FORELESNING 15

MET1180 MATEMATIKK

BI

EIVIND ERIKSEN

JAN 13, 2016

Plan

1. Introduksjon Vår
2. Lineær approksimasjon
3. Taylor-polynom

Pensum:

[S] 7.4–7.7

[E] 4.10

1

MET1181

algebra
limiter
derivasjon

MET1182

– Idag: Lineær approksimasjon, Taylor polynom } [S] Kap. 7.4–7.7

Tema:

– integrasjon
– lineær algebra / matriseregn.
– funksjoner i flere variable

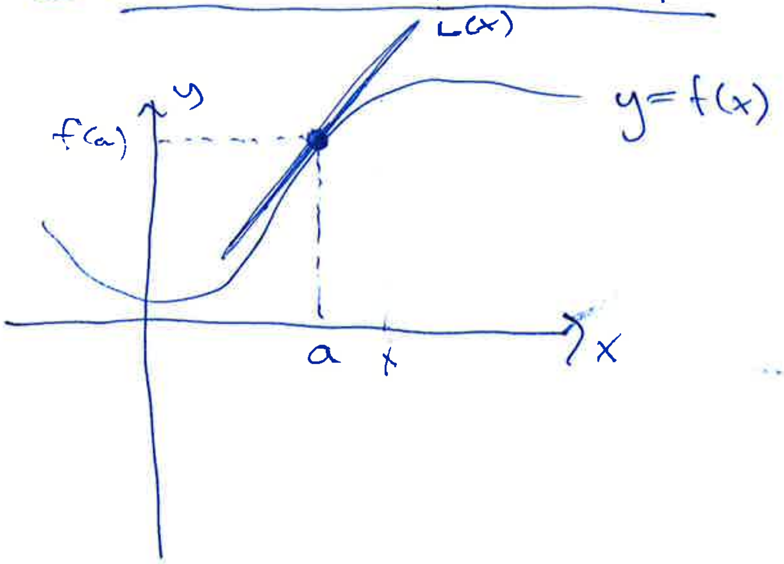
[S] Kap 8–10

Husk:

Konte } MET11801 Frist 17/03
MET11802 Eksamen 02/05

Avsluttende eksamen MET 11803 : 03/06

② Lineær approksimasjon



tangentlinjen til f(x) i x=a gir en ganske god tilnærming til funksjonen f(x) i nærheten av x=a.

lineær approksimasjon til f(x) i x=a = den lineære funksjonen som har tangentlinjen som graf.

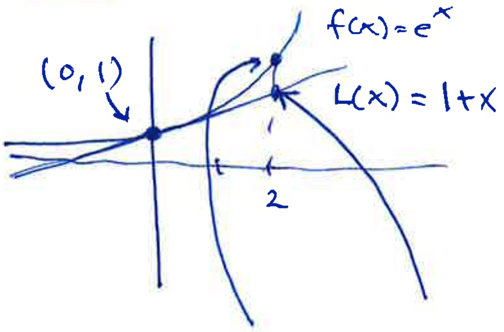
$$y - f(a) = f'(a)\cdot(x-a)$$

$$y = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$$

$$\boxed{L(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)}$$

lineær approks. til f(x) i x=a

Eks: $f(x) = e^x$ i $x=0$



$$e^2 = f(2) \simeq L(2) = 1+2 = \underline{3}$$

$$e^1 = f(1) \simeq L(1) = 1+1 = \underline{2}$$

Utregning av L(x):

