3 = C$, which again gives $y = \sqrt[3]{C - t^2}$.

11.9

1. Differensiallikningen $y' = 2t$ har generell løsning $y = t^2 + C$. Initialbetingelsen $y(0) = 1$ gir $C = 1$, slik at $y = t^2 + 1$ er den partikulære løsningen.
2. Differensiallikningen $y' = e^{2t}$ har generell løsning $y = e^{2t}/2 + C$. Initialbetingelsen $y(0) = 1$ gir $C = 1/2$, slik at $y = (e^{2t} + 1)/2$ er den partikulære løsningen.
3. Differensiallikningen $y' = (2t+1)e^{t^2+t}$ har generell løsning

$$y = \int (2t+1)e^{t^2+t}\,dt = \int e^u\,du = e^u + C = e^{t^2+t} + C$$

hvor vi bruker substitusjonen $u = t^2 + t$, som gir $du = (2t+1)dt$. Initialbetingelsen $y(0) = 1$ gir $C = 0$, slik at $y = e^{t^2+t}$ er den partikulære løsningen.

11.10 Dersom $y(t) = Ce^{-t} + \frac{1}{2}e^t$, så er $y' = -Ce^{-t} + \frac{1}{2}e^t$, og vi har at

$$y' + y = e^t$$

11.11 Differensiallikningen $y^2y' = t + 1$ er separert, og integrasjon gir

$$\int y^2\,dy = \int t + 1\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{2}t^2 + t + C$$

Dette gir generell eksplisitt løsning

$$y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + 3t + 3C}$$

Betingelsen $y(1) = 1$ gir $1 = 3/2 + 3 + 3C$, eller $3C = -7/2$ og partikulær løsning

$$y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + 3t - \frac{7}{2}}$$

11.12

1. $y = \int t^3 - t\,dt = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + C$
2. $y = \int te^t - 1\,dt = te^t - e^t - t + C$ (ved delvis integrasjon)

3. $\int e^y\,dy = \int t+1\,dt$ gir $e^y = \frac{1}{2}t^2 + t + C$, eller $y = \ln\left(\frac{1}{2}t^2 + t + C\right)$

11.13

1. Vi separerer som $yy' = x$, som gir $\int y\,dy = \int x\,dx$ eller $y^2/2 = x^2/2 + C$. Eksplisitt generell løsning blir $y = \pm\sqrt{x^2 + 2C}$.
2. Vi separerer som $e^y y' = e^x$, som gir $\int e^y\,dy = \int e^x\,dx$ eller $e^y = e^x + C$. Eksplisitt generell løsning blir $y = \ln(e^x + C)$.
3. Vi separerer som $y' = 2/x^2$, som gir $y = \int 2x^{-2}\,dx = -2/x + C$.

Forelesning 12
Første ordens lineære differensiallikninger

12.1 Kort sammendrag

En differensial-likning av første orden kalles *lineær* om den kan skrives på formen

$$y' + a(t)y = b(t)$$

der $a(t), b(t)$ er uttrykk i t. Den kan eventuelt også skrives som $y' = b(t) - a(t)y$, slik at uttrykket $F(y,t) = b(t) - a(t)y$ er lineær som en funksjon i y. Eksempler på første ordens lineære differensiallikninger er

$$y' + 2y = 0 \quad \text{og} \quad y' - 2ty = t$$

En slik likning kalles *homogen* om $b(t) = 0$, og *inhomogen* ellers. Endel lineære differensiallikninger av første orden er separable, men ikke alle.

Homogene likninger med konstante koeffisienter. Likningen kalles homogen med konstante koeffisienter om den kan skrives $y' + ay = 0$ der a er en konstant. En slik likning har generell løsning $y = Ce^{rt}$ der r er en rot i den *karakteristiske likningen*

$$r + a = 0$$

som har løsning $r = -a$. Derfor er løsningen $y = Ce^{-at}$.

Inhomogene likninger med konstante koeffisienter. Likningen kalles inhomogen med konstante koeffisienter om den kan skrives $y' + ay = b$ der a,b er konstanter. En slik likning har generell løsning $y = y_h + y_p$, der y_h er den generelle løsningen av den homogene likningen $y' + ay = 0$ (som altså er $y_h = Ce^{-at}$ fra tilfellet ovenfor), og y_p er en partikulær løsning av den inhomogene likningen $y' + ay = b$ (en løsning av denne er for eksempel $y = b/a$). Derfor er løsningen

$$y = y_h + y_p = Ce^{-at} + \frac{b}{a}$$

Integrerende faktor. Dersom likningen har formen $y' + a(t)y = b(t)$ og $a(t)$ ikke er en konstant, kan vi ikke bruke metodene ovenfor. Da bruker vi istedet metoden med *integrerende faktor*. Den integrerende faktoren $u = u(t)$ er et uttrykk vi kan multiplisere likningen med slik at venstresiden blir $(uy)'$ ved bruk av produktregelen $(uy)' = uy' + u'y$ baklengs. For at dette skal holde, må $u(t)a(t) = u'(t)$, og vi kan derfor bruke funksjonen

$$u(t) = e^{\int a(t)\,dt}$$

som integrerende faktor. Vi får dermed differensiallikningen

$$uy' + u'y = ub(t) \quad \text{eller} \quad (uy)' = ub(t)$$

Det betyr at $uy = \int ub(t)\,dt$, og derfor er den generelle løsningen

$$y = \frac{1}{u}\int ub(t)\,dt = e^{-\int a(t)\,dt}\int e^{\int a(t)\,dt}b(t)\,dt$$

For eksempel har den lineære differensiallikningen $y' - 2ty = t$ integrerende faktor $u = e^{-t^2}$ siden $\int(-2t)\,dt = -t^2 + C$. Vi kan dermed løse denne likningen ved å multiplisere med $u = e^{-t^2}$:

$$\begin{aligned}
y' - 2ty &= t \\
e^{-t^2}y' - 2te^{-t^2}y &= te^{-t^2} \\
\left(e^{-t^2}y\right)' &= te^{-t^2} \\
e^{-t^2}y &= \int te^{-t^2}\,dt \\
y &= e^{t^2}\int te^{-t^2}\,dt \\
y &= e^{t^2}\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2} + C\right) \\
y &= -\frac{1}{2} + Ce^{t^2}
\end{aligned}$$

Stabilitet. La $y = y(t)$ være løsningen av en lineær differensiallikning. Vi definerer den langsiktige tilstanden av variabelen y til å være

$$\bar{y} = \lim_{t\to\infty} y(t)$$

dersom grenseverdien eksisterer. I så fall sier vi at $\bar{y}$ er den *stabile likevektstilstanden* til systemet. Hvis grenseverdien ikke eksisterer, så er systemet ustabilt. Verdien av den ubestemte konstanten C avhenger av en initialbetingelse, og dersom likevekten $\bar{y}$ er den samme for alle verdier av C, kalles systemet globalt asymptotisk stabilt. Det betyr at langsiktig likevekt er den samme, uavhengig av starttilstand.

12.2 Oppgaver

12.1. Finn den generelle løsningen av $y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}$. Er løsningen stabil? Bestem likevektstilstanden. Tegn noen typiske løsninger i et koordinatsystem.

12.2. Finn den generelle løsningen i hvert tilfelle:

1. $y' + y = 10$
2. $y' - 3y = 27$
3. $4y' + 5y = 100$

12.3. Finn i hvert enkelt tilfelle den generelle løsningen. Finn også den partikulære løsningen som tilfredsstiller $y(0) = 1$.

1. $y' - 3y = 5$
2. $3y' + 2y + 16 = 0$
3. $y' + 2y = t^2$

12.4. Finn den generelle løsningen:

1. $ty' + 2y + t = 0, \quad t \neq 0$
2. $y' - \frac{1}{4}y = t, \quad t > 0$
3. $y' - \frac{t}{t^2-1}y = t, \quad t > 1$

12.5. Finn i hvert enkelt tilfelle den generelle løsningen. Finn også den partikulære løsningen som tilfredsstiller den gitte initialbetingelsen.

1. $y' = 4(y-1)(y-3), \quad y(0) = 2$
2. $e^{2t}y' - y^2 - 2y = 1, \quad y(1) = 1$
3. $y' - \frac{t}{t^2-1}y = 0, \quad y(0) = 1$

12.6. Prøve-eksamen i ELE 3719 fra 05/2011, Oppgave 3

1. Løs differensiallikningen $e^t y' = y^2$, $y(0) = 1/2$.
2. Finn den generelle løsningen av differensiallikningen $t^3 y' + 2y = 1$.

12.3 Løsninger

12.1 Likningen $y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}$ har generell løsning $y = y_h + y_p$ gitt ved

$$y = Ce^{-t/2} + \frac{1}{2}$$

Systemet er stabilt siden $\lim_{t\to\infty} y(t) = C \cdot 0 + 1/2 = 1/2$, og likevektstilstanden er $\bar{y} = 1/2$. Legg merke til at likevektstilstanden ikke avhenger av C.

12.2 I hvert tilfelle kan vi finne skrive likningen på formen $y' + ay = b$ og den generelle løsningen er $y = y_h + y_p$ der $y_h = Ce^{-at}$ og $y_p = b/a$. Dette gir:

1. $y = Ce^{-t} + 10$
2. $y = Ce^{3t} - 9$
3. $y = Ce^{-5t/4} + 20$

12.3

1. Den generelle løsningen er $y = Ce^{-at} + b/a = Ce^{3t} - 5/3$, og $y(0) = 1$ gir $1 = C - 5/3$, eller $C = 8/3$, som gir $y = 1/3(8e^{3t} - 5)$.
2. Den generelle løsningen er $y = Ce^{-at} + b/a = Ce^{-2t/3} - 8$, og $y(0) = 1$ gir $1 = C - 8$, eller $C = 9$, som gir $y = 9e^{-2t/3} - 8$.
3. Den generelle løsningen finner vi ved å multiplisere med integrerende faktor e^{2t}, som gir
$$(ye^{2t})' = t^2e^{2t} \quad \Rightarrow \quad y = e^{-2t}\int t^2e^{2t}\,dt$$
Ved hjelp av delvis integrasjon (to ganger), finner vi det siste integralet og vi får
$$y = e^{-2t}(\frac{1}{2}t^2e^{2t} - \frac{1}{2}te^{2t} + \frac{1}{4}e^{2t} + C) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} + Ce^{-2t}$$
Betingelsen $y(0) = 1$ gir $1 = 1/4 + C$, eller $C = 3/4$, som gir $y = t^2/2 - t/2 + 1/4 + 3e^{-2t}/4$.

