Kontinuerlige stokastiske variabler

Runar Ile

Innhold

1 Én kontinuerlig stokastisk variabel

Vi introduserer en kontinuerlige stokastiske variabel ved å se på sammenhengen mellom det diskrete og det kontinuerlige tilfellet.

1.1 Tetthetsfunksjon og kummulativ fordelingsfunksjon

En stokastisk variabel X er en slags «måling» knyttet til et «forsøk». For hver gang forsøket gjennomføres måles «resultatet» – utfallet – av forsøket og X får en verdi. Vi er interessert i sannsynligheten for ulike verdier av X (altså før vi vet resultatet av forsøket). Vi kan ha diskrete og kontinuerlige variabler.

Eksempel 1.1. (Diskret variabel)

- Forsøk: Vi kaster to terninger, en rød og en blå.
- $X =$ antall øyne til sammen.
- Mulig spørsmål: Hva er sannsynligheten for at $X = 6$? Det skriver vi som $P(X = 6)$.

Eksempel 1.2. (Kontinuerlig variabel)

- Forsøk: Vi trekker en laks opp av en mær.
- $X =$ vekten av laksen (i kg).
- Mulig spørsmål: Hva er sannsynligheten for at vekten ligger mellom 2,9 kg og 3,15 kg – dvs $2{,}9 \leqslant X \leqslant 3{,}15$. Denne sannsynligheten skriver vi som $P(2.9 \leqslant X \leqslant 3.15)$.

Definisjon 1.3. For en kontinuerlige stokastiske variabel X er *sannsynlighetstettheten* en funksjon i en variabel $f(x)$ slik at for alle tall $a < b$ gjelder

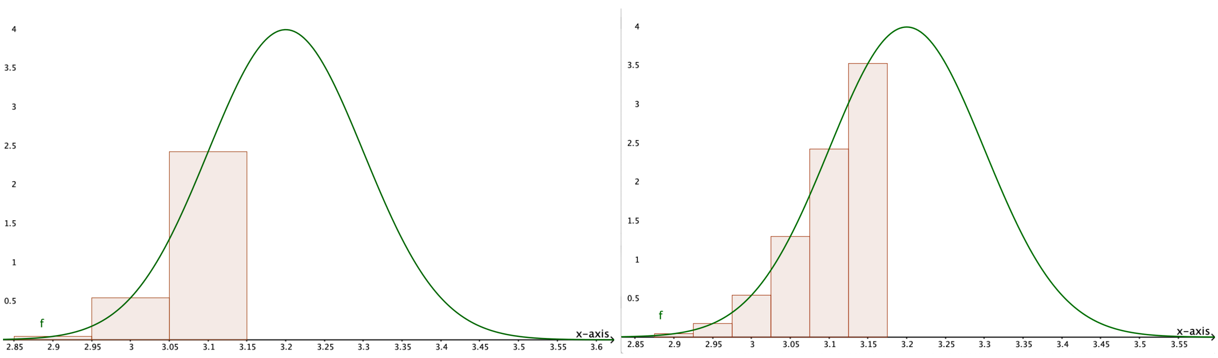
$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Dette tallet gir altså sannsynligheten for at i et forsøk havner X mellom a og b.

Merk at $f(x)$ ikke angir sannsynligheten for at $X = x$, for den er nemlig 0! For en diskret stokastisk variabel vil punktsannsynligheter typisk være positive. I Eksempel 1.1 er $P(X = 6) = \frac{5}{36}$. Kontinuelige stokastiske variabler er gjerne brukt i *modeller* som tilnærminger til et virkelig fenomen. Når vi måler ting i virkeligheten vil vi typisk måtte dele resultatene inn i intervaller og dermed få en diskret, empirisk modell. Hvis intervallene gjøres smalere får vi fremdeles en diskret modell, men den vil ligne mer på en kontinuerlig fordeling. Vi kan fremstille dette geometrisk. Anta slaktevekten på laksen er normalfordelt (en teoretisk antagelse) med forventning $\mu = 3{,}2$ kg og standardavvik $\sigma = 0{,}1$ kg (to tall som kan estimeres ved hjelp av mange veiinger og statistikk). For å lette notasjonen setter vi $\exp(x) = e^x$. Da er tetthetsfunksjonen gitt som

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] = \frac{1}{0{,}1 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-3{,}2}{0{,}1}\right)^2\right] \tag{1.3.1}$$

I figur 1 ser du grafen til $f(x)$ og to diskrete tilnærminger, den andre med smalere søyler.



Figur 1: Grafen til $f(x)$ og to diskrete tilnærminger

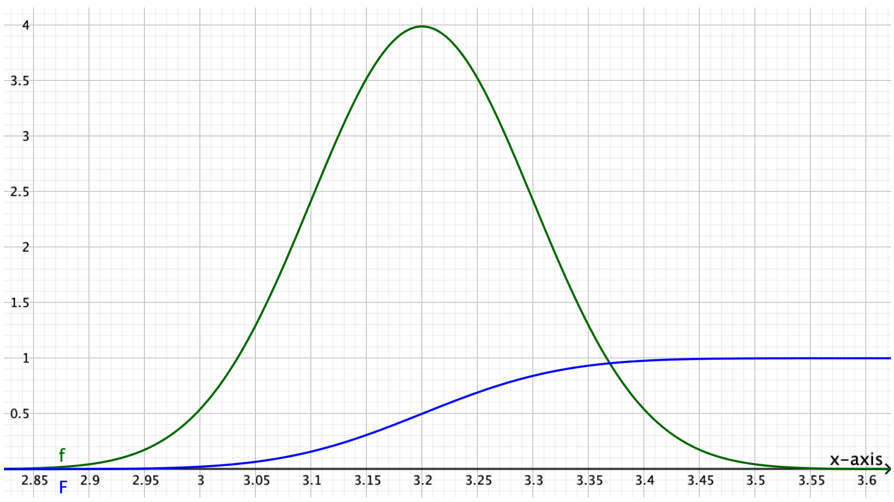
Vi kan tenke oss at søylene er fremkommet empirisk. Vi har målt mange laks på slaktetidspunktet og søylene representerer hvor mange laks som har vekten i det gjeldende intervallet. F. eks. representerer søylen lengst til høyre i det første diagrammet andelen av laks som veier mellom 3,05 kg og 3,15 kg. Men søylene er *ikke* et histogram over sannsynligheter! F. eks. er den siste søylen omtrent 2,5 høy. Men hvis vi tar *arealet* av søylen får vi den empiriske sannsynligheten for at vekten av en laks ligger mellom 3,05 kg og 3,15 kg. Siden bredden er 0,1 er $P(3{,}05 \leqslant X \leqslant 3{,}15) \approx 2{,}5 \cdot 0{,}1 = 25\%$. Når vi gjør søylene smalere (og altså deler laksevekten inn i mindre intervaller) får vi en bedre tilnærming til arealet under grafen, dvs til integralet. Vi kunne selvfølgelig bare jobbet med diskrete fordelinger, fordi alle kontinuerlige kan tilnærmes på denne måten med diskrete fordelinger. Men de kontinuerlige fordelingene har særlig den fordelen at de er enklere å behandle teoretisk. F. eks: I stedet for (lange) summer får vi integraler.

Definisjon 1.4. Den kummulative fordelingsfunksjonen $F(x)$ i det kontinuerlige tilfellet er definert som et integral med en variabel som øvre grense. Vi setter

$$F(a) = \int_{x=-\infty}^{x=a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Dette betyr at $F(a) = P(X \leqslant a)$. Så skifter vi variabel fra a til x og får $F(x)$.

Den kummulative fordelingsfunksjonen vil alltid være en voksende funksjon som synker mot 0 når $x \to -\infty$ og som vokser mot 1 når $x \to \infty$. Her er grafen til den kummulative (F, blå) tegnet i samme koordinatsystem som tetthetsfunksjonen (f, grønn) vi hadde i Figur 1.



Figur 2: Tetthetsfunksjonen $f(x)$ og den kummulative fordelingsfunksjonen $F(x)$

Fra grafen leser vi $F(3{,}15) \approx 0{,}31$ og $F(3{,}05) \approx 0{,}07$. Det betyr altså at $P(X \leqslant 3{,}15) \approx 0{,}31$, dvs 31% sjanse for at slaktevekten er under 3,15 kg. Tilsvarende betyr $F(3{,}05) = P(X \leqslant 3{,}05) \approx 0{,}07$ at det er 7% sjanse for at slaktevekten er under 3,05 kg. Det betyr videre at sannsynligheten for at vekten er mellom 3,05 og 3,15 er $F(3{,}15) - F(3{,}05) \approx 0{,}31 - 0{,}07 = 24\%$ som er bare litt under vårt grove estimat i Figur 1. Merk også at $F(3{,}2) = 0{,}5$. Det er altså like sannsynlig at en laks veier mindre enn 3,2 kg som mere enn 3,2 kg.

Vi bruker ofte symbolet på den stokastiske variabelen (f. eks. «X» eller «Y») til å markere hvilken stokastisk variabel tetthetsfunksjonen og den kummulative fordelingsfunksjonen hører til ved f. eks. å skrive $f_X(x)$ og $F_Y(t)$ ol.

Eksempel 1.5. Anta X er en stokastisk variabel med tetthetsfunksjon som er konstant i et interval $[c\,, d]$, dvs

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{d-c} & \text{for } x \in [c\,, d] \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

For $a \in [c, d]$ har vi

$$\int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{c}^{a} \frac{1}{d-c}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{d-c}\,[x]_c^a$$
$$= \frac{a-c}{d-c}$$

Da er den kummulative fordelingsfunksjonen

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < c \\ \frac{x-c}{d-c} & \text{for } x \in [c, d] \\ 1 & \text{for } x > d \end{cases}$$

I Eksempel 1.5 er ikke tetthetsfunksjonen kontinuerlig (grafen er ikke sammenhengende), men den kummulative fordelingsfunksjonen er alltid kontinuerlig (sammenhengende graf).

Eksempel 1.6. Det finnes ikke noe enkelt, gjenkjennbart algebraisk uttrykk for den kummulative fordelingsfunskjonen til en normalfordelt stokastisk variabel. Det vil si at det ikke går an å finne et enkelt, gjenkjennbart algebraisk uttrykk i a for integralet $\int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,\mathrm{d}x$ der tetthetsfunksjonen $f_X(x)$ er som i (1.3.1). Men selv om vi ikke kan finne noe uttrykk, finnes selvsagt integralet (arealene finnes jo), men man må bruke grenser av summer av arealet til smale rektangler under grafen, dvs Riemannintegralet. Dette er litt upraktisk! Heldigvis kan kalkulatorer og programmer hjelpe oss.

1.2 Forventning

Definisjon 1.7. Anta X er en kontinuerlig stokastisk variabel. *Forventningen* til X er $\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$.

Eksempel 1.8. Anta X er en stokastisk variabel med tetthetsfunksjon som i Eksempel 1.5. Da er

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{c}^{d} x \cdot \frac{1}{d-c}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{d-c} \cdot \int_{c}^{d} x\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{d-c} \cdot \left[\frac{1}{2}x^2\right]_c^d = \frac{1}{2(d-c)} \cdot \left[d^2 - c^2\right] = \frac{1}{2(d-c)} \cdot (d-c)(d+c)$$
$$= \frac{d+c}{2}$$

som er midtpunktet til intervallet $[c, d]$.

1.3 Forventningen til en avledet stokastisk variabel

Anta at vi har en funksjon $h(x)$ og en stokastisk variabel X. Da får vi en ny stokastisk variabel $Y = h(X)$. Aktuelle eksempler er $h(x) = x^2$, $h(x) = (x-a)^2$ for et fast tall a, $h(x) = 3x + 8$, osv. Selv om vi har tetthetsfunksjonen til X er det vanligvis vanskelig å finne tetthetsfunksjonen til Y. Men det er bare nødvendig å kjenne tetthetsfunksjonen til X for å finne forventningen $\mathrm{E}(Y)$ og det er litt forunderlig.

Resultat 1.9. *Anta $h(x)$ er en kontinuerlig funksjon i én variabel og sett $Y = h(X)$ for en kontinuerlig stokastisk variabel X med tetthetsfunksjon $f(x)$. Da er Y selv en stokastisk variabel med* $\mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\,\mathrm{d}x$.

Forventningen til X er et uttrykk for hvor «gjennomsnittet» av fordelingen er. Følgende resultat er derfor ikke så overraskende.

Resultat 1.10. *Anta X er en kontinuerlig stokastisk variabel og c og d er konstante tall. Da har den stokastisk variabelen $Y = cX + d$ forventning* $\mathrm{E}(Y) = c \cdot \mathrm{E}(X) + d$.

Bevis. Fra Resultat 1.9 med $Y = h(X)$ for $h(x) = cx + d$ får vi

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} (cx+d)\cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} cx\cdot f_X(x) + d\cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} cx\cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} d\cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= c\cdot \mathrm{E}(X) + d
\end{aligned}$$

□

1.4 Varians og standardavvik

Definisjon 1.11. Hvis $a = \mathrm{E}(X)$ er *variansen* til X definert som $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\big((X-a)^2\big)$.

Variansen til X er et uttrykk for hvor mye verdiene til X variérer fra forventningsverdien.

Resultat 1.12. *Hvis X er en stokastisk variabel gjelder:*
a) *Variansen kan ikke være negativ:* $\mathrm{Var}(X) \geqslant 0$
b) *Hvis $a = \mathrm{E}(X)$ er* $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - a^2$.

Bevis. Vi ser bare på det kontinuerlige tilfellet.

a) Ved Resultat 1.9 har vi at $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\big[(X-a)^2\big] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$. Her er begge faktorene $(x-a)^2$ og $f_X(x)$ større eller lik 0. Altså er også produktet $(x-a)^2\cdot f_X(x)$ større eller lik 0. Dermed er integralet lik arealet under grafen (og over x-aksen) som alltid er større eller lik 0.
b) Vi regner litt: $(X-a)^2 = X^2 - 2aX + a^2$. Så bruker vi Resultat 1.9 og får

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X^2 - 2aX + a^2) = \mathrm{E}(X^2) - 2a\cdot\mathrm{E}(X) + a^2 = \mathrm{E}(X^2) - 2a^2 + a^2 \\
&= \mathrm{E}(X^2) - a^2
\end{aligned}$$

□

Definisjon 1.13. Standardavviket $\sigma(X)$ til en stokastisk variabel X er definert som kvadratroten av variansen: $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

Ved Resultat 1.12 vet vi at $\mathrm{Var}(X) \geqslant 0$ og altså er standardavviket alltid definert. En fordel med standardavviket er at det har samme *benevning* som X, slik som forventningen $\mathrm{E}(X)$ også har.

Eksempel 1.14. Vi bruker Resultat 1.12 og Resultat 1.9 til å regne på variansen i Eksempel 1.5. Først:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^d x^2\cdot\frac{1}{d-c}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{d-c}\cdot\int_c^d x^2\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{d-c}\cdot\left[\frac{1}{3}x^3\right]_c^d = \frac{1}{3(d-c)}\cdot\left[d^3 - c^3\right] = \frac{1}{3(d-c)}\cdot(d-c)(d^2+cd+c^2) \\
&= \frac{d^2+cd+c^2}{3}
\end{aligned}$$

Ved resultat 1.12 får vi

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{d^2+cd+c^2}{3} - \left(\frac{d+c}{2}\right)^2 = \frac{d^2-2dc+c^2}{12} = \frac{(d-c)^2}{12}$$

Vi ser at variansen øker med kvadratet til avstanden mellom endepunktene på intervallet. Jo kortere intervallet er dessto mindre er variansen fra midtpunktet. Vi ser også at det ikke spiller noen rolle for variansen hvor intervallet ligger på tallinjen, bare hvor langt det er. Dette er ikke så rart siden forventningsverdien er trukket fra i definisjon til variansen: $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\Big[\big(X - \mathrm{E}(X)\big)^2\Big]$. Dette er altså forventningsverdien til kvadratet til en ny stokastisk variabel $X - \mathrm{E}(X)$ som selv har 0 som forventningsverdi: $\mathrm{E}[X - \mathrm{E}(X)] = \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(X) = 0$ (her bruker vi resultat 1.10).

Delvis integrasjon er å bruke produktregelen baklengs. Produktregelen sier at $(uv)' = u'v + uv'$. Dette kan vi skrive om som $uv' = (uv)' - u'v$ som når vi tar anti-deriverte gir $\int uv' = uv - \int u'v$.

Oppgave 1.15 (Eksponentialfordeling). Vi har en kontinuerlig stokastisk variabel Y med tetthetsfunksjon

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0.02e^{-0.02t} & \text{for } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

a) Bestem den kummulative fordelingsfunksjonen $F(t)$ til Y.
b) Sjekk at den totale sannsynligheten $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} 0.02e^{-0.02t}\mathrm{d}t = 1$.
c) Beregn forventningen $\mathrm{E}(Y)$ (Hint: Bruk delvis integrasjon!).
d) Beregn variansen $\mathrm{Var}(Y)$ (Hint: Bruk delvis integrasjon og utregningen i (c)!).

1.5 Medianen

Det finnes andre mål enn forventningsverdien for å angi «midten» til en populasjon. Medianen er et slikt mål.

Definisjon 1.16. Medianen for en kontinuerlig stokastiske variabel X er det tallet a slik at $P(X \leqslant a) = 0{,}5$.

Hvis X har tetthetsfunksjon $f(x)$ er altså medianen tallet a slik at $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}5$.

Eksempel 1.17. Vi har en kontinuerlig stokastisk variabel Y med tetthetsfunksjon

$$f_Y(t) = \begin{cases} \frac{1}{300}e^{-\frac{t}{300}} & \text{for } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Da er medianen tallet a slik at $\int_0^a \frac{1}{300}e^{-\frac{t}{300}}\,\mathrm{d}t = 0{,}5$. Vi regner først det ubestemte integralet: $\int \frac{1}{300}e^{-\frac{t}{300}}\,\mathrm{d}t = -e^{-\frac{t}{300}} + C$ (sjekk ved å derivere svaret – da må du bruke kjerneregelen med $u = -\frac{t}{300}$). Altså er a bestemt av likningen

$$\left[-e^{-\frac{t}{300}}\right]_0^a = 0{,}5 \qquad \text{dvs} \quad -e^{-\frac{a}{300}} - \left[-e^{-\frac{0}{300}}\right] = 0{,}5 \qquad \text{dvs} \quad 1 - \frac{1}{e^{\frac{a}{300}}} = 0{,}5$$

$$\text{dvs} \quad 0{,}5 = \frac{1}{e^{\frac{a}{300}}} \qquad \text{dvs} \quad e^{\frac{a}{300}} = 2$$

Setter så venstre- og høyresiden inn i $\ln(x)$ og får $\frac{a}{300} = \ln(2)$, dvs $a = 300 \cdot \ln(2) \approx 207{,}94$ som er medianen.

Vi kan sammenligne dette tallet med forventningen. For å finne den regner vi først på det ubestemte integralet ved å bruke delvis integrasjon med $u(t) = t$, $v'(t) = \frac{1}{300}e^{-\frac{t}{300}}$ og $v(t) = -e^{-\frac{t}{300}}$. Vi får

$$\int \frac{t}{300}e^{-\frac{t}{300}}\mathrm{d}t = -te^{-\frac{t}{300}} - \int -e^{-\frac{t}{300}}\mathrm{d}t = -te^{-\frac{t}{300}} - 300e^{-\frac{t}{300}} + C$$

Det gir

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) &= \int_0^{\infty} \frac{t}{300}e^{-\frac{t}{300}}\mathrm{d}t = \left[-te^{-\frac{t}{300}} - 300e^{-\frac{t}{300}}\right]_0^{\infty} \\ &= \lim_{t\to\infty}\left(-te^{-\frac{t}{300}} - 300e^{-\frac{t}{300}}\right) - \left(-0 \cdot e^{-\frac{0}{300}} - 300e^{-\frac{0}{300}}\right) \end{aligned}$$

Vi har $\lim_{t\to\infty} -300e^{-\frac{t}{300}} = \lim_{t\to\infty} \frac{-300}{e^{\frac{t}{300}}} = 0$ og ved l'Hôpitals regel er også

$$\lim_{t\to\infty} -te^{-\frac{t}{300}} = \lim_{t\to\infty} \frac{-t}{e^{\frac{t}{300}}} = \lim_{t\to\infty} \frac{-1}{\frac{1}{300}e^{\frac{t}{300}}} = \lim_{t\to\infty} \frac{-300}{e^{\frac{t}{300}}} = 0 \text{ så}$$

$$\mathrm{E}(Y) = 300$$

Vi har altså at «gjennomsnittet» $\mathrm{E}(Y)$ er klart større enn medianen («midtpunktet»).

En forskjell på forventning og median er at medianen er mindre påvirket av hva som skjer i «halen» av fordelingen enn det forventningen er. Medianen er derfor mer robust mot påvirkning fra «uteliggere» (Eks: At sjefen tjener mye mer enn de andre i bedriften trekker lønnsgjennomsnittet opp, men ikke medianen). Medianen har dessuten den fordelen at den alltid finnes, i motsetning til forventningen.

Eksempel 1.18. Vi har en kontinuerlig stokastisk variabel X med tetthetsfunksjon

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{for } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Da er medianen tallet a slik at $\int_1^a \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 0{,}5$. Vi har $\int_1^a \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^a = 1 - \frac{1}{a}$. Likningen for medianen er altså $1 - \frac{1}{a} = 0{,}5$ som gir $a = 2$. Men forventingen $\mathrm{E}(X)$ eksisterer ikke! Vi forsøker

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \int_1^\infty \frac{x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\ln(|x|)\right]_1^\infty = \lim_{x\to\infty} \ln(x) - \ln(1) \\ &= \lim_{x\to\infty} \ln(x) \end{aligned}$$

Men denne grensen finnes ikke fordi $\ln(x)$ kan bli vilkårlig stor: F. eks. er $\ln(e^N) = N$ som vi kan ta så stor vi måtte ønske. Altså finnes ikke $\mathrm{E}(X)$.

Oppgave 1.19. Vi har en stokastisk variabel X med tetthetsfunksjon

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{for } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

a) Vis at den totale sannsynligheten er 1.
b) Beregn forventningen $\mathrm{E}(X)$.
c) Beregn variansen og standardavviket til X.

1.6 Prosentiler

Definisjon 1.20. Hvis X er en stokastisk variabel og $P(X \leqslant a) = p\%$ sier vi at a er den p-te prosentilen til X.

Så hvis $p = 25$ er a grensen slik at sannsynligheten for at X er mindre eller lik a er 25%. Da kalles a ofte for første kvartil til X. Median er den 50-ende prosentilen (og andre kvartil). Tredje kvartil er den 75-te prosentilen. $p\%$ VaR (Value at Risk[1]) er den p-te prosentilen, typisk til en normalfordeling.

Eksempel 1.21. Regningen i Eksempel 1.17 ga at den kummulative fordelingsfunksjonen var

$$F_Y(t) = 1 - \frac{1}{e^{\frac{t}{300}}}$$

Første kvartil er derfor gitt av likningen $1 - \frac{1}{e^{\frac{t}{300}}} = 0{,}25$ som har løsningen $t = 300 \cdot \ln(\frac{1}{0{,}75}) = -300 \cdot \ln(0{,}75) \approx 86{,}30$. Mer generelt er p-te prosentil løsningen på likningen $1 - \frac{1}{e^{\frac{t}{300}}} = p\%$ som er $t = -300 \cdot \ln(1 - p\%)$. Her er en liten tabell.

p (i prosent)	5	25	50	75	95
Prosentil (a)	15,39	86,30	207,94	415,89	898,72

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Value_at_risk

1.7 Flere oppgaver

Oppgave 1.22. Vi har en stokastisk variabel X med tetthetsfunksjon

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{for } 2 \leqslant x \leqslant 12 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

a) Beregn (i) $P(4 \leqslant X \leqslant 7)$ (ii) $P(X \geqslant 5)$ (iii) $P(X = 9)$
b) Beregn forventningen $\mathrm{E}(X)$.
c) Beregn medianen, første kvartil og 5-te prosentil til X.
d) Beregn variansen $\mathrm{Var}(X)$ og standardavviket $\sigma(X)$.
Vi innfører en ny stokastisk variabel $Y = e^X$.
e) Beregn forventingen $\mathrm{E}(Y)$.
f) Beregn variansen $\mathrm{Var}(Y)$ og standardavviket $\sigma(Y)$.

Oppgave 1.23. Vi har en stokastisk variabel X med tetthetsfunksjon

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{for } 1 \leqslant x \leqslant e \text{ (Eulers tall)} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

a) Beregn (i) $P(X \leqslant \sqrt{e})$ (ii) $P(X \geqslant 2)$ (iii) $P(\sqrt{e} \leqslant X \leqslant 2)$
b) Bestem den kummulative fordelingsfunksjonen $F(x)$ til X.
c) Beregn forventningen $\mathrm{E}(X)$.
d) Beregn medianen, tredje kvartil og 5-te prosentil til X.
e) Beregn variansen $\mathrm{Var}(X)$ og standardavviket $\sigma(X)$.

Oppgave 1.24. Vi har en stokastisk variabel X med kummulative fordelingsfunksjon gitt som

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leqslant 0 \\ x - x\ln(x) & \text{for } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{for } x > 1 \end{cases}$$

a) Begrunn hvorfor tetthetsfunksjonen til X er

$$f_X(x) = \begin{cases} -\ln(x) & \text{for } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

b) Beregn forventningen $\mathrm{E}(X)$.
c) Beregn variansen og standardavviket til X.

2 Dobbeltintegraler

Anta at vi har en funksjon i to variabler $f(x, y)$ som er større eller lik 0 for alle x og y. Da er grafen en flate i rommet (rommet har koordinater x, y og z) over xy-planet. Vi begrenser området for x og for y til et rektangel i xy-planet. Vi kan f. eks. si at x skal variere mellom 2 og 5, dvs $2 \leqslant x \leqslant 5$, og at $1 \leqslant y \leqslant 6$. Da er grafen til $f(x, y)$ et slags «solseil» rett over rektangelet. Dobbeltintegralet til $f(x, y)$ over rektangelet beregner volumet til «huset» med grafen som tak og rektangelet som «gulv» og med vertikale «vegger». Vi skriver

$$\int_{y=1}^{y=6} \int_{x=2}^{x=5} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

for dette volumet. Regnemessig betyr dette at vi først skal ta det innerste integralet $\int_{x=2}^{x=5} f(x, y)\, \mathrm{d}x$ hvor vi tenker på y som et fast, ubestemt tall. Da må vi finne en antiderivert «med hensyn på x», dvs en funksjon $G(x,y)$ slik at den partiellderiverte med hensyn på x gir $f(x,y)$, dvs $G(x,y)'_x = f(x,y)$. NB: $\frac{\partial G(x,y)}{\partial x}$ er en annen skrivemåte for $G(x,y)'_x$. Da har vi

$$\int_{x=2}^{x=5} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \big[G(x,y)\big]_{x=2}^{x=5} = G(5,y) - G(2,y)$$

Svaret $G(5,y) - G(2,y)$ er selv en funksjon av y og den integrer vi nå med hensyn på y: $\int_{y=1}^{y=6} G(5,y) - G(2,y)\,\mathrm{d}y$. Svaret på dette integralet gir et tall for volumet under grafen til $f(x,y)$ begrenset innenfor rektangelet gitt av at $2 \leqslant x \leqslant 5$ og $1 \leqslant y \leqslant 6$.

Eksempel 2.1. Anta $f(x,y) = 4xy + 3y + 1$. Vi beregner volumet under grafen til $f(x,y)$ begrenset av at $2 \leqslant x \leqslant 5$ og $1 \leqslant y \leqslant 6$. Vi ser at $f(x,y) = 4xy + 3y + 1 \geqslant 0$ når $2 \leqslant x \leqslant 5$ og $1 \leqslant y \leqslant 6$ (faktisk for alle positive x og positive y). Da gir dobbeltintegralet $\int_{y=1}^{y=6}\int_{x=2}^{x=5} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ volumet. Vi beregner først det ubestemte integralet $\int f(x,y)\,\mathrm{d}x = 2x^2y + 3xy + x + C$ og velger den antideriverte $G(x,y) = 2x^2y + 3xy + x$. Da er

$$\begin{aligned}\int_{x=2}^{x=5} f(x,y)\,\mathrm{d}x &= \big[2x^2y + 3xy + x\big]_{x=2}^{x=5} = 2\cdot 5^2y + 3\cdot 5y + 5 - \big[2\cdot 2^2y + 3\cdot 2y + 2\big] \\ &= 50y + 15y + 5 - [8y + 6y + 2] = 51y + 3\end{aligned}$$

Så integerer vi dette uttrykket med hensyn på y og setter inn grensene:

$$\begin{aligned}\int_{y=1}^{y=6} 51y + 3\,\mathrm{d}y &= \left[\frac{51}{2}y^2 + 3y\right]_{y=1}^{y=6} = \frac{51}{2}6^2 + 3\cdot 6 - \left[\frac{51}{2}1^2 + 3\cdot 1\right] = \\ &= \frac{1815}{2} = 907{,}5\end{aligned}$$

Hvordan skal vi tolke $\int_{x=2}^{x=5} f(x,y)\,\mathrm{d}x$? For hver verdi av y får vi et vanlig enkelt-integral som gir arealet under grafen til kurven vi får fra $f(x,y)$ når y holdes fast og x varierer. F. eks. kan vi sette $y = 1$ i Eksempel 2.1. Da får vi funksjonen $f(x,1) = 4x + 4$ som har $2x^2 + 4x$ som en antiderivert og derfor

$$\int_{x=2}^{x=5} f(x,1)\,\mathrm{d}x = 2\cdot 5^2 + 4\cdot 5 - [2\cdot 2^2 + 4\cdot 2] = 70 - 16 = 54$$

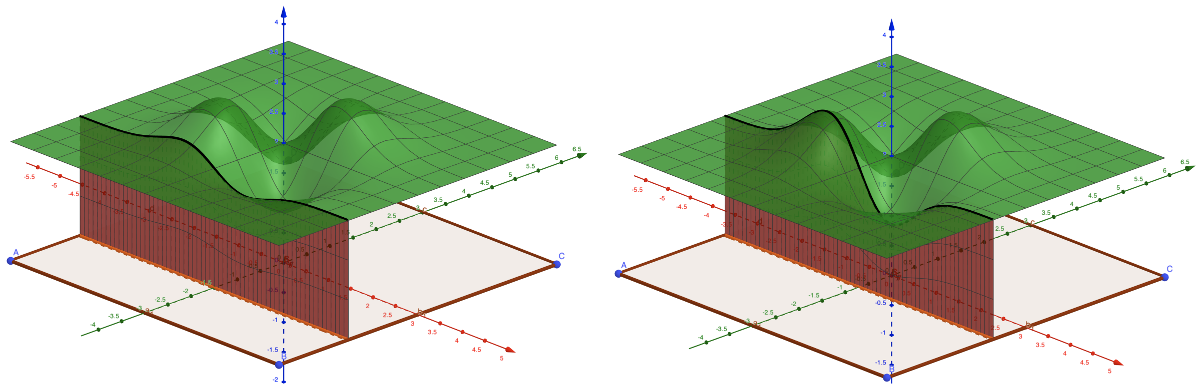
Hvis vi setter $y = 1$ inn i $51y + 3$ får vi også 54.

For $y = 3$ får vi funksjonen $f(x,3) = 12x + 10$ som har $6x^2 + 10x$ som en antiderivert og derfor

$$\int_{x=2}^{x=5} f(x,3)\,\mathrm{d}x = 6\cdot 5^2 + 10\cdot 5 - [6\cdot 2^2 + 10\cdot 2] = 200 - 44 = 156$$

Hvis vi setter $y = 3$ inn i $51y + 3$ får vi også 156.

Eksempel 2.2. Vi kan se på dette geometrisk i et annet eksempel. Her er avgrensningen i xy-planet et kvadrat gitt ved at $-3 \leqslant x \leqslant 3$ og $-3 \leqslant y \leqslant 3$. I figuren er den røde aksen x-aksen, den grønne y-aksen og den blå z-aksen. Grafen til $f(x,x)$ er den grønne bølgende flaten. Det mørke brune feltet er arealet under grafen til $f(x,-1{,}5)$ (venstre figur) og arealet under grafen til $f(x,-0{,}7)$ (høyre figur). Der den brune veggen møter det grønne taket ser du grafen til $f(x,-1{,}5)$ og grafen til $f(x,-0{,}7)$. De er markert som sorte kurver (merk at $f(x,-0{,}7)$ forsvinner ned i en dyp grop i grafen til $f(x,y)$). For å finne volumet må vi «summére opp» alle arealene for y fra -3 til 3, dvs integrere arealfunksjonen (som er en funksjon i y, slik som $51y + 3$ er det i Eksempel 2.1).



Figur 3: Arealet under $f(x, -1{,}5)$ og $f(x, -0{,}7)$

Hvis du vil undersøke denne figuren nærmere, se: https://www.geogebra.org/m/kAeYX9Ar. Huk av boksen «cross sections, y fixed» og boksen til venstre for y_0. Beveg glideren. Du kan også dra i grafen.

Alternativt kan vi begynne med å integrere $f(x, y)$ med hensyn på y først. Da får vi en funksjon av x, arealfunksjonen vi får ved å holde x fast og variere y. Hvis vi vil gjøre det i denne rekkefølgen skriver vi

$$\int_{x=2}^{x=5} \int_{y=1}^{y=6} f(x, y)\, dy\, dx$$

Svaret etter to integreringer blir det samme.

Oppgave 2.3. Anta $f(x, y) = 4xy + 3y + 1$ som i Eksempel 2.1.

a) Beregn $\int_{y=1}^{y=6} f(x, y)\, dy$ som en funksjon av x.

b) Bruk dette til å beregne dobbeltintegralet

$$\int_{x=2}^{x=5} \int_{y=1}^{y=6} f(x, y)\, dy\, dx$$

i denne rekkefølgen.

c) Beregn $\int_{y=1}^{y=6} f(3, y)\, dy$ og sammenlign med det du får ved å sette $x = 3$ inn i uttrykket fra (a).

3 To kontinuerlige simultant fordelte stokastiske variabler

3.1 Introduksjon

To simultant fordelte stokastiske variabler betyr at vi har *ett forsøk og to stokastiske variabler for forsøket*.

Eksempel 3.1. (Diskrete variabler)

- Forsøk: Vi kaster to terninger, en rød og en blå.
- $X =$ antall øyne til sammen. $Y = 1$ hvis det er to like, $Y = 0$ ellers.
- Mulig spørsmål: Hva er sannsynligheten for at $X = 6$ og $Y = 0$? Det skriver vi som $P(X = 6, Y = 0)$.