12.4 Vi bruker i hvert tilfelle integrerende faktor:

1. Likningen $ty' + 2y + t = 0$ kan skrives som $y' + (2/t)y = -1$, og integrerende faktor blir $e^{2\ln t} = t^2$. Dette gir
$$(yt^2)' = -t^2 \quad \Rightarrow \quad y = t^{-2}(-\frac{1}{3}t^3 + C) = -\frac{1}{3}t + Ct^{-2}$$
2. Likningen $y' - \frac{1}{4}y = t$ har integrerende faktor $e^{-t/4}$, og dette gir
$$(ye^{-t/4})' = te^{-t/4} \quad \Rightarrow \quad y = e^{t/4}\int te^{-t/4}dt$$
Vi løser integralet ved delvis integrasjon og dette gir:
$$y = e^{t/4}(t(-4e^{-t/4}) - \int(-4)e^{-t/4}dt) = -4t - 16 + Ce^{t/4}$$
3. Likningen $y' - \frac{t}{t^2-1}y = t$ har integrerende faktor $(t^2-1)^{-1/2} = 1/\sqrt{t^2-1}$ siden $\int -t/(t^2-1)dt = -\ln(t^2-1)/2$ når $t > 1$. Dette gir
$$(y(t^2-1)^{-1/2})' = t(t^2-1)^{-1/2} \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{t^2-1}\int t(t^2-1)^{-1/2}dt$$
Vi løser integralet ved substitusjonen $u = t^2 - 1$, og dette gir:
$$y = \sqrt{t^2-1}\left((t^2-1)^{1/2} + C\right) = t^2 - 1 + C\sqrt{t^2-1}$$

12.5

1. Likningen $y' = 4(y-1)(y-3)$ er ikke lineær, men separabel. Separasjon gir

$$\int \frac{1}{(y-1)(y-3)}\,dy = \int 4dt$$

For å løse det først integralet, må vi skrive om brøken som en sum av brøker med nevnere av grad én:

$$\frac{1}{(y-1)(y-3)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y-3} \quad \Rightarrow \quad 1 = A(y-3) + B(y-1)$$

Setter vi inn $y = 3$ ser vi at $B = 1/2$, og setter vi inn $y = 1$ ser vi at $A = -1/2$. Integralet blir derfor

$$\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-3} - \frac{1}{y-1}\right) dy = \frac{1}{2}\left(\ln|y-3| - \ln|y-1|\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-3}{y-1}\right| + C$$

og vi får

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-3}{y-1}\right| = 4t + C \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{y-3}{y-1}\right| = e^{8t+2C} = e^{2C}e^{8t}$$

eller $(y-3)/(y-1) = Ke^{8t}$ med $K = \pm E^{2C}$. Vi løser for y og får

$$y - 3 = (y-1)Ke^{8t} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3 - Ke^{8t}}{1 - Ke^{8t}}$$

Betingelsen $y(0) = 2$ gir $2 = (3-K)/(1-K)$, eller $2 - 2K = 3 - K$, som gir $K = -1$. Den partikulære løsningen er derfor

$$y = \frac{3 + e^{8t}}{1 + e^{8t}}$$

2. Likningen $e^{2t}y' - y^2 - 2y = 1$ er ikke lineær men separabel, siden den kan skrives $e^{2t}y' = y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2$. Separasjon gir

$$\int \frac{1}{(y+1)^2}\,dy = \int e^{-2t}\,dt$$

Dette gir $-(y+1)^{-1} = -\frac{1}{2}e^{-2t} + C$, som kan skrives som

$$\frac{1}{y+1} = \frac{1}{2}e^{-2t} - C = \frac{1 - 2Ce^{2t}}{2e^{2t}} \quad \Rightarrow \quad y + 1 = \frac{2e^{2t}}{1 - 2Ce^{2t}}$$

Betingelsen $y(1) = 1$ gir $2 = 2e^2/(1-2Ce^2)$, eller $2 - 4e^2C = 2e^2$. Dette gir $2C = (1-e^2)/e^2$, og løsningen blir

$$y = \frac{2e^{2t}}{1-(1-e^2)e^{2t-2}} - 1 = \frac{2e^{2t}}{1-e^{2t-2}+e^{2t}} - 1$$

3. Likningen $y' - \frac{t}{t^2-1}y = 0$ er lineær med integrerende faktor $(1-t^2)^{-1/2}$ siden $\int -t/(t^2-1)dt = -\ln|t^2-1|/2 + C = -\ln(1-t^2)/2 + C$ når $-1 < t < 1$. Dette gir
$$(y(1-t^2)^{-1/2})' = 0 \quad \rightarrow \quad y = C\sqrt{1-t^2}$$
Betingelsen $y(0) = 1$ gir $1 = C$, eller $C = 1$, så den partikulære løsningen er
$$y = \sqrt{1-t^2}$$

12.6 Prøve-eksamen i ELE 3719 fra 05/2011, Oppgave 3

1. Differensiallikningen $e^t y' = y^2$ er separabel, og vi skriver den på separert form
$$\frac{1}{y^2}\,y' = e^{-t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y^2}\,\mathrm{dy} = e^{-t}\,\mathrm{dt}$$
Integrasjon gir dermed
$$-\frac{1}{y} = -e^{-t} + C \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{e^{-t} - C}$$
Vi setter inn for initialbetingelsen $y(0) = 1/2$, som gir $1/2 = 1/(1-C)$ og dermed $C = -1$, og løsningen er
$$y = \frac{1}{e^{-t}+1} = \frac{\mathbf{e^t}}{\mathbf{1+e^t}}$$

2. Differensiallikningen $t^3y' + 2y = 1$ er lineær, og vi skriver den på standard form $y' + a(t)y = b(t)$:
$$t^3y' + 2y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y' + \frac{2}{t^3}y = \frac{1}{t^3}$$
Vi finner integrerende faktor u:
$$\int \frac{2}{t^3}\,\mathrm{dt} = \int 2t^{-3}\,\mathrm{dt} = -t^{-2} + C \quad \Rightarrow \quad u = e^{-t^{-2}} = e^{-1/t^2}$$
Vi multipliserer differensiallikningen med integrerende faktor u og får
$$y' + \frac{2}{t^3}y = \frac{1}{t^3} \quad \Leftrightarrow \quad \left(ye^{-1/t^2}\right)' = \frac{1}{t^3}e^{-1/t^2}$$
Integrasjon og divisjon med u gir generell løsning
$$ye^{-1/t^2} = \int \frac{1}{t^3}e^{-1/t^2}\,\mathrm{dt} = \frac{1}{2}e^{-1/t^2} + C \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y = \frac{1}{2} + Ce^{1/t^2}}$$

Forelesning 13
Andre ordens lineære differensiallikninger

13.1 Kort sammendrag

En differensial-likning av andre orden kalles *lineær* om den kan skrives på formen

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t)$$

der $a(t), b(t), f(t)$ er uttrykk i t, og den har *konstante koeffisienter* dersom $a(t) = a$ og $b(t) = b$ er konstanter, slik at den får formen $y'' + ay' + by = f(t)$. Eksempler på andre ordens lineære differensiallikninger er

$$y'' + 2y' - 3y = 0 \quad \text{og} \quad y'' - 3y' + 2y = 8$$

Likningen kalles *homogen* om $f(t) = 0$, og *inhomogen* ellers.

Homogene likninger med konstante koeffisienter. En slik homogen likning kan skrives $y'' + ay' + by = 0$ der a,b er konstanter. Vi har at $y = e^{rt}$ er en løsning av denne likningen hvis og bare hvis r er en rot i den *karakteristiske likningen*

$$r^2 + ar + b = 0 \quad \text{med løsning} \quad r = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Det er tre ulike tilfeller som kan inntreffe:

1. Hvis $a^2 - 4b > 0$, så er det to ulike karakteristiske løsninger $r_1 \neq r_2$, og den generelle løsningen av den homogene differensiallikningen er

$$y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

2. Hvis $a^2 - 4b = 0$, så har den karakteristiske likningen en dobbelrot $r = -a/2$, og den generelle løsningen av den homogene differensiallikningen er

$$y = C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt} = (C_1 + C_2 t)e^{rt}$$

3. Hvis $a^2 - 4b < 0$, så har den karakteristiske løsninger ingen (reelle) løsninger. Den generelle løsningen av den homogene differensiallikningen er

$$y = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))$$

der $\alpha = -a/2$ og $\beta = \sqrt{4b - a^2}/2$.

Inhomogene likninger med konstante koeffisienter. En slik inhomogen likning kan skrives $y'' + ay' + by = f(t)$ der a,b er konstanter og $f(t) \neq 0$ er et uttrykk i t. Den har generell løsning $y = y_h + y_p$, der y_h er den generelle løsningen av den homogene likningen $y'' + ay' + by = 0$, og y_p er en partikulær løsning av den inhomogene likningen $y'' + ay' + by = f(t)$.

Stabilitet. La $y = y(t)$ være løsningen av en lineær differensiallikning. Vi definerer den langsiktige tilstanden av variabelen y til å være

$$\bar{y} = \lim_{t \to \infty} y(t)$$

dersom grenseverdien eksisterer. I så fall sier vi at $\bar{y}$ er den *stabile likevektstilstanden* til systemet. Hvis grenseverdien ikke eksisterer, så er systemet ustabilt. Verdien av de ubestemte konstantene C_1, C_2 avhenger av en initialbetingelsene, og dersom likevekten $\bar{y}$ er den samme for alle verdier av C_1, C_2, kalles systemet globalt asymptotisk stabilt. Det betyr at langsiktig likevekt er den samme, uavhengig av starttilstand.

13.2 Oppgaver

13.1. Vis at $y = e^{rt}$ er en løsning av $y'' + ay' + by = 0$ hvis og bare hvis r er en løsning av likningen $r^2 + ar + b = 0$.

13.2. Finn i hvert enkelt tilfelle den generelle løsningen:

1. $y'' - 3y = 0$
2. $y'' + 4y' + 8y = 0$
3. $3y'' + 8y' = 0$
4. $4y'' + 4y' + y = 0$
5. $y'' + y' - 6y = 0$

13.3. Løs differensiallikningen $y'' + y' - 6y = 7$.

13.4. Finn løsningen av differensiallikningen

$$y'' - 10y' + 25y = 4$$

som tilfredsstiller $y(0) = 29/25$ og $y(1) = 2e^5 + 4/25$.

13.5. Ta utgangspunkt i differensiallikningen $y'' + ay' + by = 0$, og anta at $a^2 - 4b = 0$ slik at den karakteristiske likningen har en dobbelrot r. La $y(t) = u(t)e^{rt}$, og vis at

$y(t)$ er en løsning av differensiallikningen hvis og bare hvis $u'' = 0$. Konkluder fra dette at $y(t) = (A+Bt)e^{rt}$ er den generelle løsningen.

13.6. Eksamen i ELE 3719 fra 16/06/2011, Oppgave 3
Løs følgende initialverdiproblemer:

1. $y'' + 3y' - 28y = 14,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -1.$
2. $y' + 2e^t y = e^t,\ y(0) = 1.$
3. $ty' = 1 + t + y + ty,\ y(1) = 1.$

13.7. Eksamen i ELE 3719 fra 28/11/2011, Oppgave 5
Finn den generelle løsningen til følgende differensiallikninger:

1. $y'' + 8y' + 16y = 32$
2. $t^2y' + 2ty = te^{-t}$

13.8. Eksamen i ELE 3719 fra 14/06/2012, Oppgave 5
Finn løsningen $y = y(t)$ av følgende differensiallikninger med initialbetingelse:

1. $yy' = 1, \quad y(5) = -3$
2. $y' - ty = t, \quad y(0) = 2$
3. $y'' = y + 2, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

13.9. Prøve-eksamen i ELE 3719 fra 05/2013, Oppgave 3
Finn løsningen $y = y(t)$ av følgende differensiallikninger med initialbetingelse:

1. $y' + 3y = e^t, \quad y(0) = 3$
2. $y' = (t-2)y^2, \quad y(0) = 1$
3. $y'' + 5y' + 6y = 1, \quad y(0) = 7/6,\ y'(0) = 0$

13.10. Eksamen i ELE 3719 fra 13/06/2013, Oppgave 3
Finn løsningen $y = y(t)$ av følgende differensiallikninger med initialbetingelse:

1. $y' = 3 - y, \quad y(0) = 2$
2. $ty' + (1-t)y = e^t$ for $t > 0, \quad y(1) = 3$
3. $y'' - 3y' + 2y = 2, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

13.11. Eksamen i ELE 3719 fra 27/11/2013, Oppgave 3
Finn løsningen $y = y(t)$ av følgende differensiallikninger med initialbetingelse:

1. $y' + 2y = 6, \quad y(0) = 2$
2. $y'' - 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 4$

13.12. Eksamen i ELE 3719 fra 10/06/2014, Oppgave 4
Finn løsningen $y = y(t)$ av følgende differensiallikninger med initialbetingelse:

1. $y' = yt^2 + t^2, \quad y(0) = 2$
2. $y' + 4y = 4t, \quad y(0) = 2$
3. $y'' - 5y' + 6y = 4, \quad y(0) = 5/3,\ y(1) = 2/3$

13.3 Løsninger

13.1 Vi setter inn $y = e^{rt}$ i likningen $y'' + ay' + by = 0$, der a,b er gitte konstanter og r er en konstant vi skal bestemme. Vi får:

$$r^2 e^{rt} + a(re^{rt}) + b(e^{rt}) = (r^2 + ar + b)e^{rt} = 0$$

Denne betingelsen er oppfyllt hvis og bare hvis $r^2 + ar + b = 0$, siden $e^{rt} \neq 0$.

13.2 Vi løser i hvert enkelt tilfelle den karakteristiske likningen for å finne den generelle løsningen til differensiallikningen:

1. $r^2 - 3 = 0$ gir $r = \pm\sqrt{3}$, og $y = C_1 e^{\sqrt{3}t} + C_2 e^{-\sqrt{3}t}$
2. $r^2 + 4r + 8 = 0$ gir $r = -2 \pm 2\sqrt{-1}$, og $y = e^{-2t}(C_1 \sin(2t) + C_2 \cos(2t))$
3. $3r^2 + 8r = 0$ gir $r = 0$ og $r = -8/3$, og $y = C_1 + C_2 e^{-8t/3}$
4. $4r^2 + 4r + 1 = 0$ gir $r = -1/2 \pm 0$, og $y = (C_1 + C_2 t)e^{-t/2}$
5. $r^2 + r - 6 = 0$ gir $r = -1/2 \pm 5/2$, og $y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}$

13.3 Likningen $y'' + y' - 6y = 7$ har løsning $y = y_h + y_p$, og $y_h = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}$ (se forrige oppgave). Dessuten er $y_p = -7/6$, så den generelle løsningen er

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t} - \frac{7}{6}$$

13.4 Likningen $y'' - 10y' + 25y = 4$ har løsning $y = y_h + y_p$, og $y_h = (C_1 + C_2\,t)e^{5t}$ (siden den karakteristiske likningen $r^2 - 10r + 25 = 0$ har en dobbelrot $r = 5$). Dessuten er $y_p = 4/25$, så den generelle løsningen er

$$y = (C_1 + C_2\,t)e^{5t} + \frac{4}{25}$$

Initialbetingelsene $y(0) = 29/25$ og $y(1) = 2e^5 + 4/25$ gir $C_1 + 4/25 = 29/25$, eller $C_1 = 1$, og $(1 + C_2)e^5 + 4/25 = 2e^5 + 4/25$, eller $C_2 = 1$. Den generelle løsningen er derfor

$$y = (1 + t)e^{5t} + \frac{4}{25}$$

13.5 Vi antar at $a^2 - 4b = 0$, og at $r = -a/2$ derfor er en dobbel rot i den karakteristiske likningen $r^2 + ar + b = 0$ (gitt i oppgaven, men også lett å sjekke). Setter vi $y = ue^{rt}$, så blir $y' = u'e^{rt} + ure^{rt}$ og $y'' = u''e^{rt} + 2u're^{rt} + ur^2e^{rt}$, og innsetting i differensiallikningen gir da:

$$(u''e^{rt} + 2u're^{rt} + ur^2e^{rt}) + a(u'e^{rt} + ure^{rt}) + b(ue^{rt}) = 0$$

Vi kan dele med $e^{rt} \neq 0$ i likningen, og vi får da at

$$u'' + (2r + a)u' + (r^2 + ar + b)u = 0$$

Siden $r = -a/2$ så er $2r + a = 0$, og $r^2 + ar + b = 0$ siden r er en løsning av den karakteristiske likningen. Dermed blir likningen $u'' = 0$, og $y = ue^{rt}$ er en løsning av differensiallikningen hvis og bare hvis $u'' = 0$. Betingelsen $u'' = 0$ betyr at $u' = A$ og at $u = At + B$ for konstanter A,B, så $y = (At + B)e^{rt}$ er den generelle løsningen.

13.6 Eksamen i ELE 3719 fra 16/06/2011, Oppgave 3

1. Differensiallikningen $y'' + 3y' - 28y = 14$ er lineær av andre orden, og har løsning $y = y_h + y_p$. Vi finner først y_h ved å løse den homogene likningen $y'' + 3y' - 28y = 0$. Den karakteristiske likningen er

$$r^2 + 3r - 28 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 4, -7$$

Dette gir $y_h = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-7t}$. Vi finner så en partikulær løsning på formen $y_p = A$ med A konstant, som gir

$$-28A = 14 \quad \Leftrightarrow \quad A = -\frac{1}{2}$$

Dermed er den generelle løsningen gitt ved $y = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-7t} - 1/2$. Vi setter inn initialbetingelsene $y(0) = 2,\ y'(0) = -1$, og det gir

$$C_1 + C_2 - 1/2 = 2,\ 4C_1 - 7C_2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = \frac{3}{2},\ C_2 = 1$$

Dermed er løsningen $\mathbf{y = \frac{3}{2}e^{4t} + e^{-7t} - \frac{1}{2}}$.

2. Differensiallikningen $y' + 2e^t y = e^t$ er lineær, og vi finner integrerende faktor u:

$$\int 2e^t \,\mathrm{dt} = 2e^t + C \quad \Rightarrow \quad u = e^{2e^t}$$

Vi multipliserer differensiallikningen med integrerende faktor u og får

$$y' + 2e^t y = e^t \quad \Leftrightarrow \quad \left(ye^{2e^t}\right)' = e^t e^{2e^t}$$

Integrasjon og divisjon med u gir generell løsning

$$ye^{2e^t} = \int e^t e^{2e^t} \,\mathrm{dt} = \frac{1}{2}e^{2e^t} + C \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2} + Ce^{-2e^t}$$

Vi setter inn initialbetingelsen $y(0) = 1$, og dette gir

$$1 = \frac{1}{2} + Ce^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{1}{2}e^2$$

Dermed blir løsningen $\mathbf{y = \frac{1}{2}(1 + e^{2-2e^t})}$.

3. Differensiallikningen $ty' = 1 + t + y + ty = (1+t)(1+y)$ er separabel, og den separerte formen av likningen blir

$$\frac{1}{1+y}\,y' = \frac{1+t}{t} = \frac{1}{t}+1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+y}\,\mathrm{dy} = \left(\frac{1}{t}+1\right)\mathrm{dt}$$

Integrasjon gir dermed

$$\int \frac{1}{1+y}\,\mathrm{dy} = \int \left(\frac{1}{t}+1\right)\mathrm{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \ln|1+y| = \ln|t| + t + C$$

Vi løser for y og får

$$1+y = \pm e^{\ln|t|+t+C} = Kte^t \quad \Leftrightarrow \quad y = Kte^t - 1$$

der $K = \pm e^C$. Vi setter inn for initialbetingelsen $y(1) = 1$, som gir $1 = Ke - 1$ og dermed $K = 2/e$. Løsningen er derfor $\mathbf{y = 2te^{t-1} - 1}$.

13.7 Eksamen i ELE 3719 fra 28/11/2011, Oppgave 5

1. Differensiallikningen $y'' + 8y' + 16y = 32$ er lineær av andre orden, og har løsning $y = y_h + y_p$. Vi finner først y_h ved å løse den homogene likningen $y'' + 8y' + 16y = 0$. Den karakteristiske likningen er

$$r^2 + 8r + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = -4, -4$$

Dette gir $y_h = C_1e^{-4t} + C_2te^{-4t}$. Vi finner så en partikulær løsning på formen $y_p = A$ med A konstant, som gir

$$16A = 32 \quad \Leftrightarrow \quad A = 2$$

Dermed er den generelle løsningen gitt ved $y = \mathbf{C_1e^{-4t} + C_2te^{-4t} + 2}$.

2. Differensiallikningen $t^2y' + 2ty = te^{-t}$ er lineær, og vi ser at venstresiden er $(t^2y)'$. Dermed får vi

$$t^2y = \int te^{-t}\,\mathrm{dt} = t(-e^{-t}) - \int 1\cdot(-e^{-t})\,\mathrm{dt} = -te^{-t} - e^{-t} + \mathscr{C}$$

Dette gir

$$y = \frac{\mathbf{-t-1+Ce^t}}{\mathbf{t^2e^t}}$$

13.8 Eksamen i ELE 3719 fra 14/06/2012, Oppgave 5

1. Differensiallikningen $yy' = 1$ er separabel, og vi har

$$\int y\,\mathrm{dy} = \int 1\,\mathrm{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 = t + \mathscr{C}$$

Dette gir $y^2 = 2t + 2\mathscr{C}$, og initialbetingelsen $y(5) = -3$ gir $9 = 10 + 2\mathscr{C}$, eller $2\mathscr{C} = -1$. Dermed har vi løsningen

$$y = -\sqrt{\mathbf{2t-1}}$$

2. Differensiallikningen $y' - ty = t$ er lineær, med integrerende faktor $u = e^{-t^2/2}$ siden vi har at $\int -t\,\mathrm{dt} = -t^2/2 + \mathscr{C}$. Dette gir

$$(ye^{-t^2/2})' = te^{-t^2/2} \quad \Rightarrow \quad y = e^{t^2/2}\int te^{-t^2/2}\,\mathrm{dt} = e^{t^2/2}(\mathscr{C} - e^{-t^2/2}) = \mathscr{C}e^{t^2/2} - 1$$

Initialbetingelsen $y(0) = 2$ gir $2 = \mathscr{C}e^0 - 1$, som gir $\mathscr{C} = 3$. Dermed er løsningen

$$y = \mathbf{3e^{t^2/2} - 1}$$

3. Differensiallikningen $y'' = y + 2$ er andre ordens lineær, og kan skrives $y'' - y = 2$. Den har løsning $y = y_h + y_p$, og vi har karakteristisk liking $r^2 - 1 = 0$, med løsning $r = \pm 1$, så den homogene løsningen er $y_h = C_1e^t + C_2e^{-t}$. Den inhomogene likningen har den konstante løsningen $y = -2$, så den generelle løsningen er

$$y = C_1e^t + C_2e^{-t} - 2$$

Initialbetingelsene $y(0) = 0, y'(0) = 0$ gir $C_1 + C_2 - 2 = 0$ og $C_1 - C_2 = 0$, som har løsning $C_1 = C_2 = 1$. Dermed er løsningen

$$y = \mathbf{e^t + e^{-t} - 2}$$

13.9 Prøve-eksamen i ELE 3719 fra 05/2013, Oppgave 3

1. Likningen $y' + 3y = e^t$ er lineær, med integrerende faktor e^{3t}. Dermed kan den skrives som

$$(ye^{3t})' = e^te^{3t} = e^{4t} \quad \Rightarrow \quad ye^{3t} = \int e^{4t}\,\mathrm{dt} = \frac{1}{4}e^{4t} + \mathscr{C}$$

Dette gir $y = e^t/4 + \mathscr{C}e^{-3t}$, og $y(0) = 3$ gir $3 = 1/4 + \mathscr{C}$, eller $\mathscr{C} = 11/4$. Dermed er løsningen

$$y = \frac{e^t + 11e^{-3t}}{4}$$

2. Likningen $y' = (t-2)y^2$ er separabel, og kan skrives som

$$1/y^2 \cdot y' = t - 2 \quad \Rightarrow \quad \int y^{-2}\,\mathrm{dy} = \int t - 2\,\mathrm{dt}$$