Eksempel 3.2. (Kontinuerlige variabeler)

- Forsøk: Vi trekker en laks opp av en mær.
- $X =$ vekten av laksen i kilo, $Y =$ omkretsen av laksen (foran ryggfinnen) i centimeter.
- Mulig spørsmål: Hva er sannsynligheten for at vekten ligger mellom 2,9 kg og 3,1 kg og at omkretsen ligger mellom 40 cm og 45 cm? – dvs $2{,}9 \leqslant X \leqslant 3{,}1$ og $40 \leqslant Y \leqslant 45$. Denne sannsynligheten skriver vi som $P(2{,}9 \leqslant X \leqslant 3{,}1\,, 40 \leqslant Y \leqslant 45)$.

3.2 Simultan sannsynlighetstetthet

Definisjon 3.3. For to simultant fordelte kontinuerlige stokastiske variabler X og Y er *den simultane sannsynlighetstettheten* en funksjon i to variabler $f(x,y)$ slik at for alle tall $a < b$ og $c < d$ gjelder

$$P(a \leqslant X \leqslant b\,, c \leqslant Y \leqslant d) = \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=a}^{x=b} f(x\,,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Dette tallet gir altså sannsynligheten for at i et forsøk havner X mellom a og b og Y mellom c og d.

Veldig ofte (i modeller) får man oppgitt tetthetsfunksjonen. Da kan man regne på sannsynligheter.

Eksempel 3.4. Anta X og Y er to simultant fordelte stokastiske variabler med simultan sannsynlighetstetthet

$$f(x\,,y) = \begin{cases} \frac{1}{91}xy^2 & \text{for } 2 \leqslant x \leqslant 5 \text{ og } 1 \leqslant y \leqslant 3 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Beregn sannsynligheten for at i ett forsøk vil
a) $2 \leqslant X \leqslant 3$ og $1 \leqslant Y \leqslant 2$
b) $2 \leqslant X \leqslant 3$ og $Y = 2$
c) $2 \leqslant X \leqslant 3$ og ingen begrensninger på Y

Løsning:
a) Her er $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$ og $d = 2$. Det gir

$$\begin{aligned} P(2 \leqslant X \leqslant 3\,, 1 \leqslant Y \leqslant 2) &= \int_{y=1}^{y=2} \int_{x=2}^{x=3} \frac{1}{91}xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{91}\int_{y=1}^{y=2} \left(\int_{x=2}^{x=3} xy^2\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{91}\int_{y=1}^{y=2} \left(\int_{x=2}^{x=3} x\,\mathrm{d}x \right) y^2\,\mathrm{d}y = \frac{1}{91}\int_{y=1}^{y=2} \left(\frac{1}{2}\big[x^2\big]_{x=2}^{x=3} \right) y^2\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{91}\int_{y=1}^{y=2} \left(\frac{1}{2}\big[3^2 - 2^2\big] \right) y^2\,\mathrm{d}y = \frac{5}{182}\int_{y=1}^{y=2} y^2\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{5}{182}\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{y=1}^{y=2} = \frac{5}{182}\cdot\frac{1}{3}\big[2^3 - 1^3\big] = \frac{35}{546} \approx 6{,}41\% \end{aligned}$$

b) Vi starter på samme måte som i (a), det innerste integralet er likt:

$$\begin{aligned} P(2 \leqslant X \leqslant 3\,, Y = 2) &= \int_{y=2}^{y=2} \int_{x=2}^{x=3} \frac{1}{91}xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{5}{182}\int_{y=2}^{y=2} y^2\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{5}{182}\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{y=2}^{y=2} = \frac{5}{182}\cdot\frac{1}{3}\big[2^3 - 2^3\big] = \frac{5}{182}\cdot\frac{1}{3}\cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

og 0 blir det altså hver gang vi krever at en av de kontinuerlige stokastiske variablene skal være lik en bestemt verdi.

c) Her er det ingen begrensning på hva slags verdier Y kan ha og derfor får vi

$$P(2 \leqslant X \leqslant 3\,, -\infty < Y < \infty) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty}\int_{x=2}^{x=3} f(x\,,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

som betyr den doble grenseverdien

$$= \lim_{c\to-\infty}\lim_{d\to\infty}\left(\int_{y=c}^{y=d}\int_{x=2}^{x=3} f(x\,,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)$$

men her er jo $f(x\,,y)$ lik 0 for $y<1$ eller $y>3$ så derfor er dette

$$= \int_{y=1}^{y=3}\int_{x=2}^{x=3} \frac{1}{91}xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

og fra utregningen i (a) får vi

$$= \frac{5}{182}\int_{y=1}^{y=3} y^2\,\mathrm{d}y = \frac{5}{182}\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{y=1}^{y=3}$$

$$= \frac{5}{182}\cdot\frac{1}{3}\left[3^3-1^3\right] = \frac{5}{182}\cdot\frac{1}{3}\cdot 26 = \frac{65}{273} = \frac{5}{21} \approx 23{,}81\%$$

Definisjon 3.5. En funksjon i to variabler $f(x\,,y)$ er en simultan tetthetsfunksjon hvis

1) $f(x\,,y) \geqslant 0$ for alle verdier x og y
2) den totale sannsynligheten er 1:

$$\int_{y=-\infty}^{y=\infty}\int_{x=-\infty}^{x=\infty} f(x\,,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$$

Oppgave 3.6. Anta a og b er to positive tall[2] og la $f(x\,,y)$ være funksjonen som er konstant lik c innenfor rektanglet $[0\,,a]\times[0\,,b]$ og lik 0 ellers, dvs

$$f(x\,,y) = \begin{cases} c & \text{for } 0\leqslant x\leqslant a \text{ og } 0\leqslant y\leqslant b \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

a) Bestem konstanten c slik at $f(x\,,y)$ blir en simultan sannsynlighetstetthet til to simultant fordelte stokastiske variabler X og Y.
b) Beregn (i) $P(X \leqslant \frac{a}{2}\,, Y \leqslant \frac{b}{3})$ (ii) $P(\frac{a}{3} \leqslant X \leqslant \frac{2a}{3})$

Oppgave 3.7. Vi har funksjonen

$$f(x\,,y) = \begin{cases} ce^{-0{,}2x-0{,}5y} & \text{for } x\geqslant 0 \text{ og } y\geqslant 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

for et ubestemt fast tall c.

a) Bestem c slik at $f(x\,,y)$ blir en simultan sannsynlighetstetthet til to simultant fordelte stokastiske variabler X og Y.
b) Beregn (i) $P(X \leqslant 1\,, Y \leqslant 1)$ (ii) $P(1 \leqslant Y \leqslant 2)$

3.3 Kummulativ fordelingsfunksjon

Som for diskrete simultant fordelte stokastiske variabeler er det også en kummulativ fordelingsfunksjon $F(x\,,y)$ i det kontinuerlige tilfellet. Den er definert som et dobbeltintegral med variablene som øvre grenser. Vi setter

$$F(a\,,b) = \int_{y=-\infty}^{y=b}\int_{x=-\infty}^{x=a} f(x\,,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

[2] Hvis du syns det blir mange parametre å holde orden på kan du først anta $a=5$ og $b=7$ og når du har fått til det gjøre oppgaven på nytt med a og b.

Dette betyr at $F(a,b) = P(X \leqslant a, Y \leqslant b)$. Så skifter vi variabler og får $F(x,y)$.

Eksempel 3.8. I Eksempel 3.4 får vi

$$
\begin{aligned}
F(a,b) = P(X \leqslant a, Y \leqslant b) &= \int_{y=-\infty}^{y=b} \int_{x=-\infty}^{x=a} f(x,y)\,dx\,dy \\
&= \lim_{c\to-\infty} \lim_{d\to\infty} \left(\int_{y=c}^{y=b} \int_{x=d}^{x=a} f(x,y)\,dx\,dy \right) \\
&= \begin{cases}
\int_{y=1}^{y=b} \int_{x=2}^{x=a} \frac{1}{91} x y^2\,dx\,dy & \text{hvis } 2 \leqslant a \leqslant 5 \text{ og } 1 \leqslant b \leqslant 3 \\
\int_{y=1}^{y=b} \int_{x=2}^{x=5} \frac{1}{91} x y^2\,dx\,dy & \text{hvis } a > 5 \text{ og } 1 \leqslant b \leqslant 3 \\
\int_{y=1}^{y=3} \int_{x=2}^{x=a} \frac{1}{91} x y^2\,dx\,dy & \text{hvis } 2 \leqslant a \leqslant 5 \text{ og } b > 3 \\
0 & \text{hvis } a < 2 \text{ eller } b < 1 \\
1 & \text{hvis } a > 5 \text{ og } b > 3
\end{cases} \\
&= \begin{cases}
\frac{1}{546}(a^2-4)(b^3-1) & \text{hvis } 2 \leqslant a \leqslant 5 \text{ og } 1 \leqslant b \leqslant 3 \\
\frac{1}{26}(b^3-1) & \text{hvis } a > 5 \text{ og } 1 \leqslant b \leqslant 3 \\
\frac{1}{21}(a^2-4) & \text{hvis } 2 \leqslant a \leqslant 5 \text{ og } b > 3 \\
0 & \text{hvis } a < 2 \text{ eller } b < 1 \\
1 & \text{hvis } a > 5 \text{ og } b > 3
\end{cases}
\end{aligned}
$$

Oppgave 3.9. Sjekk denne utregningen nøye! Vær sikker på at du forstår hvorfor de forskjellige tilfellene oppstår! (Hint: Tegn en figur av rektangelet hvor $f(x,y)$ er forskjellig fra 0.)

Når vi skifter variabler gir dette den kummulative fordelingsfunksjonen

$$
F(x,y) = \begin{cases}
\frac{1}{546}(x^2-4)(y^3-1) & \text{hvis } 2 \leqslant x \leqslant 5 \text{ og } 1 \leqslant y \leqslant 3 \\
\frac{1}{26}(y^3-1) & \text{hvis } x > 5 \text{ og } 1 \leqslant y \leqslant 3 \\
\frac{1}{21}(x^2-4) & \text{hvis } 2 \leqslant x \leqslant 5 \text{ og } y > 3 \\
0 & \text{hvis } x < 2 \text{ eller } y < 1 \\
1 & \text{hvis } x > 5 \text{ og } y > 3
\end{cases}
$$

Hvis vi partiellderiverer $F(x,y)$ to ganger, en gang med hensyn på x og en gang med hensyn på y, får vi

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} &= \begin{cases}
\frac{1}{91} x y^2 & \text{hvis } 2 \leqslant x \leqslant 5 \text{ og } 1 \leqslant y \leqslant 3 \\
0 & \text{hvis } x > 5 \text{ og } 1 \leqslant y \leqslant 3 \\
0 & \text{hvis } 2 \leqslant x \leqslant 5 \text{ og } y > 3 \\
0 & \text{hvis } x < 2 \text{ eller } y < 1 \\
0 & \text{hvis } x > 5 \text{ og } y > 3
\end{cases} \\
&= f(x,y)
\end{aligned}
$$

Fra analysens fundamentalteorem får vi at det alltid er sånn: $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$. NB: Det er mange funksjoner som vil ha den samme funksjonen $f(x,y)$ som sin dobbelt partiellderiverte. F. eks. gir $G(x,y) = \frac{1}{546}(x^2-4)(y^3-1) + 30e^{-x^2} + 7y^4 + 1$ også $\frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{91} x y^2$.

Oppgave 3.10. Bruk den kummulative fordelingsfunksjonen til å uttrykke svarene i Eksempel 3.4 (a) og (c), og til å uttrykke $P(3 \leqslant X \leqslant 4, 2 \leqslant Y \leqslant 4$.

Oppgave 3.11. Vi har to simultant fordelte stokastiske variabler X og Y med kummulativ fordelingsfunksjon

$$
F(x,y) = \begin{cases}
\left(1 - e^{-0{,}2x}\right)\left(1 - e^{-0{,}3y}\right) & \text{for } x \geqslant 0 \text{ og } y \geqslant 0 \\
0 & \text{ellers}
\end{cases}
$$

a) Beregn (i) $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 2)$ (ii) $P(1 \leqslant X \leqslant 3, 1 \leqslant Y \leqslant 2)$ (iii) $P(Y \leqslant 2)$
b) Beregn den simultane sannsynlighetstettheten $f(x, y)$.

4 Marginalene

At vi har to kontinuerlige simultant fordelte stokastiske variabler X og Y betyr spesielt at X og Y hver for seg er kontinuerlige stokastiske variabler. Da har de hver sin sannsynlighetstetthet $f_X(x)$ og $f_Y(y)$. Disse kan vi finne fra den simultane sannsynlighetstettheten $f(x, y)$ på følgende måte.

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y \qquad \text{og} \qquad f_Y(y) = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

Dette ligner på det diskrete tilfellet hvor vi summerer over all y-verdier (henholdsvis x-verdier) for å finne $f_X(x)$ (henholdsvis $f_Y(y)$). Vi kaller $f_X(x)$ og $f_Y(y)$ for de *marginale* tetthetsfunksjonene til $f(x, y)$.

Eksempel 4.1. Beregn de marginale tetthetsfunksjonene i Eksempel 3.4.

Løsning:

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y$$

som betyr den doble grenseverdien

$$= \lim_{c\to-\infty} \lim_{d\to\infty} \left(\int_{y=c}^{y=d} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right)$$

men her er jo $f(x, y)$ lik 0 for $y < 1$ og for $y > 3$ så derfor er dette

$$= \int_{y=1}^{y=3} \frac{1}{91} x y^2\,\mathrm{d}y = \frac{1}{91} x \int_{y=1}^{y=3} y^2\,\mathrm{d}y = \frac{1}{91} x \left[\frac{1}{3} y^3\right]_{y=1}^{y=3}$$

$$= \frac{1}{91} \cdot \frac{1}{3} x \left[3^3 - 1^3\right] = \frac{2}{21} x \quad \text{for } 2 \leqslant x \leqslant 5 \text{ og } f_X(x) = 0 \text{ ellers.}$$

$$f_Y(y) = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{x=2}^{x=5} \frac{1}{91} x y^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{91} y^2 \int_{x=2}^{x=5} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{91} y^2 \left[\frac{1}{2} x^2\right]_{x=2}^{x=5}$$

$$= \frac{1}{91} \cdot \frac{1}{2} y^2 \left[5^2 - 2^2\right] = \frac{3}{26} y^2 \quad \text{for } 1 \leqslant y \leqslant 3 \text{ og } f_Y(y) = 0 \text{ ellers.}$$

5 Forventning, varians og kovarians

5.1 Introduksjon

Hvis vi har en funksjon av to variabler $h(x, y)$ får vi en ny stokastisk variabel $Z = h(X, Y)$. Her er det mange muligheter! – og dette er en viktig grunn til at stokastiske variabler er så nyttige. Problemet er at det generelt er veldig vanskelig å finne tetthetsfunksjonen til Z (og vi skal ikke gjøre det). Men forventningsverdien til den nye stokastiske variabelen kan vi regne mye enklere med dette resultatet:

Resultat 5.1. *Anta $h(x, y)$ er en kontinuerlig funksjon i to variabler og sett $Z = h(X, Y)$ for simultant fordelte kontinuerlige stokastiske variabler X og Y med simultan tetthetsfunksjon $f(x, y)$. Da er Z selv en stokastisk variabel med forventningsverdi*

$$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}\big(h(X, Y)\big) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} h(x, y) \cdot f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Eksempel 5.2. Vi har funksjonen $h(x,y) = xy$ som gir

$$\mathrm{E}(XY) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} xy \cdot f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Eksempel 5.3. I Eksempel 3.4 får vi

$$\mathrm{E}(X) = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=2}^{x=5} \frac{2}{21}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{21}\cdot\frac{1}{3}\left[x^3\right]_{x=2}^{x=5} = \frac{2}{21}\cdot\frac{1}{3}\left[5^3-2^3\right] = \frac{26}{7}$$

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} y \cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_{y=1}^{y=3} \frac{3}{26}y^3\,\mathrm{d}y = \frac{3}{26}\cdot\frac{1}{4}\left[y^4\right]_{y=1}^{y=3} = \frac{3}{26}\cdot\frac{1}{4}\left[3^4-1^4\right] = \frac{30}{13}$$

$$\begin{aligned}
\text{og} \qquad \mathrm{E}(XY) &= \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} xy \cdot f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{y=1}^{y=3} \int_{x=2}^{x=5} \frac{1}{91}x^2y^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{91}\int_{y=1}^{y=3}\left(\int_{x=2}^{x=5} x^2\,\mathrm{d}x\right)y^3\mathrm{d}y = \frac{1}{91}\int_{y=1}^{y=3}\frac{1}{3}\left[x^3\right]_{x=2}^{x=5} y^3\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{91}\int_{y=1}^{y=3}\frac{1}{3}\left[5^3-2^3\right]y^3\mathrm{d}y = \frac{3}{7}\int_{y=1}^{y=3} y^3\mathrm{d}y = \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{4}\left[y^4\right]_{y=1}^{y=3} = \frac{60}{7}
\end{aligned}$$

Resultat 5.1 gir en alternativ måte å regne forventingsverdiene til X og til Y på uten at vi trenger å finne marginalene først!

Resultat 5.4.

$$\mathrm{E}(X) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty}\int_{x=-\infty}^{x=\infty} x \cdot f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{og} \quad \mathrm{E}(Y) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty}\int_{x=-\infty}^{x=\infty} y \cdot f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Dette er spesialtilfeller av Resultat 5.1 som vi ganske lett kan argumentere for.