Dette gir $-1/y = t^2/2 - 2t + \mathscr{C}$. Initalbetingelsen $y(0) = 1$ gir $-1 = \mathscr{C}$, og dermed er $-1/y = t^2/2 - 2t - 1$. Dette gir løsning

$$y = -\frac{1}{t^2/2 - 2t - 1} = \frac{-2}{t^2 - 4t - 2}$$

3. Likningen $y'' + 5y' + 6y = 1$ er andre ordens lineær, og har løsning $y = y_h + y_p$. Den homogene løsningen y_h finner vi ved å løse den karakteristiske likningen

$$r^2 + 5r + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -2, -3$$

Dermed er $y_h = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$. Vi finner en konstant partikulær løsning $y_p = A$ ved innsetting, som gir $6A = 1$, eller $y_p = A = 1/6$. Dermed blir den generelle løsningen $y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} + 1/6$. Initialbetingelsene $y(0) = 7/6$, $y'(0) = 0$ gir $7/6 = C_1 + C_2 + 1/6$ og $0 = -2C_1 - 3C_2$. Vi løser dette likningssystemet og får $C_1 = 3$ og $C_2 = -2$, som gir løsning

$$y = 3e^{-2t} - 2e^{-3t} + 1/6$$

13.10 Eksamen i ELE 3719 fra 13/06/2013, Oppgave 3

1. Differensiallikningen $y' = 3 - y$ er både separabel og lineær, og vi velger og løse den som en lineær differensiallikning på standard form $y' + y = 3$ med integrerende faktor e^t, slik at

$$(ye^t)' = 3e^t \quad \Rightarrow \quad ye^t = 3e^t + \mathscr{C} \quad \Rightarrow \quad y = 3 + \mathscr{C} e^{-t}$$

Initialbetingelsen $y(0) = 2$ gir $2 = 3 + C$ eller $C = -1$, og løsningen blir derfor $y = 3 - e^{-t}$.

2. Differensiallikningen $ty' + (1-t)y = e^t$ for $t > 0$ er lineær, og kan skrives på standard form som

$$y' + \frac{1-t}{t} y = \frac{e^t}{t}$$

med $a(t) = (1-t)/t = 1/t - 1$. Siden vi har at

$$\int a(t)\ \mathrm{dt} = \ln t - t + \mathscr{C}$$

så kan vi bruke integrerende faktor $u = e^{\ln t - t} = te^{-t}$, og dette gir

$$(yte^{-t})' = 1 \quad \Rightarrow \quad yte^{-t} = t + \mathscr{C} \quad \Rightarrow \quad y = e^t + \mathscr{C}\,\frac{e^t}{t} = e^t \left(1 + \frac{\mathscr{C}}{t}\right)$$

Initialbetingelsen $y(1) = 3$ gir $3 = e(1 + \mathscr{C})$, som gir $\mathscr{C} = 3/e - 1$. Dermed er løsningen

$$y = e^t \left(1 + \frac{3/e - 1}{t}\right) = e^t\ \frac{t - 1 + 3/e}{t} = \frac{(t-1)e^t + 3e^{t-1}}{t}$$

3. Differensiallikningen $y'' - 3y' + 2y = 2$ er andre ordens lineær, og har løsning $y = y_h + y_p$. Den karakteristisk likingen er $r^2 - 3r + 2 = 0$, og har løsning $r = 1$ og $r = 2$, så den homogene løsningen er $y_h = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$. Den inhomogene likningen har den konstante løsningen $y = 1$, så den generelle løsningen er

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 1$$

Initialbetingelsene $y(0) = 0, y'(0) = 1$ gir $C_1 + C_2 + 1 = 0$ og $C_1 + 2C_2 = 1$, som har løsning $C_1 = -3$ og $C_2 = 2$. Dermed er løsningen

$$y = \mathbf{-3e^t + 2e^{2t} + 1}$$

13.11 Eksamen i ELE 3719 fra 27/11/2013, Oppgave 3

1. Differensiallikningen $y' + 2y = 6$ er både separabel og lineær, og vi velger å løse den som en lineær differensiallikning på standard form $y' + 2y = 6$ med integrerende faktor e^{2t}, slik at

$$(ye^{2t})' = 6e^{2t} \quad \Rightarrow \quad ye^{2t} = 3e^{2t} + \mathscr{C} \quad \Rightarrow \quad y = 3 + \mathscr{C}e^{-2t}$$

   Initialbetingelsen $y(0) = 2$ gir $2 = 3 + C$ eller $C = -1$, og løsningen blir derfor $y = 3 - e^{-2t}$.
2. Differensiallikningen $y'' - 4y' + 3y = 0$ er andre ordens lineær og homogen, og har løsning $y = y_h$. Den karakteristisk likingen er $r^2 - 4r + 3 = 0$, og har løsning $r = 1$ og $r = 3$, så den homogene løsningen er $y_h = C_1 e^t + C_2 e^{3t}$. Initialbetingelsene $y(0) = 2, y'(0) = 4$ gir $C_1 + C_2 = 2$ og $C_1 + 3C_2 = 4$, som har løsning $C_1 = 1$ og $C_2 = 1$. Dermed er løsningen

$$y = \mathbf{e^t + e^{3t}}$$

13.12 Eksamen i ELE 3719 fra 10/06/2014, Oppgave 4

1. Likningen $y' = yt^2 + t^2 = (y+1)t^2$ er separabel, og vi får ved separering at

$$\frac{1}{y+1}\,dy = t^2\,dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{y+1}\,dy = \int t^2\,dt$$

   som gir $\ln|y+1| = t^3/3 + C$. Vi løser for y, og får at $y + 1 = \pm e^C e^{t^3/3} = Ke^{t^3/3}$, eller $y = Ke^{t^3/3} - 1$. Setter vi inn initialbetingelsen $y(0) = 2$, ser vi at $K = 3$, og den partikulære løsningen er $y = 3e^{t^3/3} - 1$.
2. Likningen $y' + 4y = 4t$ er første ordens lineær, og vi kan bruke integrerende faktor e^{4t} for å løse den. Dette gir

$$(ye^{4t})' = 4te^{4t} \quad \Rightarrow \quad ye^{4t} = \int 4te^{4t}\,dt = te^{4t} - \frac{1}{4}e^{4t} + C$$

   Vi har løst integralet ved å bruke delvis integrasjon. Dette gir generell løsning

$$y = t - \frac{1}{4} + Ce^{-4t}$$

Initialbetingelsen $y(0) = 2$ gir $2 = -1/4 + C$, eller $C = 9/4$. Den partikulære løsningen er derfor $y = t - 1/4 + 9/4e^{-4t}$.

3. Likningen $y'' - 5y' + 6y = 4$ er annenordens lineær og har løsning $y = y_h + y_p$. For å finne y_h, ser vi på den karakteristiske likningen $r^2 - 5r + 6 = 0$, som har løsninger $r = 2$ og $r = 3$. Det følger at $y_h = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$. For å finne en partikulær løsning, setter vi $y = A$ siden høyresiden 4 er en konstant. Innsetting gir $6A = 4$, eller $A = 4/6 = 2/3$. Derfor er $y_p = 2/3$ og den generelle løsningen er $y = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + 2/3$. Initialbetingelsene $y(0) = 5/3$, $y(1) = 2/3$ gir $C_1 + C_2 + 2/3 = 5/3$ og $C_1e^2 + C_2e^3 + 2/3 = 2/3$. Første likning gir $C_2 = 1 - C_1$, og innsetting i andre gir

$$C_1e^2 + (1 - C_1)e^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{-e^3}{e^2 - e^3} = \frac{e}{e-1}$$

Den partikulære løsningen blir derfor

$$y = \frac{e}{e-1}e^{2t} - \frac{1}{e-1}e^{3t} + \frac{2}{3}$$

Forelesning 14
Variasjonsregning

14.1 Kort sammendrag

En *funksjonal* J er en regel som tilordner et tall til enhver funksjon av en bestemt type. Et eksempel på en funksjonal er

$$J(y) = \int_0^1 y(t)\,dt$$

som tilordner integralet ovenfor til enhver kontinuerlig funksjon $y = y(t)$ definert på intervallet $[0,1]$. Dette integralet kan tolkes som arealet under grafen til $y = y(t)$ fra $t = 0$ til $t = 1$. De kontinuerlige funksjonene definert på $[0,1]$ utgjør altså 'definisjonsområdet' til funksjonalen. Et annet eksempel på en funksjonal er

$$J(y) = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

Denne funksjonalen gir lengden til kurven $y = y(x)$ fra $x = a$ til $x = b$. De deriverbare funksjonene definert på intervallet $[a,b]$ utgjør 'definisjonsområdet' for denne funksjonalen.

I *variasjonsregning* studerer vi max/min-problemer for visse typer funksjonaler, under bestemte typer av bibetingelser. *Variasjonsproblemet* kan formuleres slik på standard form:

$$\max/\min \int_a^b F(t,y,y')\,dt \quad \text{når} \begin{cases} y(a) = y_0 \\ y(b) = y_1 \end{cases}$$

Uttrykket $F(t,y,y')$ samt konstantene a,b,y_0,y_1 er da gitt, og for hvert valg av en funksjon $y = y(t)$ som oppfyller $y(a) = y_0$ og $y(b) = y_1$, kan vi regne ut verdien $J(y) = \int_a^b F(t,y,y')\,dt$. Vi ønsker altså å finne den funksjonen y som gjør dette integralet størst eller minst mulig. Et eksempel på et variasjonsproblem er

$$\min J(y) = \int_0^1 \left(y^2 + \dot{y}^2\right) dt \quad \text{når} \begin{cases} y(0) = 1 \\ y(1) = 5 \end{cases}$$

Legg merke til at man ofte skriver $\dot{y}$ for $y' = y'(t)$ når t er en tidsvariabel. I dette problemet vil for eksempel $y(t) = 4t+1$ være en funksjon som oppfyller bibetingelsene $y(0) = 1$ og $y(1) = 5$, og verdien til funksjonalen er da

$$J(y) = \int_0^1 (4t+1)^2 + 4^2\, dt = \left[\frac{1}{12}(1+4t)^3 + 16t\right]_0^1 = \frac{79}{3}$$

Men det er mange andre funksjoner som oppfyller $y(0) = 1$ og $y(1) = 5$, det vil si som går gjennom punktene $(0,1)$ og $(1,5)$, og for å finne kandidat for max/min bruker man generelt *Euler-likningen*:

Teorem 14.1. *Dersom $y = y(t)$ er en løsning av variasjonsproblemet, så må den tilfredsstille Euler-likningen*

$$F'_y - \frac{d}{dt}\left(F'_{y'}\right) = 0$$

Legg merke til at $F'_y, F'_{y'}$ er formelle partielle derivasjoner av F med hensyn til y og y' som formelle variable, mens derivasjon med hensyn til t gir $dy/dt = y'$ og $dy'/dt = y''$. I eksempelet ovenfor blir Euler-likningen til $F = y^2 + (y')^2$ gitt ved

$$2y - \frac{d}{dt}\left(2y'\right) = 2y - 2y'' = 0$$

siden $F'_y = 2y$ og $F'_{y'} = 2y'$. Generelt gir Euler-likningen en andre ordens differensiallikning. Løser vi denne differensial-likningen og bruker bibetingelsene, får vi en kandidat for max/min.