Bevis. For $\mathrm{E}(X)$ begynner vi med definisjonen av forventningsverdien av X og substituerer med definisjonen av marginalen.

$$\mathrm{E}(X) = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} x \cdot \left(\int_{y=-\infty}^{y=\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

Fordi x er som en konstant når vi integrerer med hensyn på y, er dette

$$= \int_{x=-\infty}^{x=\infty}\int_{y=-\infty}^{y=\infty} x \cdot f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Så bytter vi om på rekkefølgen av de to integralene, det endrer ikke på svaret.

$$= \int_{y=-\infty}^{y=\infty}\int_{x=-\infty}^{x=\infty} x \cdot f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

som var det vi ville vise. Men det følger altså også av Resultat 5.1 med $h(x,y) = x$. Et tilsvarende argument gir formelen for $\mathrm{E}(Y)$. □

Oppgave 5.5. Lag et argumentet for at $\mathrm{E}(Y) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty}\int_{x=-\infty}^{x=\infty} y \cdot f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Oppgave 5.6. Anta a, b og c er faste tall. Vis at $\mathrm{E}(aX + bY + c) = a \cdot \mathrm{E}(X) + b \cdot \mathrm{E}(Y) + c$

5.2 Varians og kovarians

Definisjon 5.7. Anta X og Y er to simultant fordelte stokastiske variabler med forventninger $a = \mathrm{E}(X)$ og $b = \mathrm{E}(Y)$. Da er *kovariansen* til X og Y gitt som forventningen til den stokastiske variabelen $h(X, Y) = (X - a)(Y - b)$. Vi skriver $\mathrm{Cov}(X, Y)$ for dette tallet. Ved Resultat 5.1 vil det si (for kontinuerlig variabler) at

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} (x-a)(y-b) \cdot f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

Resultat 5.8. *Hvis X og Y er to simultant fordelte stokastiske variabler gjelder*

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y)$$

Bevis. Vi regner litt:

$$(x-a)(y-b) \cdot f(x, y) = xy \cdot f(x, y) - bx \cdot f(x, y) - ay \cdot f(x, y) + ab \cdot f(x, y)$$

Ved å bruke Resultat 5.4 får vi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} xy \cdot f(x, y) - bx \cdot f(x, y) - ay \cdot f(x, y) + ab \cdot f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\
&= \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} xy \cdot f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y - b \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} x \cdot f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\
&\quad - a \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} y \cdot f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + ab \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\
&= \mathrm{E}(XY) - b \cdot \mathrm{E}(X) - a \cdot \mathrm{E}(Y) + ab \cdot 1 \\
&= \mathrm{E}(XY) - b \cdot a - a \cdot b + ab \cdot 1 = \mathrm{E}(XY) - ab \\
&= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y)
\end{aligned}$$

□

Eksempel 5.9. I Eksempel 5.3 fant vi $\mathrm{E}(X) = \frac{26}{7}$, $\mathrm{E}(Y) = \frac{30}{13}$ og $\mathrm{E}(XY) = \frac{60}{7}$. Det gir da $\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{60}{7} - \frac{26}{7} \cdot \frac{30}{13} = \frac{60}{7} - \frac{60}{7} = 0$. Dette er ikke tilfeldig, som vi snart skal se. Men kovariansen er ikke alltid 0.

Oppgave 5.10. Vi har to simultant fordelte stokastiske variabler X og Y med simultan tetthetsfunksjon

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}y^2 & \text{for } 0 \leqslant x \leqslant 3 \text{ og } 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

a) Bestem de marginale tetthetsfunksjonene $f_X(x)$ og $f_Y(y)$.
b) Beregn forventningene $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$ og $\mathrm{E}(XY)$.
c) Beregn variansene $\mathrm{Var}(X)$ og $\mathrm{Var}(Y)$.
d) Beregn kovariansen $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

6 Uavhengige stokastiske variabler

Vi vil gjerne ha en presis definisjon av det litt vage fenomenet at utfallene til stokastiske variabeler er uavhengige av hverandre.

6.1 Definisjon

Definisjon 6.1. To simultant fordelte stokastiske variabler X og Y er *uavhengige* hvis produktet av de marginale tetthetsfunksjonene gir den simultane tetthetsfunksjonen:

$$f_X(x)\cdot f_Y(y)=f(x\,,y)$$

Eksempel 6.2. Fra Eksempel 4.1 har vi de marginale tetthetsfunksjonene til den simultane tetthetsfunksjonen i Eksempel 3.4 gitt som

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{21}x & \text{for } 2\leqslant x\leqslant 5\\ 0 & \text{ellers}\end{cases}\qquad \text{og}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{26}y^2 & \text{for } 1\leqslant y\leqslant 3\\ 0 & \text{ellers}\end{cases}$$

Hvis vi multipliserer disse funksjonene sammen får vi

$$\begin{aligned}f_X(x)\cdot f_Y(y)&=\begin{cases}\frac{2}{21}x\cdot\frac{3}{26}y^2 & \text{for } 2\leqslant x\leqslant 5 \text{ og } 1\leqslant y\leqslant 3\\ 0\cdot\frac{3}{26}y^2 & \text{for } x<2 \text{ eller } x>5\text{, og } 1\leqslant y\leqslant 3\\ \frac{2}{21}x\cdot 0 & \text{for } 2\leqslant x\leqslant 5 \text{ og, } y<1 \text{ eller } y>3\\ 0\cdot 0 & \text{ellers}\end{cases}\\ &=\begin{cases}\frac{1}{91}xy^2 & \text{for } 2\leqslant x\leqslant 5 \text{ og } 1\leqslant y\leqslant 3\\ 0 & \text{ellers}\end{cases}\\ &=f(x\,,y)\end{aligned}$$

Altså er X og Y uavhengige stokastiske variabler.

Gitt marginalene, hvordan finne den simultane? – bare mulig hvis variabelene er uavhengige!

6.2 Uavhengighet og kovarians

Anta X og Y er uavhengige simultant fordelte stokastiske variabler. Da får vi

$$\mathrm{E}(XY)=\int_{y=-\infty}^{y=\infty}\int_{x=-\infty}^{\infty}xy\cdot f(x\,,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{y=-\infty}^{y=\infty}\int_{x=-\infty}^{\infty}xy\cdot f_X(x)\cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

fordi $y\cdot f_Y(y)$ er konstant med hensyn på x (inneholder ingen x-variabel) kan vi ta $y\cdot f_Y(y)$ utenfor det innerste integralet:

$$\begin{aligned}&=\int_{y=-\infty}^{y=\infty}\left(\int_{x=-\infty}^{\infty}x\cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x\right)\cdot y\cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y\\ &=\int_{y=-\infty}^{y=\infty}\mathrm{E}(X)\cdot y\cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y=\mathrm{E}(X)\cdot\int_{y=-\infty}^{y=\infty}y\cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y\\ &=\mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y)\end{aligned}$$

Dermed blir $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y)-\mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y)=0$. Så hvis man finner ut at $\mathrm{Cov}(X,Y)\neq 0$ så kan ikke X og Y være uavhengige. Men det omvendte gjelder ikke: Selv om $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ behøver ikke X og Y å være uavhengige. For å skille sier vi at X og Y er (lineært) *ukorrelerte* hvis $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$. Uavhengige simultant fordelte stokastiske variabler er altså ukorrelerte, men det er ikke nødvendigvis omvendt.

Eksempel 6.3. De to simultant fordelte stokastiske variablene i oppgave 5.10 er ikke uavhengige fordi $\mathrm{Cov}(X,Y)\neq 0$.

7 Betinget sannsynlighetsfordeling

7.1 Introduksjon

Hvis noe informasjon om forsøket er kjent får man betinget sannsynlighet.

Eksempel 7.1. (Diskrete variabler)

- Forsøk: Vi kaster to terninger, en rød og en blå.
- $X =$ antall øyne til sammen. $Y = 1$ hvis det er to like, $Y = 0$ ellers.
- Mulig spørsmål: Hva er sannsynligheten for at $X = 6$ *gitt at* $Y = 0$? Det skriver vi som $P(X = 6 \mid Y = 0)$.

Den gitte informasjonen innsnevrer utfallsrommet til de $6 \cdot 6 - 6 = 30$ mulighetene hvor $Y = 0$. Alle disse 30 mulige utfallene er like sannsynlige. Blant disse 30 er det 4 utfall som gir $X = 6$. Derfor blir $P(X = 6 \mid Y = 0) = \frac{4}{30}$. Legg merke til at dette ikke er det samme som sannsynligheten for at $X = 6$ og $Y = 0$ for den er $P(X = 6\,,\, Y = 0) = \frac{4}{36}$. Vi kan også bare bruke sannsynligheter til regne på den betingete sannsynligheten:

$$P(X = 6 \mid Y = 0) = \frac{P(X = 6\,,\, Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{4}{30}$$

Eksempel 7.2. (Kontinuerlige variabeler)

- Forsøk: Vi trekker en laks opp av en mær.
- $X =$ vekten av laksen, $Y =$ omkretsen av laksen foran ryggfinnen.
- Mulig spørsmål: Hva er sannsynligheten for at vekten ligger mellom 2,9 kg og 3,1 kg *gitt at* omkretsen er 40 cm? Denne sannsynligheten skriver vi som $P(2{,}9 \leqslant X \leqslant 3{,}1 \mid Y = 40)$.

Eksempel 7.3. (Kontinuerlige variabeler)

- Forsøk: En sportsjakke selges en sesong.
- $X =$ antall solgte sportsjakker, $Y =$ prisen.
- Mulig spørsmål: Hva er sannsynligheten for at antall solgte sportsjakker ligger mellom 5 000 og 6 000 *gitt at* prisen er 2500? Denne sannsynligheten skriver vi som $P(5\,000 \leqslant X \leqslant 6\,000 \mid Y = 2500)$.

7.2 Motivasjon for definisjonen

For diskrete variabler kan vi bruke bruke kvotienten

$$\frac{P(X = a\,,\, Y = b)}{P(Y = b)}$$

til å regne ut den betingete sannsynligheten $P(X = a \mid Y = b)$, dvs sannsynligheten for at $X = a$ gitt at $Y = b$, under forutsetning av at $P(Y = b) > 0$. I Eksempel 7.1 var det akkurat dette vi gjorde i den andre utregningen. Men når vi har kontinuerlige variabler som i Eksempel 7.2 vil nevneren i brøken

$$\frac{P(2{,}9 \leqslant X \leqslant 3{,}1\,,\, Y = 40)}{P(Y = 40)}$$

alltid være 0 og dermed har ikke brøken mening. Men legg merke til at telleren også er 0. Dermed er det mulig at dette kan fikses ved å bruke grenser. Vi tar et lite intervall fra 40 og oppover, dvs $[40\,,\, 40 + h]$ for en liten positiv h. Så antar vi at $P(40 \leqslant Y \leqslant 40 + h)$ er positiv for alle små, positive h, og det er gjerne sant. Da er brøken

$$\frac{P(2{,}9 \leqslant X \leqslant 3{,}1\,,\, 40 \leqslant Y \leqslant 40 + h)}{P(40 \leqslant Y \leqslant 40 + h)}$$

et tall (som typisk avhenger av hva tallet h er). Så lar vi h nærme seg 0 og ser hva som skjer med brøken. Hvis brøken nærmer seg et fast tall mer og mer, sier vi at dette tallet gir den betingete sannsynligheten $P(2{,}9 \leqslant X \leqslant 3{,}1 \mid Y = 40)$.

7.3 Formell utledning av tetthetsfunksjonen for en betinget stokastisk variabel

La oss nå gjøre dette ved å bruke tetthetsfunksjonene, veldig generelt. Vi skal bruke to ting. Først l'Hôpitals regel: Anta at vi har to deriverbare funksjoner $u(h)$ og $v(h)$ – her bruker vi h som variabel pga anvendelsen. l'Hôpitals regel sier da at hvis $\lim_{h\to c} u(h) = 0$ og $\lim_{h\to c} v(h) = 0$ så er

$$\lim_{h\to c} \frac{v(h)}{u(h)} = \lim_{h\to c} \frac{u'(h)}{v'(h)}$$

hvis den siste grensen finnes. Dernest skal vi bruke (en variant av) analysens fundamentalteorem som sier at hvis vi har en funksjon $G(h)$ gitt som et integral hvor variabelen er i den øvre grensen som her: $G(h) = \int_{t=b}^{t=b+h} g(y)\,\mathrm{d}y$ så er $G'(h) = g(b+h)$. Nå regner vi på grensen vi er interessert i.[3]

$$\lim_{h\to 0} \frac{P(X \leqslant a\,,\, b \leqslant Y \leqslant b+h)}{P(b \leqslant Y \leqslant b+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\int_{y=b}^{y=b+h} \int_{-\infty}^{x=a} f(x\,,\,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_{y=b}^{y=b+h} f_Y(y)\,\mathrm{d}y}$$

Både teller og nevner nærmer seg 0. Vi bruker l'Hôpitals regel og får

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left[\int_{y=b}^{y=b+h} \int_{-\infty}^{x=a} f(x\,,\,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left[\int_{y=b}^{y=b+h} f_Y(y)\,\mathrm{d}y\right]}$$

Vi skifter rekkefølgen av integralene i telleren

og derivasjonen flyttes inn forbi det ytre integralet som ikke avhenger av h:

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left[\int_{-\infty}^{x=a} \int_{y=b}^{y=b+h} f(x\,,\,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right]}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left[\int_{y=b}^{y=b+h} f_Y(y)\,\mathrm{d}y\right]} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_{-\infty}^{x=a} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\int_{y=b}^{y=b+h} f(x\,,\,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left[\int_{y=b}^{y=b+h} f_Y(y)\,\mathrm{d}y\right]}$$

Vi bruker fundamentalteoremet i teller og nevner og får

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\int_{-\infty}^{x=a} f(x\,,\,b+h)\,\mathrm{d}x}{f_Y(b+h)} = \frac{\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{x=a} f(x\,,\,b+h)\,\mathrm{d}x}{\lim_{h\to 0} f_Y(b+h)} = \frac{\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{x=a} f(x\,,\,b+h)\,\mathrm{d}x}{f_Y(b)}$$

og flytter grensen innenfor integralet (ok veldig generelt):

$$= \frac{\int_{-\infty}^{x=a} \left[\lim_{h\to 0} f(x\,,\,b+h)\right]\mathrm{d}x}{f_Y(b)} = \frac{\int_{-\infty}^{x=a} f(x\,,\,b)\,\mathrm{d}x}{f_Y(b)}$$

Fordi nevneren ikke inneholder x kan vi flytte integralet utenfor hele brøken:

$$= \int_{-\infty}^{x=a} \frac{f(x\,,\,b)}{f_Y(b)}\,\mathrm{d}x$$

Konklusjonen er at brøken $\frac{f(x\,,\,b)}{f_Y(b)}$ gir tetthetsfunksjonen til en ny stokastisk variabel «*X gitt at Y er lik b*». Denne variabelen kan vi skrive som $X_{|Y=b}$ eller litt kortere som $X|b$.

Tilsvarende kunne vi regne på grensen $\lim_{h\to 0} P(a \leqslant X \leqslant a+h\,,\, Y \leqslant b)$ og få $\int_{-\infty}^{y=b} \frac{f(a\,,\,y)}{f_X(a)}\,\mathrm{d}y$. Dette gir tetthetsfunksjonen til «*Y gitt at X er lik a*» som vi skriver som $Y_{|X=a}$ eller $Y|a$. Vi kan bruke dette som en definisjon.

Resultat 7.4. *Anta at vi har to simultant fordelte stokastiske variabler X og Y med simultan tetthetsfunksjon $f(x\,,\,y)$ med marginaler $f_X(x)$ og $f_Y(y)$. For alle tall a og b med $f_X(a) > 0$ og $f_Y(b) > 0$ får vi nye stokastiske variabler $X_{|Y=b}$ og $Y_{|X=a}$ med tetthetsfunksjoner*

$$f_{X|b} = \frac{f(x\,,\,b)}{f_Y(b)} \qquad \text{og} \qquad f_{Y|a} = \frac{f(a\,,\,y)}{f_X(a)}$$

[3] Dette er et argument for at definisjonen som kommer i Resultat 7.4 er riktig. Forsøk først å forstå hva denne denne utledningen viser. Det gjør du som alltid ved å se på hva som står først og sist. Les også på teksten rett før og rett etter utregningen. Senere kan du eventuelt se på selv utledningen.

Bevis. Vi må sjekke om $f_{X|b}$ og $f_{Y|a}$ faktisk gir tetthetsfunksjoner. Det er to betingelser (se Definisjon 3.5).

1) $f_{X|b} = \frac{f(x,b)}{f_Y(b)}$ er større eller lik 0 fordi teller er det og nevner er større enn 0. Tilsvarende er $f_{Y|a} \geqslant 0$.
2) Total sannsynlighet skal være 1:
$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|b}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x,b)}{f_Y(b)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{f_Y(b)}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{f_Y(b)} \cdot f_Y(b) = 1$ og tilsvarende er $\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|a}\,\mathrm{d}y = 1$

□

Da er det på tide med et eksempel.

Eksempel 7.5. I Eksempel 3.4 hadde vi

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{91}xy^2 & \text{for } 2 \leqslant x \leqslant 5 \text{ og } 1 \leqslant y \leqslant 3 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

og i Eksempel 5.3 regnet vi ut marginalene

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{21}x & \text{for } 2 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \qquad \text{og} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{26}y^2 & \text{for } 1 \leqslant y \leqslant 3 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

For et tall b med $1 \leqslant b \leqslant 3$ er $f_Y(b) > 0$ og derfor finnes $X_{|Y=b}$ med tetthetsfunksjon

$$f_{X|b}(x) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{91}xb^2}{\frac{3}{26}b^2} & \text{for } 2 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{21}x & \text{for } 2 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

For et tall a med $2 \leqslant a \leqslant 5$ er $f_X(a) > 0$ og derfor finnes $Y_{|X=a}$ med tetthetsfunksjon

$$f_{Y|a}(y) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{91}ay^2}{\frac{2}{21}a} & \text{for } 1 \leqslant y \leqslant 3 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{26}y^2 & \text{for } 1 \leqslant y \leqslant 3 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

7.4 Når variablene er uavhengige blir det enkelt

I Eksempel 7.5 ser vi at $f_{X|b}(x) = f_X(x)$ og $f_{Y|a}(y) = f_Y(y)$. Dette skyldes at X og Y er uavhengige stokastiske variabler. Da er $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ og dermed er

$$f_{X|b} = \frac{f(x,b)}{f_Y(b)} = \frac{f_X(x)\cdot f_Y(b)}{f_Y(b)} = f_X(x) \qquad \text{og} \qquad f_{Y|a} = \frac{f(a,y)}{f_X(a)} = \frac{f_X(a)\cdot f_Y(y)}{f_X(a)} = f_Y(y)$$

Hvis ikke de stokastiske variablene er uavhengige kommer typisk betingelsene $Y = b$ og $X = a$ med i uttrykkene.

Oppgave 7.6. Vi har to simultant fordelte stokastiske variabler X og Y med simultan tetthetsfunksjon

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{for } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ og } 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Anta a og b er tall mellom 0 og 1.

a) Bestem tetthetsfunksjonene til de betingete stokastiske variablene $X_{|Y=b}$ og $Y_{|X=a}$.
b) Beregn forventningen $\mathrm{E}(X_{|Y=b})$.
c) Bestem tallet $b \in [0,1]$ som gir maksimumsverdien til $\mathrm{E}(X_{|Y=b})$ og beregn denne verdien.
d) Beregn variansen $\mathrm{Var}(X_{|Y=b})$.
e) Bestem tallet $b \in [0,1]$ som gir minimumsverdien til $\mathrm{Var}(X_{|Y=b})$ og beregn denne verdien.

8 Kovariansmatrisen

8.1 To simultant fordelte stokastiske variabler

Anta først at vi har to simultant fordelte stokastiske variabler X og Y. Da er kovariansen av X med X selv lik variansen til den stokastiske variabelen X. Ved Resultat 5.8 har vi nemlig at

$$\operatorname{Cov}(X,X) = \operatorname{E}(X^2) - (\operatorname{E}(X))^2 = \operatorname{Var}(X)$$

Vi definerer *kovariansmatrisen* til X og Y på denne måten:

$$\begin{bmatrix} \operatorname{Cov}(X,X) & \operatorname{Cov}(X,Y) \\ \operatorname{Cov}(Y,X) & \operatorname{Cov}(Y,Y) \end{bmatrix} \qquad \text{som altså er lik} \qquad \begin{bmatrix} \operatorname{Var}(X,X) & \operatorname{Cov}(X,Y) \\ \operatorname{Cov}(Y,X) & \operatorname{Var}(Y) \end{bmatrix}$$

Legg merke til at kovariansmatrisen er en symmetrisk matrise fordi
$\operatorname{Cov}(Y,X) = \operatorname{E}[(Y-\operatorname{E}(Y))\cdot(X-\operatorname{E}(X))] = \operatorname{E}[(X-\operatorname{E}(X))\cdot(Y-\operatorname{E}(Y))] = \operatorname{Cov}(X,Y)$.

Eksempel 8.1. Kovariansmatrisen kan brukes til å finne variansen av nye stokastiske variabler som er på formen $Z = aX + bY$ for faste tall a og b. Vi regner (og bruker Resultat 5.8 og Oppgave 5.6):

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(Z) &= \operatorname{Var}(aX+bY) = \operatorname{E}\left[(aX+bY)^2\right] - \left(\operatorname{E}[aX+bY]\right)^2 \\
&= \operatorname{E}\left[a^2X^2 + 2abXY + b^2Y^2\right] - \left(a\operatorname{E}[X] + b\operatorname{E}[Y]\right)^2 \\
&= a^2\cdot\operatorname{E}\left[X^2\right] + 2ab\cdot\operatorname{E}[XY] + b^2\cdot\operatorname{E}\left[Y^2\right] - \left(a^2(\operatorname{E}[X])^2 + 2ab\cdot\operatorname{E}[X]\cdot\operatorname{E}[Y] + b^2(\operatorname{E}[Y])^2\right) \\
&= a^2\left(\operatorname{E}\left[X^2\right] - (\operatorname{E}[X])^2\right) + 2ab\left(\operatorname{E}[XY] - \operatorname{E}[X]\cdot\operatorname{E}[Y]\right) + b^2\left(\operatorname{E}\left[Y^2\right] - (\operatorname{E}[Y])^2\right) \\
&= a^2\cdot\operatorname{Var}(X) + 2ab\cdot\operatorname{Cov}(X,Y) + b^2\cdot\operatorname{Var}(Y) \\
&= \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \operatorname{Var}(X,X) & \operatorname{Cov}(X,Y) \\ \operatorname{Cov}(Y,X) & \operatorname{Var}(Y) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad \text{med matrisemultiplikasjon}
\end{aligned}$$

Variansen til Z er altså en kvadratisk form i variablene a og b med kovariansmatrisen til X og Y som den tilhørende symmetriske matrisen! Vi får umiddelbart et resultat: Hvis $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$ (f. eks. hvis X og Y er uavhengige) vil kovariansmatrisen være en diagonalmatrise og $\operatorname{Var}(Z) = a^2\cdot\operatorname{Var}(X) + b^2\cdot\operatorname{Var}(Y)$.

Eksempel 8.2. I Oppgave 5.10 har vi to simultant fordelte variabler X og Y med $\operatorname{Var}(X) = \frac{39}{64}$, $\operatorname{Var}(Y) = \frac{107}{1280}$ og $\operatorname{Cov}(X,Y) = -\frac{3}{128}$. Altså er kovariansmatrisen til X og Y

$$C = \begin{bmatrix} \frac{39}{64} & -\frac{3}{128} \\ -\frac{3}{128} & \frac{107}{1280} \end{bmatrix}$$

8.2 Flere simultant fordelte stokastiske variabler

Vi kan godt ha mange simultant fordelte stokastiske variabler. La oss kalle de stokastiske variablene for $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Tetthetsfunksjonen vil være en funksjon med like mange variabler $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Fra denne får vi tetthetsfunksjonene til hver av variablene ved å integrere bort de andre variablene. F. eks. er tetthetsfunksjonen til X_1 gitt som

$$f_{X_1} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\ldots\mathrm{d}x_n$$

Vi får forventningsverdier $\mu_i = \mathrm{E}(X_i)$ og varianser $\mathrm{Var}(X_i)$ for alle variablene og i tillegg kovarianser mellom alle par av variabler $c_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$. Vi får en kovariansmatrise[4]

$$C = (c_{ij}) = \begin{bmatrix} \mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \dots & \mathrm{Cov}(X_1, X_n) \\ \mathrm{Cov}(X_2, X_1) & \mathrm{Var}(X_2) & \dots & \mathrm{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_n, X_1) & \mathrm{Cov}(X_n, X_2) & \dots & \mathrm{Var}(X_n) \end{bmatrix}$$

Resultat 8.3. *Kovariansmatrisen er alltid positiv semi-definitt.*

Bevis. Anta $v_1, v_2, \dots v_n$ er konstante tall. Vi lager en ny stokastisk variabel $Z = v_1X_1 + v_2X_2 + \cdots + v_nX_n$ og regner ut variansen av denne ved hjelp kovariansene til X_i-ene på samme måte som vi gjorde for for $aX + bY$ i Eksempel 8.1. For å lette argumentet setter vi $Y = v_2X_2 + \cdots + v_nX_n$ slik at $Z = v_1X_1 + Y$. Da får vi:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Z) &= \mathrm{Var}(v_1X_1 + Y) = v_1^2 \cdot \mathrm{Var}(X_1) + 2v_1 \cdot \mathrm{Cov}(X_1, Y) + \mathrm{Var}(Y) \\ &\quad \text{som ved resultat 5.8} \\ &= v_1^2 \cdot \mathrm{Var}(X_1) + 2v_1 \cdot \big(\mathrm{E}[X_1 \cdot Y] - \mathrm{E}[X_1] \cdot \mathrm{E}[Y]\big) + \mathrm{Var}(Y) \\ &= v_1^2 \cdot \mathrm{Var}(X_1) \\ &\quad + 2v_1 \cdot \mathrm{E}[X_1 \cdot (v_2X_2 + \cdots + v_nX_n)] \\ &\quad - 2v_1 \cdot \mathrm{E}[X_1] \cdot \mathrm{E}[v_2X_2 + \cdots + v_nX_n] + \mathrm{Var}(Y) \\ &= v_1^2 \cdot \mathrm{Var}(X_1) \\ &\quad + 2v_1 \cdot \big(v_2\mathrm{E}[X_1 \cdot X_2] + \cdots + v_n\mathrm{E}[X_1 \cdot X_n]\big) \\ &\quad - 2v_1 \cdot \big(v_2\mathrm{E}[X_1] \cdot \mathrm{E}[X_2] + \cdots + v_n\mathrm{E}[X_1] \cdot \mathrm{E}[X_n]\big) + \mathrm{Var}(Y) \\ &= v_1^2 \cdot \mathrm{Var}(X_1) \\ &\quad + 2v_1 \cdot \Big(v_2\big(\mathrm{E}[X_1 \cdot X_2] - \mathrm{E}[X_1] \cdot \mathrm{E}[X_2]\big) + \cdots + v_n\big(\mathrm{E}[X_1 \cdot X_n] - \mathrm{E}[X_1] \cdot \mathrm{E}[X_n]\big)\Big) \\ &\quad + \mathrm{Var}(Y) \\ &= v_1^2 \cdot \mathrm{Var}(X_1) + 2v_1v_2 \cdot \mathrm{Cov}(X_1, X_2) + \cdots + 2v_1v_n \cdot \mathrm{Cov}(X_1, X_n) \\ &\quad + \mathrm{Var}(Y) \end{aligned}$$

Så fortsette vi på samme måten med $\mathrm{Var}(Y)$ ved å ta ut v_2X_2, osv. Legg merke til at $2v_iv_j \cdot \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = v_iv_j \cdot \mathrm{Cov}(X_i, X_j) + v_jv_i \cdot \mathrm{Cov}(X_j, X_i)$. Dette gir tilslutt

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Z) = v_1^2 \cdot \mathrm{Var}(X_1) &+ v_1v_2 \cdot \mathrm{Cov}(X_1, X_2) + v_1v_3 \cdot \mathrm{Cov}(X_1, X_3) + \dots v_1v_n \cdot \mathrm{Cov}(X_1, X_n) \\ +v_2v_1 \cdot \mathrm{Cov}(X_2, X_1) &+ v_2^2 \cdot \mathrm{Var}(X_1) + v_2v_3 \cdot \mathrm{Cov}(X_2, X_3) \cdots + v_2v_n \cdot \mathrm{Cov}(X_2, X_n) \\ &\vdots \\ +v_nv_1 \cdot \mathrm{Cov}(X_n, X_1) &+ v_nv_2 \cdot \mathrm{Cov}(X_n, X_2) + v_nv_3 \cdot \mathrm{Cov}(X_n, X_3) \cdots + v_n^2 \cdot \mathrm{Var}(X_n) \end{aligned}$$

Men denne store summen er verdien til den kvadratiske formen gitt av korrelasjonsmatrisen innsatt vektoren $\boldsymbol{v} = [v_1\ v_2\ \dots v_n]^T$, dvs

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Z) &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \dots & \mathrm{Cov}(X_1, X_n) \\ \mathrm{Cov}(X_2, X_1) & \mathrm{Var}(X_2) & \dots & \mathrm{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_n, X_1) & \mathrm{Cov}(X_n, X_2) & \dots & \mathrm{Var}(X_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{v}^T C\, \boldsymbol{v} \\ &\quad \text{med matrisemultiplikasjon} \end{aligned} \tag{8.3.1}$$

[4] I statistikk brukes ofte symbolet Σ «stor sigma» for C

Fra resultat 1.12 vet vi at $\mathrm{Var}(Z) \geqslant 0$ og dette gjelder uansett hvilke tall $v_1, v_2, \dots, v_n$ er. Det betyr at den kvadratiske formen er positiv semi-definitt og dermed er også matrisen til den kvadratiske formen det. □

Vi kan også lage en $(1 \times n)$-matrise av forventningsverdiene: $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1\ \mu_2\ \dots\ \mu_n]$. Da kan vi ved 1.10 skrive forventningsverdien til $Z = v_1X_1 + v_2X_2 + \cdots + v_nX_n$ som

$$\mathrm{E}(Z) = v_1\mathrm{E}(X_1) + v_2\mathrm{E}(X_2) + \dots v_n\mathrm{E}(X_n) = \boldsymbol{\mu}\,\boldsymbol{v} \qquad \text{med matrisemultiplikasjon} \tag{8.3.2}$$

8.3 En anvendelse i finans

Anta at vi skal investere en bestemt sum og har n verdipapirer $S_1, S_2, \dots, S_n$ å velge mellom. Anta den stokastiske variabelen X_i gir avkastningen til S_i.

Spørsmål 8.4. Hvordan fordeler vi investeringen på de ulike verdipapirene?

Et mulig svar: Vi betrakter den vektede summen $Z = v_1X_1 + v_2X_2 + \cdots + v_nX_n$ der vekten v_i angir andelen («prosenten») av investeringen som brukes på verdipapir S_i.[5] For konkrete tall $v_1, v_2, \dots, v_n$ er altså Z en stokastisk variabel som gir avkastningen til en bestemt måte å investere på i de n verdipapirene. Siden v_i-ene er andeler skal summen av dem være 1 (= 100%). Dette gir den første bibetingelsen:

$$v_1 + v_2 + \dots v_n = 1 \tag{8.4.1}$$

Da er forventet avkastning $\mathrm{E}(Z) = \boldsymbol{\mu}\,\boldsymbol{v}$ hvor $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1\ \mu_2\ \dots\ \mu_n]$ og $\mu_i = \mathrm{E}(X_i)$, se (8.3.2). En mulighet er naturligvis å gå for den høyeste forventede avkastningen. Det vil bety at hele investeringen går til det verdipapiret med størst forventet avkastning. Problemet er at en slik investering normalt også vil være veldig risikabel. En mer subtil tilnærming er å fiksére en bestemt forventet avkastning r (typisk lavere) og så forsøke å finne den investeringen som gir forventet avkastning r med minst mulig risiko. Løsningen på dette problemet er ikke opplagt! Fiksért forventet avkastning gir den andre bibetingelsen:

$$\mathrm{E}(Z) = \boldsymbol{\mu}\,\boldsymbol{v} = r \tag{8.4.2}$$

Risiko måler vi som variasjon og variasjonen til avkastningen Z er ved (8.3.1) gitt som

$$\mathrm{Var}(Z) = \boldsymbol{v}^T C\,\boldsymbol{v} \tag{8.4.3}$$

Vi vil altså minimere $\boldsymbol{v}^T C\,\boldsymbol{v}$ gitt de to bibetingelsene (8.4.1) og (8.4.2). Her er det vektene $v_1, v_2, \dots, v_n$ som er variablene. Lagrangefunksjonen er dermed gitt som

$$\mathscr{L}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \boldsymbol{v}^T C\,\boldsymbol{v} - \lambda_1[1\ 1\ 1\ \dots\ 1]\boldsymbol{v} - \lambda_2\boldsymbol{\mu}\,\boldsymbol{v} \tag{8.4.4}$$

og dette er en annengradsfunksjon (i variablene $v_1, v_2, \dots, v_n$) hvor $\boldsymbol{v}^T C\,\boldsymbol{v}$ er den kvadratiske formen og $-\lambda_1[1\ 1\ 1\ \dots\ 1]\boldsymbol{v} - \lambda_2\boldsymbol{\mu}\,\boldsymbol{v}$ er grad 1-leddet. Vi vil løse likningssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{v}} = 0 & (1) \\ v_1 + v_2 + \dots v_n = 1 & (2) \\ \boldsymbol{\mu}\,\boldsymbol{v} = r & (3) \end{cases}$$

Fra teorien for annengradsfunksjoner har vi

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{v}} = 2C\boldsymbol{v} - \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - \lambda_2 \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} \qquad (4)$$

[5] I forskningslitteratur brukes gjerne den greske bokstaven ω «omega» som navn på vektene, dvs ω_1, ω_2, osv.

Hvis vi antar at C er positiv definitt (ikke bare er positiv semi-definitt som kovariansmatrisen alltid er ved resultat 8.3), vil C være invertibel (alle egenverdiene er positive og $\det(C)$ er jo produktet av egenverdiene, så $\det(C) \neq 0$). Fra likning (1) og (4) får vi at

$$\boldsymbol{v} = C^{-1}\left(\frac{\lambda_1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix} + \frac{\lambda_2}{2}\begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\vdots\\\mu_n\end{bmatrix}\right) = \frac{\lambda_1}{2}C^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix} + \frac{\lambda_2}{2}C^{-1}\begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\vdots\\\mu_n\end{bmatrix}$$

Her får vi altså uttrykt vektene $v_1, v_2, \dots, v_n$ ved hjelp av forventningene μ_i (som er gitte tall!), kovariansene (også gitte tall!) og de to ubestemte Lagrangemultiplikatorene λ_1 og λ_2. Hvis vi så setter disse uttrykkene for $v_1, v_2, \dots, v_n$ inn i bibetingelsene (2) og (3) får vi to likninger med to ukjente λ_1 og λ_2. Vi løser så disse og bruker verdiene vi finner for λ_1 og λ_2 i uttrykkene for vektene som da blir konkrete tall.