Funksjonen $F = F(t,y,y')$ er *konveks* som en funksjon i (y,y') dersom den Hessiske matrisen

$$H(F) = \begin{pmatrix} F''_{yy} & F''_{y,y'} \\ F''_{y,y'} & F''_{y',y'} \end{pmatrix}$$

er positiv semidefinitt for all (t,y,y'). Det vil si at $\det H(F) \geq 0$ og $\operatorname{tr} H(F) \geq 0$, eller at ulikhetene

$$F''_{yy}F''_{y',y'} - (F''_{y,y'})^2 \geq 0 \quad \text{og} \quad F''_{yy}, F''_{y',y'} \geq 0$$

holder for alle (t,y,y'). Tilsvarende er funksjonen *konkav* hvis den Hessiske matrisen er negativ semidefinitt for all (t,y,y'). Det vil si at $\det H(F) \geq 0$ og $\operatorname{tr} H(F) \leq 0$, eller at ulikhetene

$$F''_{yy}F''_{y',y'} - (F''_{y,y'})^2 \geq 0 \quad \text{og} \quad F''_{yy}, F''_{y',y'} \leq 0$$

holder for alle (t,y,y'). For eksempel er $F = y^2 + (y')^2$ konveks men ikke konkav, siden F har Hessisk matrise

$$H(F) = \begin{pmatrix} F''_{yy} & F''_{y,y'} \\ F''_{y,y'} & F''_{y',y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

slik at determinanten $\det H(F) = 4 \geq 0$, og $\operatorname{tr} H(F) = 4 \geq 0$. Vi kan bruke dette til å undersøke om løsninger av Euler-likningen gir max eller min:

Teorem 14.2. *Dersom $y^* = y^*(t)$ oppfyller Euler-likningen og bibetingelsene i et variasjonsproblem, så har vi:*

1. *Hvis F er konveks som en funksjon i (y,y'), så er y^* et minimumspunkt*
2. *Hvis F er konkav som en funksjon i (y,y'), så er y^* et maksimumspunkt*

Maksimums/minimumsverdien kan vi da finne ved å sette inn y^* i funksjonalen.

14.2 Oppgaver

14.1. Avgjør i hvert tilfelle om funksjonen er konveks, konkav, begge deler eller ingen av delene:

1. $f(x,y) = x + y$
2. $f(x,y) = 3x - y$
3. $f(x,y) = e^x + e^y$
4. $f(x,y) = e^{-x-y}$
5. $f(x,y) = \ln(x) + \ln(y)$

14.2. Vis at funksjonen $f(x,y) = x^2 + 4xy + 4y^2 + e^y - y$ er konveks.

14.3. Vis at en symmetrisk 2×2-matrise A er positiv semidefinitt hvis og bare hvis $\det(A) \geq 0$ og $\operatorname{tr}(A) \geq 0$. Forklar at dette er det samme som at $ac - b^2 \geq 0$ og $a,c \geq 0$ når vi skriver matrisen A som

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

14.4. Vi betrakter variasjonsproblemet

$$\min \int_0^1 (t\dot{y} + \dot{y}^2)\,\mathrm{dt}, \quad y(0) = 1,\ y(1) = 0$$

1. Finn Euler-likningen og løs den. Vis at løsningen gir et minimum.
2. Finn den løsningen som tilfredsstiller initialbetingelsene.

14.5. Finn Euler-likningen som er tilordnet integralet

$$\min \int_{t_0}^{t_1} F(t,y,\dot{y})\,\mathrm{dt}$$

i hvert tilfelle:

1. $F(t,y,\dot{y}) = 2ty + 3y\dot{y} + t\dot{y}^2$
2. $F(t,y,\dot{y}) = -e^{\dot{y}-ay}$
3. $F(t,y,\dot{y}) = ((y-\dot{y})^2 + y^2)e^{-at}$

14.6. Vis at Euler-likningen som svarer til variasjonsproblemet

$$\min \int_a^b (x^2 + tx\dot{x} + t^2\dot{x}^2)\,\mathrm{dt}$$

er gitt ved $t^2\ddot{x} + 2t\dot{x} - \frac{1}{2}x = 0$.

14.7. 1. Løs differensiallikningen $\ddot{y} + \dfrac{1}{t}\dot{y} = 1$.
2. Finn Euler-likninen som svarer til variasjonsproblemet

$$\min \int_1^2 (2ty + 3y\dot{y} + t\dot{y}^2)\,\mathrm{dt}, \quad y(1) = 0,\ y(2) = 1$$

og bestem løsningen som tilfredsstiller initialbetingelsene.

14.8. Vi betrakter variasjonsproblemet

$$\max \int_0^T e^{-t/4}\ln(2K - \dot{K})\,\mathrm{dt}, \quad K(0) = K_0,\ K(T) = K_T$$

1. Vis at funksjonen $F(t,K,\dot{K}) = e^{-t/4}\ln(2K - \dot{K})$ er konkav som funksjon i $(K,\dot{K})$.
2. Vis at Euler-likningen kan skrives på formen $a\ddot{K} + b\dot{K} + cK = 0$ der a,b,c er konstanter.
3. Løs variasjonsproblemet.

14.9. Prøve-eksamen i ELE 3719 fra 05/2011, Oppgave 4
Vi betrakter variasjonsproblemet

$$\max/\min \int_0^3 \ln(\dot{y} + y + e^{-t})\,\mathrm{dt}, \quad y(0) = 2,\ y(3) = 5e^{-3}$$

1. Vis at Euler-likningen, etter at den er forenklet, kan skrives på formen $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = k$, der a,b,c,k er konstanter, og bestem konstantene a,b,c,k.
2. Finn løsningen av Euler-likningen som tilfredsstiller initialbetingelsene.
3. Gir løsningen av Euler-likningen maksimum eller minimum? Hva blir den optimale verdien av integralet?

14.10. Eksamen i ELE 3719 fra 16/06/2011, Oppgave 4
Vi ønsker å plante trær for å dekke et område på 30 kvadratkilometer i løpet av 4 år. La $y(t)$ være antall kvadratkilometer som er dekket etter t år, og la $\dot{y}(t)$ være plantehastigheten, målt i kvadratkilometer per år. Vi antar at kostnadsraten, målt i kr per år, er $C(t,y,\dot{y}) = K\dot{y}^2$, der K er en positiv konstant. Den totale neddiskonterte kostnaden er da

$$\int_0^4 C(t,y,\dot{y})e^{-rt}\,\mathrm{dt}$$

der r er diskonteringsrenten.

1. Vi ønsker å minimere den totale neddiskonterte kostnaden. Sett opp variasjonsproblemet dette leder til. Vil en løsning $y^*(t)$ av Euler-likningen og initialbetingelsene til variasjonsproblemet minimere den totale neddiskonterte kostnaden?
2. Løs variasjonsproblemet. Hva blir den totale neddiskonterte kostnaden om diskonteringsrenten $r = 0.08$ og konstanten $K = 10.000$?

14.3 Løsninger

14.1 Vi regner i hvert tilfelle ut den Hessiske matrisen $H(f)$ og undersøker dens definitthet:

1. Den Hessiske matrisen $H(f)$ er nullmatrisen, som er både positivt og negativt semidefinitt, derfor er f konveks og konkav.
2. Den Hessiske matrisen $H(f)$ er nullmatrisen, som er både positivt og negativt semidefinitt, derfor er f konveks og konkav.
3. Den Hessiske matrisen $H(f)$ er diagonal med $e^x > 0$ og $e^y > 0$ på diagonalen. Den er derfor positivt men ikke negativt semidefinitt, og f er dermed konveks men ikke konkav.
4. Den Hessiske matrisen $H(f)$ er gitt ved
$$H(f) = \begin{pmatrix} e^{-x-y} & e^{-x-y} \\ e^{-x-y} & e^{-x-y} \end{pmatrix}$$
og $e^{-x-y} > 0$. Derfor er den positivt men ikke negativt semidefinitt, og f er dermed konveks men ikke konkav.
5. Den Hessiske matrisen $H(f)$ er diagonal med $-1/x^2 < 0$ og $-1/y^2 < 0$ på diagonalen. Den er derfor negativt men ikke positivt semidefinitt, og f er dermed konkav men ikke konveks.

14.2 Den Hessiske matrisen til $f(x,y) = x^2 + 4xy + 4y^2 + e^y - y$ er gitt ved

$$H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8+e^y \end{pmatrix}$$

Dermed er $\det H(f) = 2(8+e^y) - 16 = 2e^y > 0$ og $\operatorname{tr} H(f) = 10 + e^y > 0$. Det følger derfor at f er konveks.

14.3 Egenverdiene til A er gitt ved $\lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$, og de oppfyller derfor $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr}(A)$ og $\lambda_1\lambda_2 = \det(A)$. Hvis $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, så er derfor $\det A, \operatorname{tr} A \geq 0$, og hvis $\det A, \operatorname{tr} A \geq 0$, så må de to egenverdiene ha samme fortegn (på grunn av determinanten), og dette fortegnet må være positivt (på grunn av sporet). Ulikheten

$ac - b^2 \geq 0$ er det samme som $\det A \geq 0$. Når $ac - b^2 \geq 0$, så er $ac \geq b^2 \geq 0$, så a og c har samme fortegn, og derfor er $a + c \geq 0$ det samme som $a \geq 0$ og $c \geq 0$.

14.4

1. Siden $F = (t\dot{y} + \dot{y}^2)$, så er $F'_y = 0$ og $F'_{y'} = t + 2y'$. Eulerlikningen er derfor $0 - (1 + 2y'') = 0$, som gir $2y'' = -1$. Løsningen er $y' = -t/2 + C_1$ og dermed $y = -t^2/4 + C_1 t + C_2$. Siden F er konveks i (y, y'), med Hessisk matrise
$$H(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
så gir løsningen ovenfor minimum.
2. Betingelsene $y(0) = 1$ og $y(1) = 0$ innsatt i $y = -t^2/4 + C_1 t + C_2$ gir $C_2 = 1$ og $-1/4 + C_1 + 1 = 0$, eller $C_1 = -3/4$. Dermed er løsningen av variasjonsproblemet $y = -t^2/4 + -3t/4 + 1$.

14.5

1. $F(t, y, \dot{y}) = 2ty + 3y\dot{y} + t\dot{y}^2$ gir $F'_y = 2t + 3y'$ og $F'_{y'} = 3y + 2ty'$. Derfor er Eulerlikningen $2t + 3y' - (3y' + 2y' + 2ty'') =$, som kan skrives
$$-2ty'' - 2y' + 2t = 0$$
2. $F(t, y, \dot{y}) = -e^{\dot{y} - ay}$ gir $F'_y = ae^u$ og $F'_{y'} = -e^u$, hvor vi skriver $u = e^{\dot{y} - ay}$. Derfor er Eulerlikningen gitt ved $ae^u + (y'' - ay')e^u = 0$, som kan skrives
$$y'' - ay' + a = 0$$
3. $F(t, y, \dot{y}) = ((y - \dot{y})^2 + y^2)e^{-at}$ gir $F'_y = (2(y - y') + 2y)e^{-at}$ og $F'_{y'} = -2(y - y')e^{-at}$. Derfor er Eulerlikningen gitt ved $(4y - 2y')e^{-at} + 2(y' - y'' - ay + ay')e^{-at} = 0$, som kan skrives
$$-2y'' + 2ay' + (4 - 2a)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'' - ay' + (a - 2)y = 0$$

14.6 Vi har at $F'_x = 2x + tx'$ og $F'_{x'} = tx + 2t^2x'$. Dermed Euler-likningen $2x + tx' - (x + tx' + 4tx' + 2t^2x'') = 0$, som kan skrives som
$$-2t^2x'' - 4tx' + x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2x'' + 2tx' - \frac{1}{2}x = 0$$

14.7

1. Likningen $y'' + \frac{1}{t}y' = 1$ er lineær i $u = y'$, og $u' + (1/t)u = 1$ har integrerende faktor t. Dermed er $(ut)' = t$, som gir
$$u = \frac{1}{t}\int t\,dt = t/2 + C_1/t$$
Dette gir at $y' = t/2 + C_1/t$ og dermed $y = t^2/4 + C_1 \ln|t| + C_2$.

2. Vi har at $F'_y = 2t + 3y'$ og $F'_{y'} = 3y + 2ty'$. Dermed er Eulerlikningen $2t + 3y' - (3y' + 2y' + 2ty'') = 0$, som kan skrives

$$-2ty'' - 2y' = -2t$$

Divisjon med $-2t$ gir differensiallikningen fra a) med løsning $y = t^2/4 + C_1 \ln|t| + C_2$, og betingelsene $y(1) = 0$ og $y(2) = 1$ gir $1/4 + C_2 = 0$, eller $C_2 = -1/4$, og $1 + C_1 \ln(2) - 1/4 = 1$, eller $C_1 = \frac{1}{4\ln 2}$. Dermed er den partikulære løsningen

$$y = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4\ln 2}\ln|t| - \frac{1}{4}$$

14.8 Vi betrakter variasjonsproblemet

$$\max \int_0^T e^{-t/4} \ln(2K - \dot{K})\,\mathrm{d}t, \quad K(0) = K_0,\ K(T) = K_T$$

1. Siden $F'_K = \frac{2}{2K-K'}e^{-t/4}$ og $F'_{K'} = \frac{-1}{2K-K'}e^{-t/4}$, så er den Hessiske matrisen til F

$$H(F) = \begin{pmatrix} \frac{-4}{(2K-K')^2} & \frac{2}{(2K-K')^2} \\ \frac{2}{(2K-K')^2} & \frac{-1}{(2K-K')^2} \end{pmatrix} e^{-t/4}$$

   Dermed er $\det H(F) = 0$ og $\operatorname{tr} H(F) \le 0$, så F er konkav i $(K, \dot{K})$.
2. Euler-likningen kan skrives som

$$\frac{2}{2K-K'}e^{-t/4} + \frac{-1(2K' - K'')}{(2K-K')^2}e^{-t/4} + \frac{1}{2K-K'}e^{-t/4}\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$$

   og dette gir

$$\frac{e^{-t/4}}{(2K-K')^2}\left(2(2K-K') - (2K' - K'') - (2K-K')/4\right) = 0$$

   Eulerlikningen blir derfor $K'' - 15K'/4 + 7K/2 = 0$.
3. Løsningen av Euler-likningen er $K = C_1e^{2t} + C_2e^{7t/4}$ siden $2, 7/4$ er det karakteristiske røttene i $r^2 - 15r/4 + 7/2 = 0$. Betingelsene $K(0) = K_0$ og $K(T) = K_T$ gir $C_1 + C_2 = K_0$ og $C_1e^{2T} + C_2e^{7T/4} = K_T$. Dette er et lineær system som vi kan løse for C_1 og C_2 når T, K_0, K_T er gitt, og vi får løsningen

$$K = \frac{K_T - K_0e^{7T/4}}{e^{2T} - e^{7T/4}}e^{2t} + \frac{K_0e^{2T} - K_T}{e^{2T} - e^{7T/4}}e^{7t/4}$$

14.9 Prøve-eksamen i ELE 3719 fra 05/2011, Oppgave 4

1. Vi setter $F = \ln(\dot{y} + y + e^{-t}) = \ln(u)$, der $u = \dot{y} + y + e^{-t}$, og regner ut

$$F'_y = \frac{1}{u}\cdot u'_y = u^{-1}, \quad F'_{\dot y} = \frac{1}{u}\cdot u'_{\dot y} = u^{-1}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}F'_{\dot y} = -u^{-2}\cdot u'_t = -\left(\ddot y + \dot y - e^{-t}\right)u^{-2}$$

Dermed er Euler-likningen gitt ved

$$u^{-1} + \left(\ddot y + \dot y - e^{-t}\right)u^{-2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u + \ddot y + \dot y - e^{-t} = 0$$

Når vi setter inn for u, får vi dermed at

$$\dot y + y + e^{-t} + \ddot y + \dot y - e^{-t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot y + 2\dot y + y = 0$$

Dermed er (den forenklede) Euler-likningen $a\ddot y + b\dot y + cy = k$, der $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$, $k = 0$.

2. Vi tar utgangspunkt i den forenklede Euler-likningen, som er lineær og homogen. Den karakteristiske likningen $r^2 + 2r + 1 = 0$ har dobbelrot $r = -1$, og dermed er den generelle løsningen
$$y = (A + Bt)e^{-t}$$
Vi setter inn initialbetingelsene $y(0) = 2$, $y(3) = 5e^{-3}$ og får $A = 2$ og $(A + 3B)e^{-3} = 5e^{-3}$ eller $B = 1$. Løsningen av Euler-likningen og initialbetingelsene er dermed $\mathbf{y}^* = (\mathbf{2} + \mathbf{t})\mathbf{e}^{-\mathbf{t}}$.
3. Vi undersøker om F er konveks eller konkav som funksjon i $(y,\dot y)$, og regner ut
$$F''_{yy} = F''_{y\dot y} = F''_{\dot y\dot y} = -u^{-2} < 0 \quad \Rightarrow \quad F''_{yy}F''_{\dot y\dot y} - \left(F''_{y\dot y}\right)^2 = 0$$
Det følger at F er konkav som funksjon i $(y,\dot y)$, og dermed er y^* et **maksimum**. Den maksimale verdien av integralet er
$$\int_0^3 \ln(\dot{y^*} + y^* + e^{-t})\,\mathrm{dt} = \int_0^3 \ln(2e^{-t})\,\mathrm{dt} = \left[\ln(2)t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^3 = \mathbf{3}\ln(\mathbf{2}) - \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}} \simeq -2.42$$

14.10 Eksamen i ELE 3719 fra 16/06/2011, Oppgave 4

1. Variasjonsproblemet blir
$$\min \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{4}} \mathbf{K\dot y^2 e^{-rt}}\,\mathrm{dt}, \quad \mathbf{y(0) = 0},\ \mathbf{y(4) = 30}$$
der r og K er positive konstanter, med $F(t,y,\dot y) = K\dot y^2 e^{-rt}$. Vi undersøker om F er konveks funksjon i $(y,\dot y)$: Vi har $F'_y = 0$ og $F'_{\dot y} = 2K\dot y e^{-rt}$, og dermed får vi
$$F''_{yy} = F''_{y\dot y} = 0, \quad F''_{\dot y\dot y} = 2Ke^{-rt} > 0 \quad \Rightarrow \quad F''_{yy}F''_{\dot y\dot y} - (F''_{y\dot y})^2 = 0$$
Dette betyr at F er konveks som funksjon i $(y,\dot y)$, og derfor er enhver løsning $y^*(t)$ av Euler-likningen og initialbetingelsene en løsning av variasjonsproblemet (dvs et minimumspunkt).
2. Vi finner Euler-likningen ved å regne ut

$$F'_y = 0, \quad F'_{\dot{y}} = 2K\dot{y}e^{-rt} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}F'_{\dot{y}} = 2K\ddot{y}e^{-rt} + 2K\dot{y}e^{-rt}(-r) = 2Ke^{-rt}(\ddot{y} - r\dot{y})$$

Dermed er Euler-likningen gitt ved

$$0 - 2Ke^{-rt}(\ddot{y} - r\dot{y}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{y} - r\dot{y} = 0$$

Vi får at $y = Ae^{rt} + B$ siden Euler-likningen er en homogen andre ordens lineær differensiallikning. Vi setter inn initialbetingelsene $y(0) = 0,\ y(4) = 30$, og dette gir

$$A + B = 0,\ Ae^{4r} + B = 30 \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{30}{e^{4r} - 1}, B = -\frac{30}{e^{4r} - 1}$$

Løsningen av Euler-likningen og initialbetingelsene er dermed

$$\mathbf{y}^* = \frac{\mathbf{30}}{\mathbf{e^{4r} - 1}}\left(\mathbf{e^{rt}} - \mathbf{1}\right)$$

Den totale neddiskonterte kostnaden når $y = y^*(t)$ blir

$$\int_0^4 K\dot{y}^2 e^{-rt}\,\mathrm{dt} = \int_0^4 K\left(\frac{30re^{rt}}{e^{4r} - 1}\right)^2 e^{-rt}\,\mathrm{dt} = \frac{900Kr^2}{(e^{4r} - 1)^2}\left[\frac{e^{rt}}{r}\right]_0^4 = \frac{900Kr}{e^{4r} - 1}$$

Når $r = 0.08$ og $K = 10.000$, blir den totale neddiskonterte kostnaden $\frac{900Kr}{e^{4r}-1} \simeq$ $\mathbf{1.909.167}$.

Forelesning 15
Optimal kontrollteori

15.1 Kort sammendrag

Mange problemer i optimal kontrollteori kan skrives slik (det finnes også andre varianter men vi tar utgangspunkt i denne):

$$\max/\min \int_a^b F(t,y,u)\,dt \quad \text{når} \begin{cases} y(a) = y_0 \\ y(b) = y_1 \\ y' = G(t,y,u) \end{cases}$$

Her er F,G gitte uttrykk i (t,y,u) og a,b,y_0,y_1 er gitte tall. Problemet inneholder en ny variabel u, som kalles en *kontrollvariabel*, og sammenhengen mellom u og *tilstandsvariabelen* y er gitt ved differensiallikningen $y' = G(t,y,u)$.

Legg merke til at om u velges lik den deriverte $u = y'$ og $G(t,y,u) = u$, så blir problemet ovenfor et vanlig variasjonsproblem . Vi kan skrive det som

$$\max/\min \int_a^b F(t,y,y')\,dt \quad \text{når} \begin{cases} y(a) = y_0 \\ y(b) = y_1 \end{cases}$$

ved å sette inn $u = y'$ i F. Differensiallikningen $y' = G(t,y,u) = u$ blir at $y' = y'$, som selvsagt er oppfyllt. Mange (men ikke alle) problemer i optimal kontrollteori kan skrives om som variasjonsproblemer.

Fordelen med formuleringen i kontrollteori (ved siden av at den er mer generell) er at det kommer klarere fram at u (kontrollvariabelen) er det vi kan endre (eller kontrollere). Skal vi for eksempel finne alle funksjoner $y = y(t)$ med $y(0) = 1$ og $y(1) = 5$, så er det $u = y'$ vi kan variere. Om vi velger $u = y'$ til å være en konstant, så må $u = 4$ for at kurven skal gå gjennom $(0,1)$ og $(1,5)$ siden stigningstallet til linjen gjennom disse to punktene er 4. Da blir $y(t) = 4t + 1$. Vil vi derimot bruke en kurve som har en horisontal tangent til å begynne med, og med jevnt økende stigningstall, kan vi velge $u = st$ for et positivt tall $s > 0$. Da er $y' = u = st$ og $y = st^2/2 + C$. For at kurven skal gå gjennom $(0,1)$ og $(1,5)$, må vi velge $C = 1$ og $s = 8$, slik at $u(t) = 8t$ og $y(t) = 4t^2 + 1$.

For å løse et problem i optimal kontrollteori, kan vi enten forsøke å skrive det om til et variasjonsproblem (og bruke Euler-likningen), eller bruke Pontriyagin's maksimumsprinsipp for optimale kontrollproblemer:

Teorem 15.1. *Dersom $y^* = y^*(t)$ og $u^* = u^*(t)$ er en løsning av*

$$\max / \min \int_a^b F(t,y,u)\,dt \quad \textit{når} \begin{cases} y(a) = y_0 \\ y(b) = y_1 \\ y' = G(t,y,u) \end{cases}$$

så finnes en kontinuerlig funksjon $p = p(t)$ og et tall p_0 med $p_0 = 1$ eller $p_0 = 0$, slik at Hamilton-funksjonen $H(t,y,u,p) = p_0 F(t,y,u) + p\,G(t,y,u)$ tilfredsstiller følgende betingelser:

1. $u = u^*$ maksimerer/minimerer $H = H(t,y^*,u,p)$
2. $p' = -H'_y(t,y^*,u^*,p)$

I de fleste tilfeller kan vi sette $p_0 = 1$, men det finnes eksempler der maksimum/minimum opptrer for $p_0 = 0$.