Eksempel 8.5. Vi ser hvordan dette arter seg i et konkret eksempel. Anta $n = 3$, $\boldsymbol{\mu} = [4\ 2\ 3]$,

$$C = \begin{bmatrix}2&2&2\\2&3&1\\2&1&5\end{bmatrix} \qquad \text{og beregner} \qquad C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}7&-4&-2\\-4&3&1\\-2&1&1\end{bmatrix}$$

Da er

$$\boldsymbol{v} = \frac{\lambda_1}{2}\cdot C^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{\lambda_2}{2}\cdot C^{-1}\begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\mu_3\end{bmatrix} = \frac{\lambda_1}{2}\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix}7&-4&-2\\-4&3&1\\-2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{\lambda_2}{2}\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix}7&-4&-2\\-4&3&1\\-2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\2\\3\end{bmatrix}$$

$$= \frac{\lambda_1}{4}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \frac{\lambda_2}{4}\cdot\begin{bmatrix}14\\-7\\-3\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}\lambda_1 + 14\lambda_2\\-7\lambda_2\\-3\lambda_2\end{bmatrix}$$

Bibetingelsene er

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 1 & (2)\\ \begin{bmatrix}4&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix} = r & (3)\end{cases} \qquad \text{dvs} \qquad \begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 1 & (2)\\ 4v_1 + 2v_2 + 3v_3 = r & (3)\end{cases}$$

Setter så uttrykkene for vektene inn i bibetingelsene:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}[\lambda_1 + 14\lambda_2 - 7\lambda_2 - 3\lambda_2] = 1 & (2)\\ \frac{1}{4}[4(\lambda_1 + 14\lambda_2) + 2(-7\lambda_2) + 3(-3\lambda_2)] = r & (3)\end{cases}$$

dvs

$$\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 = 4\\ 4\lambda_1 + 33\lambda_2 = 4r\end{cases} \qquad \text{som har løsninger} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{17}(132 - 16r)\\ \lambda_2 = \frac{1}{17}(4r - 16)\end{cases}$$

Innsatt i uttrykkene for vektene får vi

$$\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}\lambda_1 + 14\lambda_2\\-7\lambda_2\\-3\lambda_2\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}\frac{1}{17}(132 - 16r) + 14(\frac{1}{17}(4r - 16))\\-7(\frac{1}{17}(4r - 16))\\-3(\frac{1}{17}(4r - 16))\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{17}\begin{bmatrix}10r - 23\\28 - 7r\\12 - 3r\end{bmatrix}$$

Dette er vektene som gir minimal risiko med forventet utbytte r. Da er variansen

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(Z) = \operatorname{Var}(v_1X_1 + v_2X_2 + v_3X_3) &= \begin{bmatrix} v_1 & v_1 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 10r-23 & 28-7r & 12-3r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 10r-23 \\ 28-7r \\ 12-3r \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{17^2}\begin{bmatrix} 34 & 50-4r & 42-2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10r-23 \\ 28-7r \\ 12-3r \end{bmatrix} = \frac{2}{17}\left[(r-4)^2 + 17\right]\end{aligned}$$

For at denne måten å besvare spørsmål 8.4 skal være effektiv må vi ha gode estimater for forventningene $\mu_i = \mathrm{E}(X_i)$ og kovariansene $\operatorname{Cov}(X_i, X_j)$. Dette er problemer som statistikken kan løse. Et annet viktig problem er hvor *robust* denne løsningen er for usikkerhet i estimatene for forventningene og kovariansene: Vil en liten endring i forventningsverdier og/eller kovarianser kunne gi store endringer i hva de optimale vektene skal være? – og i så fall, vil det ha mye å si for risikoen? – og hva slags betingelser trenger vi (eventuelt) for å unngå slike fenomener?

9 Flere oppgaver

Oppgave 9.1. Vi har to simultant fordelte stokastiske variabler X og Y som har kummulativ fordelingsfunksjon

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-0,5x} - e^{-0,8y} + e^{-0,5x-0,8y} & \text{hvis } x, y \geqslant 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

som vil si at $P(X \leqslant a\,, Y \leqslant b) = F(a,b)$.

a) Beregn sannsynlighetene
(i) $P(X \leqslant 0\,, Y \leqslant 4)$ (ii) $P(X \leqslant 2\,, 4 \leqslant Y \leqslant 5)$ (iii) $P(Y \leqslant 5)$

b) Beregn den simultane sannsynlighetstettheten $f(x,y)$ og de marginale sannsynlighetstetthetene $f_X(x)$ og $f_Y(y)$.

c) Beregn $E(X)$, $E(Y)$ og $E(XY)$.

d) Bestem kovariansmatrisen C.

e) Bestem den betingede sannsynlighetstettheten $f_{X|b}(x)$.

Oppgave 9.2. I oppgave 5.10 hadde vi to simultant fordelte stokastiske variabler X og Y med simultan tetthetsfunksjon

$$f(x\,,y) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}y^2 & \text{for } 0 \leqslant x \leqslant 3 \text{ og } 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Anta a og b er tall med $0 \leqslant a \leqslant 3$ og $0 \leqslant b \leqslant 1$.

a) Bestem tetthetsfunksjonen $f_{X|b}$ til den betingete stokastiske variabelen $X_{|Y=b}$.
b) Bestem tetthetsfunksjonen $f_{Y|a}$ til den betingete stokastiske variabelen $Y_{|X=a}$.
c) Beregn forventningene $\mathrm{E}(X_{|Y=b})$ og $\mathrm{E}(Y_{|X=a})$.
d) Bestem tallet $b \in [0\,,1]$ som gir maksimumsverdien til $\mathrm{E}(X_{|Y=b})$ og beregn denne verdien.
Bestem tallet $a \in [0\,,3]$ som gir maksimumsverdien til $\mathrm{E}(Y_{|X=a})$ og beregn denne verdien.
e) Beregn variansene $\operatorname{Var}(X_{|Y=b})$ og $\operatorname{Var}(Y_{|X=a})$.
f) Bestem tallet $b \in [0\,,1]$ som gir minimumsverdien til $\operatorname{Var}(X_{|Y=b})$ og beregn denne verdien.
Bestem tallet $a \in [0\,,3]$ som gir minimumsverdien til $\operatorname{Var}(Y_{|X=a})$ og beregn denne verdien.

10 Løsningsforslag til oppgavene

Oppgave (1.15).

a) For $a \geqslant 0$ har vi
$F(a) = \int_{-\infty}^{a} f_Y(t)\mathrm{d}t = \int_0^a 0.02e^{-0.02t}\mathrm{d}t = \left[-e^{-0.02t}\right]_0^a = -e^{-0.02a} - \left(-e^{0.02\cdot 0}\right) = 1 - e^{-0.02a}$. For $a < 0$ har vi $F(a) = 0$. Vi skifter variabel fra a til t og får

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-0.02t} & \text{for } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(t)\mathrm{d}t = \lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{t\to\infty}\left(1 - e^{-0.02t}\right) = 1 - \lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^{0.02t}} = 1 - 0 = 1$

c) Vi vil bestemme forventningen $\mathrm{E}(Y) = \int_0^{\infty} 0.02e^{-0.02t}\mathrm{d}t$ og beregner derfor det ubestemte integralet ved hjelp av delvis integrasjon. Vi setter $u(t) = t$ og $v(t) = -e^{-0.02t}$. Da er $u'(t) = 1$, $v'(t) = 0.02e^{-0.02t}$ og derfor er $u(t)\cdot v'(t) = 0.02te^{-0.02t}$ som er funksjonen vi vil integrere.

$$\int 0.02te^{-0.02t}\mathrm{d}t = -te^{-0.02t} - \int -e^{-0.02t}\mathrm{d}t = -te^{-0.02t} - 50e^{-0.02t} + C$$

Da får vi

$$\mathrm{E}(Y) = \int_0^{\infty} 0.02te^{-0.02t}\mathrm{d}t = \left[-te^{-0.02t} - 50e^{-0.02t}\right]_0^{\infty} = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{t}{e^{0.02t}} - \frac{50}{e^{0.02t}}\right) - \left(-\frac{0}{e^0} - \frac{50}{e^0}\right)$$

$$\text{ved l'Hôpitals regel er } \lim_{t\to\infty}\frac{-t}{e^{0.02t}} = \lim_{t\to\infty}\frac{-1}{0.02e^{0.02t}} = 0 \text{ så}$$

$$\mathrm{E}(Y) = 50$$

d) For å bestemme variansen $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}[Y^2] - \mathrm{E}[Y]^2$ regner vi først på $\mathrm{E}(Y^2) = \int_0^{\infty} 0.02t^2e^{-0.02t}\mathrm{d}t$. Igjen må vi bruke delvis integrasjon. Vi setter $u(t) = t^2$ og $v(t) = -e^{-0.02t}$. Da er $u'(t) = 2t$, $v'(t) = 0.02e^{-0.02t}$ og derfor er $u(t)\cdot v'(t) = 0.02t^2e^{-0.02t}$ som er funksjonen vi vil integrere.

$$\int 0.02t^2e^{-0.02t}\mathrm{d}t = -t^2e^{-0.02t} - \int -2te^{-0.02t}\mathrm{d}t = -t^2e^{-0.02t} + 2\int te^{-0.02t}\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned} &\text{og dette integralet regnet vi på for } \mathrm{E}(Y) \\ &= -t^2e^{-0.02t} + 2\cdot 50\cdot\left(-te^{-0.02t} - 50e^{-0.02t}\right) \\ &= -t^2e^{-0.02t} - 100te^{-0.02t} - 5000e^{-0.02t} \end{aligned}$$

Da får vi

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y^2) &= \int_0^{\infty} 0.02t^2e^{-0.02t} = \left[-t^2e^{-0.02t} - 100te^{-0.02t} - 5000e^{-0.02t}\right]_0^{\infty} \\ &= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{t^2}{e^{0.02t}} - \frac{100t}{e^{0.02t}} - \frac{5000}{e^{0.02t}}\right) - \left(-\frac{0^2}{e^{0.02\cdot 0}} - \frac{100\cdot 0}{e^{0.02\cdot 0}} - \frac{5000}{e^{0.02\cdot 0}}\right) \\ &\text{ved l'Hôpitals regel er } \lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{e^{0.02t}} = \lim_{t\to\infty}\frac{2t}{0.02\cdot e^{0.02t}} = \lim_{t\to\infty}\frac{2}{0.02^2\cdot e^{0.02t}} = 0 \text{ så} \\ \mathrm{E}(Y^2) &= 5000 \end{aligned}$$

og dermed er $\mathrm{Var}(Y) = 5000 - 50^2 = 2500$.

Oppgave (1.19).

a) $P(-\infty < X < \infty) = \int_1^{\infty}\frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{x^2}\right]_1^{\infty} = \lim_{t\to\infty}\frac{-1}{t^2} - \frac{-1}{1^2} = 0 + 1 = 1$

b) $\mathrm{E}(X) = \int_1^{\infty} x\cdot\frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty}\frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-2}{x}\right]_1^{\infty} = 2.$

c) $\mathrm{E}(X^2) = \int_1^\infty x^2 \cdot \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = [2\ln|x|]_1^\infty = \lim_{t\to\infty} 2\ln t - 2\ln(1)$ som ikke finnes og da finnes heller ikke variansen $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - 2^2$ eller standardavviket til X.

Oppgave (1.22).

a)

$$\text{(i)} \quad P(4 \leqslant X \leqslant 7) = \int_4^7 \frac{1}{10}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{10}x\right]_4^7 = \frac{1}{10}\cdot 7 - \frac{1}{10}\cdot 4 = \frac{3}{10} = 30\%$$

$$\text{(ii)} \quad P(X \geqslant 5) = \int_5^\infty f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_5^{12} \frac{1}{10}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\cdot 12 - \frac{1}{10}\cdot 5 = \frac{7}{10} = 70\%$$

$$\text{(iii)} \quad P(X = 9) = \int_9^9 f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_9^9 \frac{1}{10}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\cdot 9 - \frac{1}{10}\cdot 9 = 0$$

b)

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^\infty x\cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^{12} \frac{x}{10}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{20}\right]_2^{12} = \frac{12^2}{20} - \frac{2^2}{20} = 7$$

som er midten av intervallet $[2, 12]$.

c) Vi regner først

$$P(X \leqslant a) = \int_{-\infty}^a f_X(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{hvis } a < 2 \\ \int_2^a \frac{1}{10}\,\mathrm{d}x & \text{hvis } 2 \leqslant a \leqslant 12 \\ 1 & \text{hvis } a > 12 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{hvis } a < 2 \\ \frac{a-2}{10} & \text{hvis } 2 \leqslant a \leqslant 12 \\ 1 & \text{hvis } a > 12 \end{cases}$$

Dette er den kummulative fordelingsfunksjonen $F_X(a)$.

For medianen løser vi likningen $F_X(a) = 50\%$, dvs $\frac{a-2}{10} = 0{,}5$ som gir $a = 7$ som er det samme som forventningen.

For første kvartil løser vi likningen $F_X(a) = 25\%$, dvs $\frac{a-2}{10} = 0{,}25$ som gir $a = 4{,}5$ som er første fjerdel av intervallet $[2, 12]$.

For 5-te prosentil løser vi likningen $F_X(a) = 5\%$, dvs $\frac{a-2}{10} = 0{,}05$ som gir $a = 2{,}5$ som er første 5% av intervallet $[2, 12]$.

d) Vi beregner først

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^\infty x^2\cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^{12} \frac{x^2}{10}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{30}\right]_2^{12} = \frac{12^3 - 2^3}{30} = \frac{1720}{30}$$

Fra Resultat 1.12 har vi

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 = \frac{1720}{30} - 7^2 = \frac{25}{3} \approx 8{,}33$$

Da er standardavviket $\sigma(X) = \sqrt{\frac{25}{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \approx 2{,}89$.

e) Fra Resultat 1.9 får vi at

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^\infty e^x\cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^{12} \frac{e^x}{10}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^x}{10}\right]_2^{12} = \frac{e^{12} - e^2}{10} \approx 16\,274{,}74$$

f) Vi har at $Y^2 = e^X \cdot e^X = e^{2X}$. Fra Resultat 1.9 får vi at

$$\mathrm{E}(Y^2) = \int_{-\infty}^\infty e^{2x}\cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^{12} \frac{e^{2x}}{10}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{2x}}{20}\right]_2^{12} = \frac{e^{24} - e^4}{20} \approx 1\,324\,456\,103{,}76$$

Dermed er $\mathrm{Var}(Y) = \frac{e^{24}-e^4}{20} - \left(\frac{e^{12}-e^2}{10}\right)^2 \approx 1\,059\,588\,934{,}00$ og standardavviket $\sigma(Y) = \sqrt{\mathrm{Var}(Y)} \approx 32\,551{,}33$.

Oppgave (1.23).

a) i) $P(X \leqslant \sqrt{e}) = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(\sqrt{e}) - \ln(1) = 50\%$

ii) $P(X \geqslant 2) = \int_2^{e} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(e) - \ln(2) = 1 - \ln(2) \approx 30{,}7\%$

iii) $P(\sqrt{e} \leqslant X \leqslant 2) = \int_{\sqrt{e}}^{2} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(2) - \ln(\sqrt{e}) = \ln(2) - 0{,}5 \approx 19{,}3\%$

b)
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 1 \\ \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t & \text{for } 1 \leqslant x \leqslant e \\ 0 & \text{for } x > e \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 1 \\ \ln(x) & \text{for } 1 \leqslant x \leqslant e \\ 1 & \text{for } x > e \end{cases}$$

c) $\mathrm{E}(X) = \int_1^e 1\,\mathrm{d}x = e - 1$.

d) Vi har at $F(a) = \ln(a)$ for $1 \leqslant a \leqslant e$.
Medianen er derfor løsningen på likningen $\ln(a) = 0{,}5$, dvs $a = e^{0{,}5} \approx 1{,}65$.
Tredje kvartil er løsningen på likningen $\ln(a) = 0{,}75$, dvs $a = e^{0{,}75} \approx 2{,}12$.
5-te prosentil er løsningen på likningen $\ln(a) = 0{,}05$, dvs $a = e^{0{,}05} \approx 1{,}05$.

e) Vi regner først $\mathrm{E}(X^2) = \int_1^e x\,\mathrm{d}x = \left[0{,}5x^2\right]_1^e = \frac{e^2-1}{2}$. Da er variansen $\mathrm{Var}(X) = \frac{e^2-1}{2} - (e-1)^2 = \frac{1}{2}(e-1)(3-e) \approx 0{,}24$. Det gir standardavviket $\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{2}(e-1)(3-e)} \approx 0{,}49$.