Teorem 15.2. *Dersom $y^* = y^*(t)$ og $u^* = u^*(t)$ oppfyller bibetingelsene i teoremet ovenfor, så har vi at:*

1. Hvis H er konveks som en funksjon i (y,u), så er (y^*,u^*) et minimumspunkt.
2. Hvis H er konkav som en funksjon i (y,u), så er (y^*,u^*) et maksimumspunkt

Maksimums/minimumsverdien kan vi da finne ved å sette inn (y^*,u^*) i funksjonalen.

15.2 Oppgaver

15.1. Vi betrakter kontrollproblemet

$$\max \int_0^1 (1-u^2)\,\mathrm{dt}, \quad y(0) = 1,\; y(1) = e^{-1},\; y' = y + u$$

1. Løs problemet ved hjelp av maksimumsprinsippet
2. Løs problemet ved å gjøre det om til et variasjonsproblem

15.2. Eksamen i ELE 3719 fra 28/11/2011, Oppgave 6
Vi betrakter variasjonsproblemet

$$\min \int_0^{25} (8y^2 + 625\dot{y}^2)e^{-0.08t}\,\mathrm{dt} \quad \text{når} \quad y(0) = 1,\; y(25) = e^4$$

1. Vis at Euler-likningen for variasjonsproblemet kan skrives på formen $\ddot{y} - 0.08\dot{y} - 0.0128y = 0$.
2. Løs variasjonsproblemet. Hva er den minimale verdien av integralet?

15.3. Eksamen i ELE 3719 fra 14/06/2012, Oppgave 6
Vi betrakter det diskonterte variasjonsproblemet

$$\min \int_0^8 \left(3\dot{y}^2 + (y-\dot{y})^2\right) e^{-\rho t}\,\mathrm{dt} \quad \text{når} \quad y(0) = 0,\ y(2) = \frac{e^2 - e^{-2}}{2}$$

der diskonteringsrenten $\rho \geq 0$ er en konstant.

1. Avgjør om $F = \left(3\dot{y}^2 + (y-\dot{y})^2\right) e^{-\rho t}$ er konveks eller konkav som en funksjon av $(y, \dot{y})$.
2. Løs variasjonsproblemet for $\rho = 0$.

15.4. Prøve-eksamen i ELE 3719 fra 05/2013, Oppgave 6
Vi betrakter variasjonsproblemet

$$\max / \min \int_0^2 e^{3y+2\dot{y}}\,\mathrm{dt} \quad \text{når} \quad y(0) = 3,\ y(2) = 3 + e^{-3}$$

1. Vis at Euler-likningen for dette problemet er en lineær andre ordens differensial-likning, og løs den. Hint: Se etter en partikulær løsning på formen $y_p = At$.
2. Finn løsningen y^* av variasjonsproblemet. Gir denne løsningen max eller min?

15.5. Eksamen i ELE 3719 fra 13/06/2013, Oppgave 6
Vi betrakter variasjonsproblemet

$$\max / \min \int_0^3 \ln(4y - \dot{y})\,\mathrm{dt} \quad \text{når} \quad y(0) = 3,\ y(3) = -9e^{12}$$

1. Finn Euler-likningen for dette problemet, og finn løsningen y^* av Euler-likningen som også tilfredsstiller initialbetingelsene.
2. Undersøk om $F = \ln(4y - \dot{y})$ er konveks eller konkav som funksjon i $(y, \dot{y})$. Bruk dette til å avgjøre om y^* gir max eller min i variasjonsproblemet.

15.6. Eksamen i ELE 3719 fra 27/11/2013, Oppgave 6
Vi betrakter variasjonsproblemet

$$\max / \min \int_0^3 \ln(6 - 2y + 2\dot{y})\,\mathrm{dt} \quad \text{når} \quad y(0) = -3,\ y(3) = 3 + 18e^3$$

1. Finn Euler-likningen for dette problemet, og finn løsningen y^* av Euler-likningen som også tilfredsstiller initialbetingelsene.
2. Undersøk om $F = \ln(6 - 2y + 2\dot{y})$ er konveks eller konkav som funksjon i $(y, \dot{y})$. Bruk dette til å avgjøre om y^* gir max eller min i variasjonsproblemet.

15.7. Eksamen i ELE 3719 fra 10/06/2014, Oppgave 6
Vi betrakter variasjonsproblemet

$$\max / \min \int_0^{\sqrt{3}} \left((y')^2 + 2yy' + 3y^2\right) \text{dt} \quad \text{når} \quad y(0) = 0,\ y(\sqrt{3}) = 1$$

1. Bestem Euler-likningen til problemet, og finn løsningen y^* som tilfredsstiller Euler-likningen og initialbetingelsene.
2. Avgjør om $F(t,y,y') = (y')^2 + 2yy' + 3y^2$ er konveks eller konkav som en funksjon i (y,y'), og bruk dette til å avgjøre om y^* gir maksimum eller minimum.
3. Finn den optimale verdien (maksimums- eller minimumsverdien) i max/min-problemet.

15.3 Løsninger

15.1

1. Hamilton-funksjonen er $H = p_0(1-u^2) + p(y+u)$. Hvis $p_0 = 0$ så er H lineær i u og har ikke noe maksimum. Derfor må $p_0 = 1$. Vi har da $H'_u = -2u + p$ og $H''_{uu} = -2 < 0$, så $H'_u = 0$ gir maksimum, og derfor er $u = p/2$. Betingelsen $p' = -H_y$ gir $p' = -p$ eller $p(t) = Ce^{-t}$ og dermed $u = C/2e^{-t} = Ke^{-t}$. Dermed må y oppfylle
$$y' - y = u = Ke^{-t}$$
og løsningen er $y = y_h + y_p$, med $y_h = C_1e^t$. Vi ser etter en partikulær løsning på formen $y = Ae^{-t}$, og dette gir
$$(-A - A)e^{-t} = Ke^{-t}$$
eller $A = -K/2 = C_2$. Altså er den generelle løsningen $y = C_1e^t + C_2e^{-t}$. Betingelsene $y(0) = 1$ og $y(1) = e^{-1}$ gir $C_2 = 1 - C_1$ og $C_1(e^1) + (1 - C_1)e^{-1} = e^{-1}$, eller
$$C_1 = 0, \quad C_2 = 1$$
Siden $F = 1 - u^2$ er konkav i (y,u), gir funksjonen $y = e^{-t}$ et globalt maksimum.
2. Sammenhengen mellom tilstand- og kontrollvariabel er $y' = y + u$. For å skrive om problemet til et variasjonsproblem, setter vi inn $u = y' - y$, som gir
$$\max \int_0^1 (1 - (y' - y)^2)\,\text{dt}, \quad y(0) = 1,\ y(1) = e^{-1}$$
Siden $F(t,y,y') = 1 - (y' - y)^2 = 1 - (y')^2 + 2yy' - y^2$, så er $F'_y = 2y' - 2y$ og $F'_{y'} = -2y' + 2y$. Eulerlikningen blir da
$$2y' - y - (-2y'' + 2y') = 0$$

eller $y'' - y = 0$. Denne likningen er lineær og homogen, og siden $r^2 - 1 = 0$ har røtter $r = \pm 1$, så er den generelle løsningen

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$$

altså samme løsning som i a) og regning med initialbetingelsene blir akkurat den samme. Siden $F = 1 - (y' - y)^2$ er konkav i (y, y') så blir

$$y = \frac{1}{e^2 - 1}\left(e^t - e^{-t}\right)$$

et globalt maksimum.

.

15.2 Eksamen i ELE 3719 fra 28/11/2011, Oppgave 6

1. Vi bruker $F(t, y, \dot{y}) = (8y^2 + 625\dot{y}^2)e^{-0.08t}$ og regner ut de partiell-deriverte:

$$F'_y = 16y \cdot e^{-0.08t}, \quad F'_{\dot{y}} = 1250\dot{y} \cdot e^{-0.08t}$$

Euler-likningen blir da:

$$F'_y - \frac{d}{dt}F'_{\dot{y}} = 16y \cdot e^{-0.08t} - 1250(\ddot{y} \cdot e^{-0.08t} + \dot{y}e^{-0.08t}(-0.08)) = 0$$

Division med $e^{-0.08t} \neq 0$ gir likningen

$$16y - 1250(\ddot{y} - 0.08\dot{y}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{y} - 0.08\dot{y} - 0.0128y = 0$$

2. Vi løser Euler-likningen $\ddot{y} - 0.08\dot{y} - 0.0128y = 0$ med initialbetingelsene $y(0) = 1$ og $y(25) = e^4$. Differensiallikningen har karakteristiske røtter

$$r^2 - 0.08r - 0.0128 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 0.16, -0.08$$

Dermed er den generelle løsningen $y = C_1 e^{0.16t} + C_2 e^{-0.08t}$. Initialbetingelsene er $C_1 + C_2 = 1$ og $C_1 e^4 + C_2 e^{-2} = e^4$, og vi ser at $C_1 = 1$ og $C_2 = 0$ er løsning. Dermed får vi $y = e^{0.16t}$. Siden $F(t, y, \dot{y})$ er en konveks funksjon i variablene y og $\dot{y}$, så løser $y = e^{0.16t}$ minimumsproblemet. Den minimale verdien av integralet blir dermed

$$\int_0^{25} (8y^2 + 625\dot{y}^2)e^{-0.08t}\,\mathrm{dt} = \int_0^{25} (8 \cdot e^{0.32t} + 625 \cdot 0.16^2 e^{0.32t})e^{-0.08t}\,\mathrm{dt}$$

siden $\dot{y} = e^{0.16t} \cdot 0.16 = 0.16e^{0.16t}$. Dette integralet regner vi ut:

$$\int_0^{25} (8 + 16)e^{0.24t}\,\mathrm{dt} = 24\frac{1}{0.24}(e^6 - 1) = \mathbf{100(e^6 - 1)} \simeq 40{,}243$$

15.3 Eksamen i ELE 3719 fra 14/06/2012, Oppgave 6

1. Vi bruker $F(t,y,\dot{y}) = \left(3\dot{y}^2 + (y-\dot{y})^2\right)e^{-\rho t}$ og regner ut de partiell-deriverte:

$$F'_y = 2(y-\dot{y})e^{-\rho t}, \quad F'_{\dot{y}} = (6\dot{y} + 2(y-\dot{y})(-1))e^{-\rho t} = (8\dot{y} - 2y)e^{-\rho t}$$

Dette gir $A = F''_{yy} = 2e^{-\rho t}$, $B = F''_{y\dot{y}} = -2e^{-\rho t}$ og $C = F''_{\dot{y}\dot{y}} = 8e^{-\rho t}$. Dermed er $A, C > 0$ og $AC - B^2 = (16-4)e^{-2\rho t} = 12e^{-2\rho t} > 0$. Derfor er F **konveks** men **ikke konkav** som funksjon i $(y, \dot{y})$.