Oppgave (1.24).

a) Vi deriverer den kummulative fordelingsfunksjonen ved (bl.a.) å bruke produktregelen

$$F_X'(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leqslant 0 \\ 1 - \left[1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right] & \text{for } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{for } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leqslant 0 \\ -\ln(x) & \text{for } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{for } x > 1 \end{cases}$$
$$= f_X(x)$$

b) $\mathrm{E}(X) = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 x \cdot (-\ln(x))\,\mathrm{d}x$. Her må vi ta grensen $t \to 0^+$, altså t nærmer seg 0 ovenfra, fordi $\ln(0)$ ikke er definert. Vi bruker delvis integrasjon $\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$ med $u(x) = -0{,}5x^2$, $u'(x) = -x$ og $v(x) = \ln(x)$, $v'(x) = x^{-1}$. Fordi $\int u \cdot v' = \int -0{,}5x^2 \cdot x^{-1}\,\mathrm{d}x = -0{,}25x^2 + C$ får vi

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 -x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^+} \left[-0{,}5x^2 \cdot \ln(t) + 0{,}25x^2\right]_t^1 \\ &= 0{,}25 - \lim_{t\to 0^+} \left(-0{,}5t^2 \cdot \ln(t) + 0{,}25t^2\right) = 0{,}25 + \lim_{t\to 0^+} 0{,}5t^2 \cdot \ln(t) - \lim_{t\to 0^+} 0{,}25t^2\end{aligned}$$

Her er $\lim_{t\to 0^+} 0{,}25t^2 = 0$ mens $\lim_{t\to 0^+} 0{,}5t^2 \cdot \ln(t)$ er et «$0 \cdot (-\infty)$»-uttrykk som vi skriver om til et «$\frac{-\infty}{\infty}$»-uttrykk som vi kan bruke l'Hôpitals regel på:

$$\lim_{t\to 0^+} 0{,}5t^2 \cdot \ln(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{0{,}5 \cdot \ln(t)}{t^{-2}} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{0{,}5 \cdot t^{-1}}{-2 \cdot t^{-3}} = \lim_{t\to 0^+} -0{,}25 \cdot t^2 = 0$$

Altså er $\mathrm{E}(X) = 0{,}25$.

c) $\mathrm{E}(X^2) = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 x^2 \cdot (-\ln(x))\,\mathrm{d}x$. Vi bruker igjen delvis integrasjon $\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$ med $u(x) = -\frac{1}{3}x^3$, $u'(x) = -x^2$ og $v(x) = \ln(x)$, $v'(x) = x^{-1}$. Fordi $\int u \cdot v' = \int -\frac{1}{3}x^3 \cdot x^{-1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{9}x^3 + C$ får vi

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2) &= \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 -x^2 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^+} \left[-\frac{1}{3}x^3 \cdot \ln(x) + \frac{1}{9}x^3\right]_t^1 \\ &= \frac{1}{9} - \lim_{t\to 0^+} \left(-\frac{1}{3}t^3 \cdot \ln(t) + \frac{1}{9}t^3\right) = \frac{1}{9} + \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{3}t^3 \cdot \ln(t) - \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{9}t^3\end{aligned}$$

Her er $\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{9}t^3 = 0$ mens $\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{3}t^3 \cdot \ln(t)$ er et «$0\cdot(-\infty)$»-uttrykk som vi skriver om til et «$\frac{-\infty}{\infty}$»-uttrykk som vi kan bruke l'Hôpitals regel på:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{3}t^3 \cdot \ln(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{1}{3}\cdot \ln(t)}{t^{-3}} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{1}{3}\cdot t^{-1}}{-3\cdot t^{-4}} = \lim_{t\to 0^+} -\frac{1}{9}\cdot t^3 = 0$$

Altså er $\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{9}$. Dermed er variansen $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{9} - 0{,}25^2 = \frac{7}{144}$ og standardavviket $\sigma(X) = \frac{\sqrt{7}}{12} \approx 0{,}22$.

Oppgave (2.3).

a) Vi har det ubestemte integralet $\int 4xy + 3y + 1\,\mathrm{d}y = 2xy^2 + \frac{3}{2}y^2 + y + C$. Da er det bestemte integralet

$$\int_{y=1}^{y=6} 4xy + 3y + 1\,\mathrm{d}y = \left[2xy^2 + \frac{3}{2}y^2 + y\right]_{y=1}^{y=6} = 2x\cdot 6^2 + \frac{3}{2}\cdot 6^2 + 6 - \left[2x\cdot 1^2 + \frac{3}{2}\cdot 1^2 + 1\right]$$
$$= 70x + 57{,}5$$

b) Da er

$$\int_{x=2}^{x=5}\int_{y=1}^{y=6} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{x=2}^{x=5} 70x + 57{,}5\,\mathrm{d}x = \left[35x^2 + 57{,}5x\right]_{x=2}^{x=5}$$
$$= 35\cdot 5^2 + 57{,}5\cdot 5 - \left[35\cdot 2^2 + 57{,}5\cdot 2\right]$$
$$= 35\cdot 21 + 57{,}5\cdot 3 = 907{,}5$$

c) Vi regner $f(3,y) = 4\cdot 3\cdot y + 3y + 1 = 15y + 1$ som gir

$$\int_{y=1}^{y=6} f(3,y)\,\mathrm{d}y = \int_{y=1}^{y=6} 15y + 1\,\mathrm{d}y = \left[\frac{15}{2}y^2 + y\right]_{y=1}^{y=6} =$$
$$= \left[\frac{15}{2}\cdot 6^2 + 6\right] - \left[\frac{15}{2}\cdot 1^2 + 1\right] = \frac{15\cdot 35}{2} + 4 = 267{,}5$$

som gir det samme svar som $x = 3$ innsatt i (a): $70\cdot 3 + 57{,}5 = 267{,}5$.

Oppgave (3.6).

a) Vi bruker Definisjon 3.5. Hvis $c \geqslant 0$ er (1) tilfredsstilt. For (2) regner vi den totale sannsynligheten:

$$\int_{y=-\infty}^{y=\infty}\int_{x=-\infty}^{x=\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{y=b}\int_{x=0}^{x=a} c\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{y=b}\left[cx\right]_{x=0}^{x=a}\mathrm{d}y$$
$$= \int_{y=0}^{y=b} ac\,\mathrm{d}y = \left[acy\right]_{y=0}^{y=b} = abc$$

som skal være 1. Altså er $c = \frac{1}{ab}$.

b) Da får vi

$$\text{(i)}\quad P\left(X \leqslant \frac{a}{2}, Y \leqslant \frac{b}{3}\right) = \int_{y=-\infty}^{y=\frac{b}{3}}\int_{x=-\infty}^{x=\frac{a}{2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{y=\frac{b}{3}}\int_{x=0}^{x=\frac{a}{2}} \frac{1}{ab}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{ab}\int_{y=0}^{y=\frac{b}{3}}\left[x\right]_{x=0}^{x=\frac{a}{2}}\mathrm{d}y = \frac{1}{2b}\int_{y=0}^{y=\frac{b}{3}} 1\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2b}\left[y\right]_0^{\frac{b}{3}} = \frac{1}{6}$$

$$\text{(ii)}\quad P\left(\frac{a}{3} \leqslant X \leqslant \frac{2a}{3}\right) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty}\int_{x=\frac{a}{3}}^{x=\frac{2a}{3}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{y=b}\int_{x=\frac{a}{3}}^{x=\frac{2a}{3}} \frac{1}{ab}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{ab}\int_{y=0}^{y=b}\left[x\right]_{x=\frac{a}{3}}^{x=\frac{2a}{3}}\mathrm{d}y = \frac{1}{3b}\int_{y=0}^{y=b} 1\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3b}\left[y\right]_0^b = \frac{1}{3}$$

Oppgave (3.7).

a) Vi bruker Definisjon 3.5. Hvis $c \geqslant 0$ er (1) tilfredsstilt. For (2) regner vi den totale sannsynligheten:

$$\begin{aligned}\int_{y=-\infty}^{y=\infty}\int_{x=-\infty}^{x=\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{y=0}^{y=\infty}\int_{x=0}^{x=\infty} ce^{-0{,}2x-0{,}5y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= -\frac{c}{0{,}2}\int_{y=0}^{y=\infty}\Big[e^{-0{,}2x-0{,}5y}\Big]_{x=0}^{x=\infty}\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

fordi $\lim_{t\to\infty} e^{-0{,}2t-0{,}5y} = 0$ (eksponenten avtar mot $-\infty$), får vi

$$= \frac{c}{0{,}2}\int_{y=0}^{y=\infty} e^{-0{,}5y}\,\mathrm{d}y = -\frac{c}{0{,}1}\Big[e^{-0{,}5y}\Big]_{y=0}^{y=\infty} = \frac{c}{0{,}1}$$

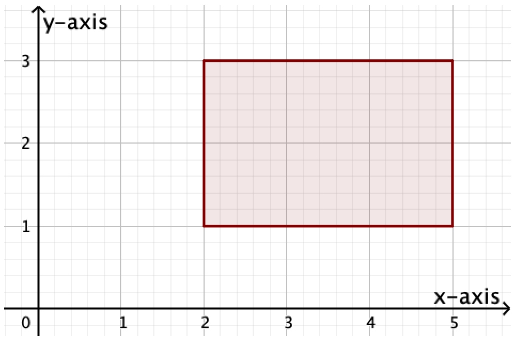
som skal være 1. Altså er $c = 0{,}1$.

b) Da får vi

(i) $$\begin{aligned}P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1) &= \int_{y=-\infty}^{y=1}\int_{x=-\infty}^{x=1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{y=1}\int_{x=0}^{x=1} 0{,}1e^{-0{,}2x-0{,}5y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= -\frac{0{,}1}{0{,}2}\int_{y=0}^{y=1}\Big[e^{-0{,}2x-0{,}5y}\Big]_{x=0}^{x=1}\mathrm{d}y = -0{,}5\int_{y=0}^{y=1}\Big[e^{-0{,}2-0{,}5y} - e^{-0{,}5y}\Big]\mathrm{d}y\\ &= \Big[e^{-0{,}2-0{,}5y} - e^{-0{,}5y}\Big]_0^1 = e^{-0{,}2-0{,}5} - e^{-0{,}5} - \Big[e^{-0{,}2} - e^{0}\Big]\\ &= 1 - e^{-0{,}2} - e^{-0{,}5} + e^{-0{,}7} \approx 7{,}13\%\end{aligned}$$

(ii) $$\begin{aligned}P(1 \leqslant Y \leqslant 2) &= \int_{y=1}^{y=2}\int_{x=-\infty}^{x=\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{y=1}^{y=2}\int_{x=0}^{x=\infty} 0{,}1e^{-0{,}2x-0{,}5y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= -\frac{0{,}1}{0{,}2}\int_{y=1}^{y=2}\Big[e^{-0{,}2x-0{,}5y}\Big]_{x=0}^{x=\infty}\,\mathrm{d}y = 0{,}5\int_{y=1}^{y=2} e^{-0{,}5y}\,\mathrm{d}y\\ &= 0{,}5\Big[-2e^{-0{,}5y}\Big]_1^2 = -1\left(e^{-1} - e^{-0{,}5}\right)\\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e}\right) \approx 23{,}87\%\end{aligned}$$

Oppgave (3.9). Her er rektangelet hvor $f(x,y)$ er større enn 0



Figur 4: Rektangel

Oppgave (3.10).

a) Vi har $P(X \leqslant 3, Y \leqslant 2) = F(3,2)$, $P(X \leqslant 2, Y \leqslant 2) = F(2,2)$, $P(X \leqslant 3, Y \leqslant 1) = F(3,1)$ og $P(X \leqslant 2, Y \leqslant 1) = F(2,2)$. Da får vi

$$\begin{aligned}P(2 \leqslant X \leqslant 3, 1 \leqslant Y \leqslant 2) &= F(3,2) - F(2,2) - F(3,1) + F(2,1) = F(3,2)\\ &= \frac{1}{546}(3^2-4)(2^3-1) = \frac{35}{546} = 6{,}41\%\end{aligned}$$

c) $P(2 \leqslant X \leqslant 3) = \lim_{t\to\infty} [F(3\,,\,t) - F(2\,,\,t)] = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{21}(3^2-4) - \frac{1}{21}(2^2-4)\right] = \frac{5}{21} \approx$ 23,81%
Dessuten

$$\begin{aligned}
P(3 \leqslant X \leqslant 4\,,\,2 \leqslant Y \leqslant 4) &= F(4\,,\,3) - F(3\,,\,3) - F(4\,,\,2) + F(3\,,\,2)\\
&= \frac{1}{546}(4^2-4)(3^3-1) - \frac{1}{546}(3^2-4)(3^3-1)\\
&- \frac{1}{546}(4^2-4)(2^3-1) + \frac{1}{546}(3^2-4)(2^3-1)\\
&= \frac{1}{546}(12\cdot 26 - 5\cdot 26 - 12\cdot 7 + 5\cdot 7) = \frac{19}{78} = 24{,}36\%
\end{aligned}$$

Oppgave (3.11).

a) (i) $P(X \leqslant 1\,,\,Y \leqslant 2) = F(1\,,\,2) = \left(1-e^{-0,2}\right)\left(1-e^{-0,6}\right) \approx 8{,}18\%$

(ii)

$$\begin{aligned}
P(1 \leqslant X \leqslant 3\,,\,1 \leqslant Y \leqslant 2) &= F(3\,,\,2) - F(1\,,\,2) - F(3\,,\,1) + F(1\,,\,1)\\
&= \left(1-e^{-0,6}\right)\left(1-e^{-0,6}\right) - \left(1-e^{-0,2}\right)\left(1-e^{-0,6}\right)\\
&- \left(1-e^{-0,6}\right)\left(1-e^{-0,3}\right) + \left(1-e^{-0,2}\right)\left(1-e^{-0,3}\right)\\
&= 1 - 2e^{-0,6} + e^{-1,2} - \left(1 - e^{-0,6} - e^{-0,2} + e^{-0,8}\right)\\
&- \left(1 - e^{-0,3} - e^{-0,6} + e^{-0,9}\right) + \left(1 - e^{-0,3} - e^{-0,2} + e^{-0,5}\right)\\
&= e^{-0,5} - e^{-0,8} - e^{-0,9} + e^{-1,2} \approx 5{,}18\%
\end{aligned}$$

(iii) $P(Y \leqslant 2) = \lim_{t\to\infty} F(t\,,\,2) = \lim_{t\to\infty} \left(1-e^{-0,2t}\right)\left(1-e^{-0,6}\right) = \left(1-e^{-0,6}\right) \approx 45{,}12\%$

b) Vi deriverer $F(x\,,\,y)$, først med hensyn på x:

$$F(x\,,\,y)'_x = \begin{cases} 0{,}2e^{-0,2x}\cdot\left(1-e^{-0,3y}\right) & \text{for } x \geqslant 0 \text{ og } y \geqslant 0\\ 0 & \text{ellers}\end{cases}$$

Så deriverer vi dette igjen med hensyn på y og får

$$\begin{aligned}
f(x\,,\,y) = F(x\,,\,y)''_{xy} &= \begin{cases} 0{,}2e^{-0,2x}\cdot 0{,}3e^{-0,3y} & \text{for } x \geqslant 0 \text{ og } y \geqslant 0\\ 0 & \text{ellers}\end{cases}\\
&= \begin{cases} 0{,}06e^{-0,2x-0,3y} & \text{for } x \geqslant 0 \text{ og } y \geqslant 0\\ 0 & \text{ellers}\end{cases}
\end{aligned}$$

Oppgave (5.5).

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} y\cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} y\cdot\left(\int_{x=-\infty}^{x=\infty} f(x\,,\,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

Fordi y er som en konstant når vi integrerer med hensyn på x, er dette

$$= \int_{y=-\infty}^{y=\infty}\int_{x=-\infty}^{x=\infty} y\cdot f(x\,,\,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

som var det vi ville vise.

Oppgave (5.6). Vi setter $h(x) = ax + by + c$. Ved Resultat 5.1 er

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(aX + bY + c) &= \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} (ax + by + c) \cdot f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\
&= \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} ax \cdot f(x, y) + by \cdot f(x, y) + c \cdot f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\
&= a \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} x \cdot f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + b \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} y \cdot f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\
&+ c \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\
&\text{som ved Resultat 5.4} \\
&= a \cdot \mathrm{E}(X) + b \cdot \mathrm{E}(Y) + c
\end{aligned}
$$

Oppgave (5.10).

a) $f_X(x) = \int_0^1 \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}y^2\, \mathrm{d}y = \left[\frac{1}{6}xy + \frac{1}{12}y^3\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{6}x + \frac{1}{12}$ og
$f_Y(y) = \int_0^3 \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}y^2\, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{4}xy^2\right]_{x=0}^{x=3} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}y^2$.

b) $\mathrm{E}(X) = \int_0^3 \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{12}x\, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{24}x^2\right]_{x=0}^{x=3} = \frac{27}{18} + \frac{9}{24} = \frac{3}{2} + \frac{3}{8} = \frac{15}{8}$,
$\mathrm{E}(Y) = \int_0^1 \frac{3}{4}y + \frac{3}{4}y^3\, \mathrm{d}y = \left[\frac{3}{8}y^2 + \frac{3}{16}y^4\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{3}{8} + \frac{3}{16} = \frac{9}{16}$ og

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &= \int_0^1 \int_0^3 \frac{1}{6}x^2y + \frac{1}{4}xy^3\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\frac{1}{18}x^3y + \frac{1}{8}x^2y^3\right]_{x=0}^{x=3} \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{27}{18}y + \frac{9}{8}y^3\, \mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{27}{36}y^2 + \frac{9}{32}y^4\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{27}{36} + \frac{9}{32} = \frac{3}{4} + \frac{9}{32} = \frac{33}{32}
\end{aligned}
$$

c) $\mathrm{E}(X^2) = \int_0^3 \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^2\, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{36}x^3\right]_{x=0}^{x=3} = \frac{81}{24} + \frac{27}{36} - 0 = \frac{27}{8} + \frac{3}{4} = \frac{33}{8}$ som gir
$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \left(\mathrm{E}(X)\right)^2 = \frac{33}{8} - \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{39}{64}$.
$\mathrm{E}(Y^2) = \int_0^1 \frac{3}{4}y^2 + \frac{3}{4}y^4\, \mathrm{d}y = \left[\frac{3}{12}y^3 + \frac{3}{20}y^5\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{3}{12} + \frac{3}{20} - 0 = \frac{5}{20} + \frac{3}{20} = \frac{2}{5}$ som gir
$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \left(\mathrm{E}(Y)\right)^2 = \frac{2}{5} - \left(\frac{9}{16}\right)^2 = \frac{2 \cdot 2^8 - 9^2 \cdot 5}{5 \cdot 2^8} = \frac{107}{1280}$

d) $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y) = \frac{33}{32} - \frac{15}{8} \cdot \frac{9}{16} = -\frac{3}{128}$.