2. Vi bruker $F(t,y,\dot{y}) = 3\dot{y}^2 + (y-\dot{y})^2$ og regner ut de partiell-deriverte:

$$F'_y = 2(y-\dot{y}), \quad F'_{\dot{y}} = 6\dot{y} + 2(y-\dot{y})(-1) = 8\dot{y} - 2y$$

Euler-likningen blir da:

$$F'_y - \frac{d}{dt}F'_{\dot{y}} = 2(y-\dot{y}) - (8\ddot{y} - 2\dot{y}) = 0$$

Forenkling gir likningen $-8\ddot{y} + 2y = 0$, som er en andreordens lineær homogen differensiallikning med karakteristisk likning $r^2 - 1/4 = 0$, og karakteristiske røtter $r = \pm 1/2$. Dermed er løsningen av Euler-likningen $y = C_1 e^{t/2} + C_2 e^{-t/2}$. Initialbetingelsene $y(0) = 0$, $y(2) = (e^2 - e^{-2})/2$ gir $C_1 + C_2 = 0$ og $C_1 e + C_2 e^{-1} = (e^2 - e^{-2})/2$, med løsning $C_2 = -C_1$ og

$$C_1(e - e^{-1}) = (e^2 - e^{-2})/2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{e^2 - e^{-2}}{2(e - e^{-1})} = \frac{1}{2}(e + e^{-1})$$

Vi får dermed løsningen

$$y = \mathbf{\frac{1}{2}(e + e^{-1})(e^{t/2} - e^{-t/2})}$$

av Euler-likningen og initialbetingelsene. Siden F er konveks som en funksjon av $(y, \dot{y})$, så er dette løsningen av minimumsproblemet.

15.4 Prøve-eksamen i ELE 3719 fra 05/2013, Oppgave 6

1. Vi har at $F = e^{3y + 2\dot{y}} = e^u$ med $u = 3y + 2\dot{y}$. Dette gir

$$F'_y = e^u \cdot 3 = 3e^u, \quad F'_{\dot{y}} = e^u \cdot 2 = 2e^u$$

Dermed blir

$$\frac{d}{dt}F'_{\dot{y}} = 2e^u u'_t = 2e^u(3\dot{y} + 2\ddot{y}) = (6\dot{y} + 4\ddot{y})e^u$$

og Euler-likningen blir

$$3e^u - (6\dot{y} + 4\ddot{y})e^u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\ddot{y} + 6\dot{y} = 3$$

Dette er en lineær andre ordens differensiallikning med løsning $y = y_h + y_p$, og vi finner y_h ved å løse den karakteristiske likningen

$$4r^2 + 6r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 0,\ r = -3/2$$

Dermed er $y_h = C_1 e^{0\,t} + C_2 e^{-3/2\,t} = C_1 + C_2 e^{-3/2\,t}$. Vi ser så etter en partikulær løsning på formen $y_p = At$ for en konstant A, og finner ved innsetting at $4 \cdot 0 + 6 \cdot A = 3$, som gir løsning $A = 1/2$ og $y_p = t/2$. Dermed er løsningen av Euler-likningen gitt ved

$$y^* = C_1 + C_2 e^{-3/2\,t} + t/2$$

2. Vi regner ut de andre ordens partiell-deriverte av F og finner

$$F''_{yy} = 9e^u, \quad F''_{y\dot{y}} = 6e^u, \quad F''_{\dot{y}\dot{y}} = 4e^u$$

Dermed er $F''_{yy} \cdot F''_{\dot{y}\dot{y}} - (F''_{y\dot{y}})^2 = 0$ og $F''_{yy}, F''_{\dot{y}\dot{y}} > 0$, så F er konveks i $(y,\dot{y})$. Dermed gir løsningen y^* av Euler-likningen og initialbetingelsene et minimum. Vi finner y^* ved å sette inn initialbetingelsene: $y(0) = 3$ gir $C_1 + C_2 = 3$, og $y(2) = 3 + e^{-3}$ gir $C_1 + C_2 e^{-3} + 1 = 3 + e^{-3}$. Vi løser likningene og finner at $C_2 = 1$ og $C_1 = 2$, så minimum er gitt ved

$$y^* = 2 + e^{-3/2\,t} + t/2$$

15.5 Eksamen i ELE 3719 fra 13/06/2013, Oppgave 6

1. Vi har $F = \ln(4y - \dot{y})$ og dette gir partiell-deriverte

$$F'_y = \frac{4}{4y - \dot{y}}, \quad F'_{\dot{y}} = \frac{-1}{4y - \dot{y}}$$

Dermed er Euler-likningen for problemet gitt ved

$$\frac{4}{4y - \dot{y}} - \frac{4\dot{y} - \ddot{y}}{(4y - \dot{y})^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4(4y - \dot{y}) - (4\dot{y} - \ddot{y}) = 0$$

Etter at vi forenkler likningen, får vi $\ddot{y} - 8\dot{y} + 16y = 0$. Den karakteristiske likningen er $r^2 - 8r + 16 = 0$ med dobbelrot $r = 4$, og dermed er den generelle løsningen av Euler-likningen gitt ved $y = (C_1 + C_2 t)e^{4t}$. Initialbetingelsene $y(0) = 3$ og $y(3) = -9e^{12}$ gir at $C_1 = 3$ og $(3 + 3C_2)e^{12} = -9e^{12}$, eller $C_2 = -4$. Dette betyr at løsningen $y^* = (3 - 4t)e^{4t}$ tilfredsstiller Euler-likningen og initialbetingelsene.

2. Vi har andre orden partiellderiverte gitt ved

$$F''_{yy} = \frac{-16}{(4y - \dot{y})^2}, \quad F''_{y\dot{y}} = \frac{4}{(4y - \dot{y})^2}, \quad F''_{\dot{y}\dot{y}} = \frac{-1}{(4y - \dot{y})^2}$$

Vi har dermed $F''_{yy}, F''_{\dot{y}\dot{y}} < 0$ for all $(y,\dot{y})$, and

$$F''_{yy} \cdot F''_{\dot{y}\dot{y}} - (F''_{y\dot{y}})^2 = 0$$

og F er derfor konkav i $(y,\dot{y})$. Dette betyr at y^* gir et maksimum i variasjonsproblemet.

15.6 Eksamen i ELE 3719 fra 27/11/2013, Oppgave 6

1. Vi har $F = \ln(6-2y+2\dot{y})$ og dette gir partiell-deriverte

$$F'_y = \frac{-2}{6-2y+2\dot{y}}, \quad F'_{\dot{y}} = \frac{2}{6-2y+2\dot{y}}$$

Dermed er Euler-likningen for problemet gitt ved

$$\frac{-2}{6-2y+2\dot{y}} - \frac{4\dot{y}-4\ddot{y}}{(6-2y+2\dot{y})^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2(6-2y+2\dot{y}) - (4\dot{y}-4\ddot{y}) = 0$$

Etter at vi forenkler likningen, får vi $4\ddot{y} - 8\dot{y} + 4y = 12$. Den karakteristiske likningen er $4r^2 - 8r + 4 = 0$ med dobbelrot $r = 1$, og dermed er den generelle løsningen av Euler-likningen gitt ved $y = y_h + y_p = (C_1 + C_2 t)e^t + 3$. Initialbetingelsene $y(0) = -3$ og $y(3) = 3 + 18e^3$ gir at $C_1 + 3 = -3$, eller $C_1 = -6$, og $(-6+3C_2)e^3 + 3 = 3 + 18e^3$, eller $C_2 = 8$. Dette betyr at løsningen $y^* = (-6+8t)e^t + 3$ tilfredsstiller Euler-likningen og initialbetingelsene.

2. Vi har andre orden partiellderiverte gitt ved

$$F''_{yy} = \frac{-4}{(6-2y+2\dot{y})^2}, \quad F''_{y\dot{y}} = \frac{4}{(6-2y+2\dot{y})^2}, \quad F''_{\dot{y}\dot{y}} = \frac{-4}{(6-2y+2\dot{y})^2}$$

Vi har dermed $F''_{yy}, F''_{\dot{y}\dot{y}} < 0$ for all $(y,\dot{y})$, and

$$F''_{yy} \cdot F''_{\dot{y}\dot{y}} - (F''_{y\dot{y}})^2 = 0$$

og F er derfor konkav i $(y,\dot{y})$. Dette betyr at y^* gir et maksimum i variasjonsproblemet.

15.7 Eksamen i ELE 3719 fra 10/06/2014, Oppgave 6

Vi betrakter variasjonsproblemet

$$\max / \min \int_0^{\sqrt{3}} \left((y')^2 + 2yy' + 3y^2\right) \, \mathrm{dt} \quad \text{når} \quad y(0) = 0,\ y(\sqrt{3}) = 1$$

1. Siden $F = (y')^2 + 2yy' + 3y^2$, så blir $F'_y = 2y' + 6y$ og $F'_{y'} = 2y' + 2y$. Derfor blir Euler-likningen

$$2y' + 6y - (2y' + 2y)' = -2y'' + 6y = 0$$

eller $y'' - 3y = 0$. Den er lineær og homogen med løsning $y = C_1 e^{\sqrt{3}t} + C_2 e^{-\sqrt{3}t}$. Betingelsene $y(0) = 0$ og $y(\sqrt{3}) = 1$ gir $C_1 + C_2 = 0$, eller $C_2 = -C_1$, og $C_1(e^3 - e^{-3}) = 1$, eller

$$C_1 = \frac{1}{e^3 - e^{-3}} = \frac{e^3}{e^6 - 1}$$

og

$$y^* = \frac{e^3}{e^6 - 1}\left(e^{\sqrt{3}t} - e^{-\sqrt{3}t}\right) = \frac{e^{3+\sqrt{3}t} - e^{3-\sqrt{3}t}}{e^6 - 1}$$

2. Funksjonen $F(t,y,y') = (y')^2 + 2yy' + 3y^2$ er konveks i (y,y') siden

$$H(F) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

med $\det H(F) = 8 > 0$ og $\operatorname{tr} H(F) = 8 > 0$. Derfor er y^* et globalt minimum.

3. Minimumsverdien finner vi ved å sette inn y og y' i integralet når $y = y^*$. Vi setter $K = C_1$ og $c = \sqrt{3}$ for å forenkle utregningen. Da er

$$y = K(e^{ct} - e^{-ct}), \quad y' = cK(e^{ct} + e^{-ct})$$

og integralets verdi blir

$$\begin{aligned}
J(y^*) &= \int_0^c \left((y')^2 + 2yy' + 3y^2\right) dt \\
&= \int_0^c c^2K^2(e^{2ct} + 2 + e^{-2ct}) + 2cK^2(e^{2ct} - e^{-2ct}) + 3K^2(e^{2ct} - 2 + e^{-2ct})dt \\
&= (2c^2K^2 - 6K^2)c + (c^2K^2 + 2cK^2 + 3K^2)\left[\frac{1}{2c}e^{2ct}\right]_0^c \\
&+ (c^2K^2 - 2cK^2 + 3K^2)\left[\frac{1}{-2c}e^{-2ct}\right]_0^c \\
&= K^2\left(\frac{(6+2\sqrt{3})(e^6-1)}{2\sqrt{3}} + \frac{(6-2\sqrt{3})(1-e^{-6})}{2\sqrt{3}}\right) \\
&= \frac{e^6}{(e^6-1)^2}\left(\frac{(6+2\sqrt{3})(e^6-1)}{2\sqrt{3}} + \frac{(6-2\sqrt{3})(1-e^{-6})}{2\sqrt{3}}\right) \\
&\approx 2.74
\end{aligned}$$

Del II
Eksamen i ELE3719 Matematikk

Eksamensoppgaver med løsninger

Eksamen i ELE3719 Matematikk

Eksamensoppgaver fra 16/06/2011	- Løsninger
Eksamensoppgaver fra 28/11/2011	- Løsninger
Eksamensoppgaver fra 14/06/2012	- Løsninger
Eksamensoppgaver fra 26/11/2012	- Løsninger
Eksamensoppgaver fra 13/06/2013	- Løsninger
Eksamensoppgaver fra 27/11/2013	- Løsninger
Eksamensoppgaver fra 10/06/2014	- Løsninger