Oppgave (7.6).

a) Vi har $f_{X|b} = \frac{f(x,b)}{f_Y(b)}$ og må derfor først finne tetthetsfunksjonen til Y. Vi har

$$
f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 x + y\, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 + xy\right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1 \cdot y - 0 = \frac{1}{2} + y
$$

Da får vi

$$
f_{X|b} = \frac{f(x, b)}{f_Y(b)} = \frac{x + b}{\frac{1}{2} + b}
$$

Fordi den simultane tetthetsfunksjonen er symmetrisk i x og y følger det at

$$
f_{Y|a} = \frac{f(a, y)}{f_X(a)} = \frac{y + a}{\frac{1}{2} + a}
$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_{|Y=b}) &= \int_0^1 x \cdot \frac{x+b}{\frac{1}{2}+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\frac{1}{2}+b}\int_0^1 x^2 + bx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\frac{1}{2}+b}\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}bx^2\right]_0^1 = \frac{1}{\frac{1}{2}+b}\left[\frac{1}{3}\cdot 1^3 + \frac{1}{2}b\cdot 1^2 - 0\right] \\
&= \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}+b} = \frac{2+3b}{3+6b} \quad \text{for } b \in [0\,,1]
\end{aligned}$$

c) Fordi $\mathrm{E}(X_{|Y=b}) = \frac{2+3b}{3+6b}$ er kontinuerlig for $b \in [0\,,1]$, finnes maksimum og minimum for funksjonen, enten i endepunktene eller i de stasjonære punktene. Vi har

$$\left(\frac{2+3b}{3+6b}\right)' = -\frac{3}{(3+6b)^2}$$

som er negativ for $b > 0$. Altså er $\mathrm{E}(X_{|Y=b})$ strengt avtagende i intervallet $[0\,,1]$, maksimumspunktet er $b = 0$ og maksimumsverdien er $\mathrm{E}(X_{|Y=0}) = \frac{2}{3}$.

d) Vi regner først

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\big((X_{|Y=b})^2\big) &= \int_0^1 x^2 \cdot \frac{x+b}{\frac{1}{2}+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\frac{1}{2}+b}\int_0^1 x^3 + bx^2\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\frac{1}{2}+b}\left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}bx^3\right]_0^1 = \frac{1}{\frac{1}{2}+b}\left[\frac{1}{4}\cdot 1^4 + \frac{1}{3}b\cdot 1^3 - 0\right] \\
&= \frac{\frac{1}{4}+\frac{b}{3}}{\frac{1}{2}+b} = \frac{3+4b}{6+12b} \quad \text{for } b \in [0\,,1]
\end{aligned}$$

Altså er

$$\mathrm{Var}(X_{|Y=b}) = \frac{3+4b}{6+12b} - \left(\frac{2+3b}{3+6b}\right)^2 = \frac{1+6b+6b^2}{18(1+2b)^2}$$

e) Når vi deriverer $\mathrm{Var}(X_{|Y=b})$ får vi (etter endel regning)

$$\left(\frac{1+6b+6b^2}{18(1+2b)^2}\right)' = \frac{1}{9(1+2b)^3}$$

som er positiv for $b > 0$. Altså er $\mathrm{Var}(X_{|Y=b})$ voksende i intervallet $[0\,,1]$, $b = 0$ er miniumumspunktet og minimumsverdien er $\mathrm{Var}(X_{|Y=0}) = \frac{1+6\cdot 0+6\cdot 0^2}{18(1+2\cdot 0)^2} = \frac{1}{18}$.

Oppgave (9.1).

(a) (i) $P(X \leqslant 0\,, Y \leqslant 4) = F(0,4) = 1 - e^0 - e^{-4\cdot 0{,}8} + e^{-4\cdot 0{,}8} = 0$

(ii)

$$\begin{aligned}
P(X \leqslant 2\,, 4 \leqslant Y \leqslant 5) &= F(2,5) - F(2,4) \\
&= 1 - e^{-2\cdot 0{,}5} - e^{-5\cdot 0{,}8} + e^{-2\cdot 0{,}5 - 5\cdot 0{,}8} - (1 - e^{-2\cdot 0{,}5} - e^{-4\cdot 0{,}8} + e^{-2\cdot 0{,}5 - 4\cdot 0{,}8}) \\
&= e^{-3{,}2} - e^{-4} - e^{-1}(e^{-3{,}2} - e^{-4}) \\
&= (1 - e^{-1})(e^{-3{,}2} - e^{-4})
\end{aligned}$$

(iii)

$$P(Y \leqslant 5) = \lim_{x\to\infty} F(x,5) = \lim_{x\to\infty}(1 - e^{-0{,}5x} - e^{-5\cdot 0{,}8} + e^{-0{,}5x - 5\cdot 0{,}8}) = 1 - e^{-5\cdot 0{,}8} = 1 - e^{-4}$$

(b)

$$f(x,y) = F''_{xy} = (F'_x)'_y = \begin{cases} (0{,}5e^{-0{,}5x} - 0{,}5e^{-0{,}5x-0{,}8y})'_y & \text{hvis } x,y \geqslant 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0{,}4e^{-0{,}5x-0{,}8y} & \text{hvis } x,y \geqslant 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} (F'_x)'_y\,\mathrm{d}y = \big[F'_x(x,y)\big]_{y\to-\infty}^{y\to\infty}$$
$$= \begin{cases} \big[0{,}5e^{-0{,}5x} - 0{,}5e^{-0{,}5x-0{,}8y}\big]_{y=0}^{y\to\infty} & \text{hvis } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0{,}5e^{-0{,}5x} - (0{,}5e^{-0{,}5x} - 0{,}5e^{-0{,}5x}) & \text{hvis } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0{,}5e^{-0{,}5x} & \text{hvis } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Vi kan selvfølgelig også regne direkte på uttrykket:

$$\int_{-\infty}^{\infty} 0{,}5 \cdot 0{,}8e^{-0{,}5x-dy}\,\mathrm{d}y = \big[-0{,}5e^{-0{,}5x-0{,}8y}\big]_{y=0}^{y\to\infty}$$

Ved å regne på samme måte (eller ved ved å bruke symmetrien i uttrykket for $F(x,y)$), får vi

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0{,}8e^{-0{,}8y} & \text{hvis } y \geqslant 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

(c) Ved delvis integrasjon $\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$ med $u(x) = x$ og $v(x) = -e^{-0{,}5x}$ og $u'(x) = 1$ og $v'(x) = 0.5e^{-0{,}5x}$ får vi $\int x \cdot 0{,}5e^{-0{,}5x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-0{,}5x} - \int -e^{-0{,}5x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-0{,}5x} - \frac{1}{0{,}5}e^{-0{,}5x} + C$.
Da blir

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x = \left[-xe^{-0{,}5x} - \frac{1}{0{,}5}e^{-0{,}5x}\right]_{x=0}^{x\to\infty}$$
$$= 0 - 0 - (0 - \frac{1}{0{,}5}e^{0}) = 2$$

Ved symmetrien i uttrykket for $F(x,y)$ får vi $E(Y) = \dfrac{1}{0{,}8} = 1{,}25$.
Vi har

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} 0{,}5e^{-0{,}5x} \cdot 0{,}8e^{-0{,}8y} & \text{hvis } x,y \geqslant 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$
$$= f(x,y)$$

som jo betyr at X og Y er uavhengige stokastiske variabler. Da har vi

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_X(x)f_Y(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x) \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)\,\mathrm{d}x \cdot E(Y)$$
$$= E(X) \cdot E(Y)$$

(som vi også vet) og derfor er $E(XY) = 2 \cdot 1{,}25 = 2{,}5$.

(d) Vi har $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ som er 0 fordi X og Y er uavhengige. Vi har $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Cov}(X,X) = E(X^2) - E(X)^2$ og $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} x^2 \cdot 0{,}5e^{-0{,}5x}\,\mathrm{d}x$. Ved delvis integrasjon $\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v =$ med $u(x) = x^2$ og $v(x) = -e^{-0{,}5x}$ og $u'(x) = 2x$ og $v'(x) = 0.5e^{-0{,}5x}$ får vi

$$\int x^2 \cdot 0{,}5e^{-0{,}5x}\,\mathrm{d}x = -x^2 e^{-0{,}5x} - \int -2xe^{-0{,}5x}\,\mathrm{d}x$$

og ved utregningen for $E(X)$ får vi $\int xe^{-0{,}5x}\,\mathrm{d}x = (-2x-4)e^{-0{,}5x} + C$. Til sammen får vi

$$E(X^2) = \left[-(x^2+4x+8)e^{-0{,}5x}\right]_{x=0}^{x\to\infty} = 0 - (-8) = 8$$

Her bruker vi l'Hôpitals regel to ganger ($\frac{-\infty}{\infty}$):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-(x^2+4x+8)}{e^{0{,}5x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-(2x+4)}{e^{0{,}5x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{e^{0{,}5x}} = 0\,.$$

Vi får

$$\mathrm{Var}(X) = 8 - 2^2 = 4\,.$$

Ved symmetri i likningene (samme utregning) gir $\mathrm{Cov}(Y,Y) = \frac{25}{16}$:

$$\int y^2 \cdot 0{,}8e^{-0{,}8x}\,\mathrm{d}y = -y^2e^{-0{,}8y} - \int -2ye^{-0{,}8y}\,\mathrm{d}y = -y^2e^{-0{,}8y} - \int -2ye^{-0{,}8y}\,\mathrm{d}y$$
$$= -\left(y^2 + \frac{2}{5}y + \frac{25}{8}\right)e^{-0{,}8y} + C$$

Altså er $E(Y^2) = \frac{25}{8}$ og $\mathrm{Var}(Y) = \frac{25}{8} - \frac{25}{16} = \frac{25}{16}$. Dermed er kovariansmatrisen

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{25}{16} \end{bmatrix}$$

(e) Pr. definisjon er $f_{X|b}(x) = \frac{f(x,b)}{f_Y(b)}$. Fordi X og Y er uavhengige er $f(x,b) = f_X(x) \cdot f_Y(b)$ og dermed er $f_{X|b}(x) = f_X(x)$ uansett hva b er.

Oppgave (9.2).
Vi har $f_X(x) = \frac{1}{6}x + \frac{1}{12}$ for $0 \leqslant x \leqslant 3$ og $f_Y(y) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}y^2$ for $0 \leqslant y \leqslant 1$, og 0 ellers.

a) Anta $b \in [0,1]$. Da er $f_Y(b) > 0$. Dermed er $f_{X|b}$ definert og gitt som

$$f_{X|b}(x) = \frac{f(x,b)}{f_Y(b)} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{6}x + \frac{1}{4}b^2}{\frac{3}{4} + \frac{3}{4}b^2} & \text{for } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2x+3b^2}{9+9b^2} & \text{for } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

b) Anta $a \in [0,3]$. Da er $f_X(a) > 0$. Dermed er $f_{Y|a}$ definert og gitt som

$$f_{Y|a}(y) = \frac{f(a,y)}{f_X(a)} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{6}a + \frac{1}{4}y^2}{\frac{1}{6}a + \frac{1}{12}} & \text{for } 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2a+3y^2}{2a+1} & \text{for } 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

c)

$$\mathrm{E}(X_{|Y=b}) = \int_0^3 x \cdot \frac{2x+3b^2}{9+9b^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9+9b^2}\int_0^3 2x^2 + 3b^2x\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{9+9b^2}\left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}b^2x^2\right]_0^3 = \frac{1}{9+9b^2}\left[\frac{2}{3}\cdot 3^3 + \frac{3}{2}b^2 \cdot 3^2 - 0\right]$$
$$= \frac{18 + \frac{27b^2}{2}}{9+9b^2} = \frac{2 + \frac{3b^2}{2}}{1+b^2} = \frac{4+3b^2}{2+2b^2} \quad \text{for } b \in [0,1]$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y_{|X=a}) &= \int_0^1 y \cdot \frac{2a+3y^2}{2a+1}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2a+1}\int_0^1 2ay + 3y^3\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2a+1}\left[ay^2 + \frac{3}{4}y^4\right]_0^1 = \frac{1}{2a+1}\left[a\cdot 1^2 + \frac{3}{4}\cdot 1^4 - 0\right] \\
&= \frac{a+\frac{3}{4}}{2a+1} = \frac{4a+3}{8a+4} \quad \text{for } a \in [0\,,3]
\end{aligned}
$$

d) Fordi $\mathrm{E}(X_{|Y=b}) = \frac{4+3b^2}{2+2b^2}$ er kontinuerlig for $b \in [0\,,1]$, finnes maksimum og minimum for funksjonen, enten i endepunktene eller i de stasjonære punktene. Vi har

$$\left(\frac{4+3b^2}{2+2b^2}\right)' = -\frac{b}{(b^2+1)^2}$$

som er negativ for $b > 0$. Altså er $\mathrm{E}(X_{|Y=b})$ strengt avtagende i intervallet $[0\,,1]$, maksimumspunktet er $b = 0$ og maksimumsverdien er $\mathrm{E}(X_{|Y=0}) = 2$.

Fordi $\mathrm{E}(Y_{|X=a}) = \frac{4a+3}{8a+4}$ er kontinuerlig for $a \in [0\,,3]$ finnes maksimum og minimum for funksjonen. Vi har

$$\left(\frac{4a+3}{8a+4}\right)' = -\frac{1}{(a+\frac{1}{2})^2}$$

som er negativ for alle a. Altså er $\mathrm{E}(Y_{|X=a})$ strengt avtagende i intervallet $[0\,,3]$, maksimumspunktet er $a = 0$ og maksimumsverdien er $\mathrm{E}(Y_{|X=0}) = \frac{3}{4}$.

e) Vi regner først

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\big((X_{|Y=b})^2\big) &= \int_0^3 x^2 \cdot \frac{2x+3b^2}{9+9b^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9+9b^2}\int_0^3 2x^3 + 3b^2x^2\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{9+9b^2}\left[\frac{2}{4}x^4 + \frac{3}{3}b^2x^3\right]_0^3 = \frac{1}{9+9b^2}\left[\frac{1}{2}\cdot 3^4 + b^2\cdot 3^3 - 0\right] \\
&= \frac{6b^2+9}{2b^2+2} \quad \text{for } b \in [0\,,1]
\end{aligned}
$$

Altså er

$$\mathrm{Var}(X_{|Y=b}) = \frac{6b^2+9}{2b^2+2} - \left(\frac{3b^2+4}{2b^2+2}\right)^2 = \frac{3b^4+6b^2+2}{(2b^2+2)^2}$$

Så regner vi

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\big((Y_{|X=a})^2\big) &= \int_0^1 y^2 \cdot \frac{2a+3y^2}{2a+1}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2a+1}\int_0^1 2ay^2 + 3y^4\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2a+1}\left[\frac{2a}{3}y^3 + \frac{3}{5}y^5\right]_0^1 = \frac{1}{2a+1}\left[\frac{2a}{3}\cdot 1^3 + \frac{3}{5}\cdot 1^5 - 0\right] \\
&= \frac{10a+9}{30a+15} \quad \text{for } a \in [0\,,3]
\end{aligned}
$$

Altså er

$$\mathrm{Var}(Y_{|X=a}) = \frac{10a+9}{30a+15} - \left(\frac{4a+3}{8a+4}\right)^2 = \frac{a^2 + \frac{11}{10}a + \frac{9}{80}}{12(a+\frac{1}{2})^2}$$

f) Når vi deriverer $\mathrm{Var}(X_{|Y=b})$ får vi (etter endel regning)

$$\left(\frac{3b^4+6b^2+2}{(2b^2+2)^2}\right)' = \frac{b}{(b^2+1)^3}$$

som er positiv for $b > 0$. Altså er $\mathrm{Var}(X_{|Y=b})$ voksende i intervallet $[0\,,1]$, $b = 0$ er miniumumspunktet og minimumsverdien er $\mathrm{Var}(X_{|Y=0}) = \frac{3 \cdot 0^4 + 6 \cdot 0^2 + 2}{(2 \cdot 0^2 + 2)^2} = \frac{1}{2}$.
Når vi deriverer $\mathrm{Var}(Y_{|X=a})$ får vi

$$\left(\frac{a^2 + \frac{10}{11}a + \frac{9}{80}}{12(a + \frac{1}{2})^2} \right)' = \frac{13 - 4a}{480(a + \frac{1}{2})^3}$$

som er positiv for $a \in [0\,,3]$. Altså er $\mathrm{Var}(Y_{|X=a})$ voksende i intervallet $[0\,,3]$, $a = 0$ er miniumumspunktet og minimumsverdien er $\mathrm{Var}(Y_{|X=0}) = \frac{0^2 + \frac{10}{11} \cdot 0 + \frac{9}{80}}{12(0 + \frac{1}{2})^2} = \frac{3}{80}$.