$$f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$y - 1 = 1\cdot(x-0)$$

$$y - 1 = x$$

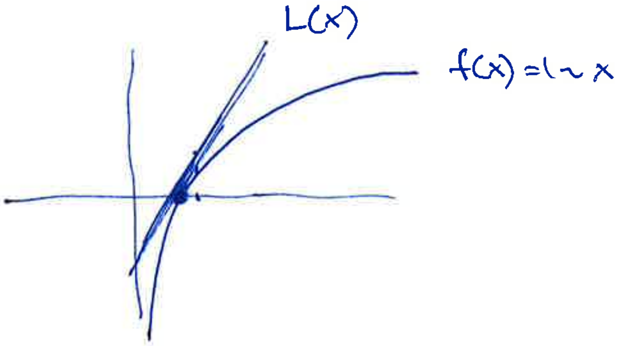
$$y = \underline{1+x}$$

$$L(x) = f(0) + f'(0)\cdot(x-0)$$

$$= 1 + 1\cdot(x-0)$$

$$= \underline{1+x}$$

Eks: $f(x) = \ln x$ i $x = 1$



$$f(1) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1$$

$$L(x) = f(1) + f'(1)\cdot(x-1)$$
$$= 0 + 1\cdot(x-1)$$
$$= \underline{x-1}$$

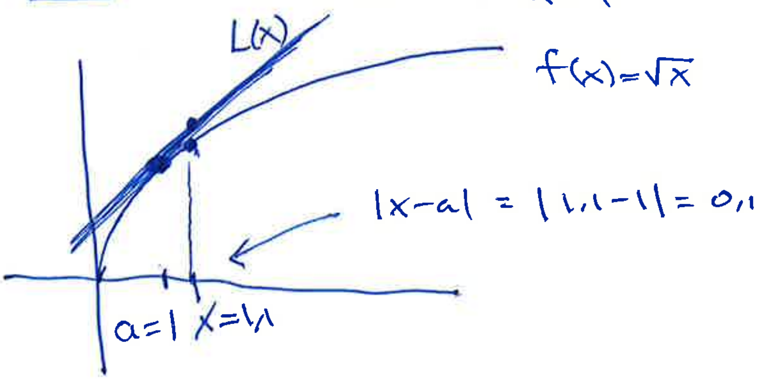
$$\ln(1{,}2) = f(1{,}2) \simeq L(1{,}2) = \underline{0{,}2}$$

Den lineære tilnærmingen $L(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$ er den lineære funksjonen som tilnærmer $f(x)$ best i nærheten av $x = a$.

$f(x) \simeq L(x)$

Tilnærmingen er svært god når $|x-a|$ er lite, og den blir raskt mye dårligere når avstanden $|x-a|$ blir større.

Eks: $f(x) = \sqrt{x}$ i $x = 1$



$$f(1) = \sqrt{1} = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$L(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$$
$$= \underline{\underline{1 + \frac{1}{2}\cdot(x-1)}}$$
$$\left(= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x \right)$$

$$\sqrt{1.1} = f(1{,}1) \simeq L(1{,}1) = 1 + \frac{1}{2}\cdot 0.1$$
$$= \underline{1{,}05}$$

3 Taylor-polynom

Polynomet av grad n som tilnærmer $f(x)$ best i nærheten av $x=a$ kalles <u>Taylorpolynomet</u> av grad n til $f(x)$ i $x=a$. Det skrives $p_n(x)$.

<u>Eks:</u>

$f(x) = e^x$ i $x=0$

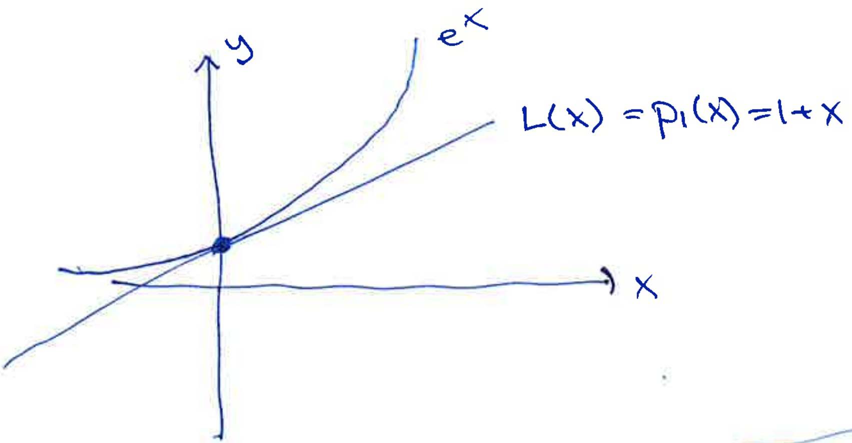
$$L(x) = f(0) + f'(0)\cdot(x-0)$$
$$= 1 + 1\cdot(x-0)$$
$$= \underline{1+x}$$

<u>$n=2$:</u> Taylorpolynom av grad 2

$p_2(x)$:

$$p_2(x) = A + Bx + C\cdot x^2$$
$$= 1 + x + Cx^2$$

~~F(x)~~



<u>Tangent-linjen:</u>

$x=a$: $f(a) = L(a)$
$f'(a) = L'(a)$

<u>Taylor polynom av grad 2:</u>

$$f(a) = p_2(a)$$
$$f'(a) = p_2'(a)$$
$$f''(a) = p_2''(a)$$

Det betyr at $p_2(x) = L(x) + Cx^2$ og vi velger C slik at

$$(Cx^2)' = C\cdot 2x$$
$$(Cx^2)'' = C\cdot 2$$

$$f''(a) = (C\cdot 2x)' = C\cdot 2$$

$$f''(a) = 2\cdot C \Rightarrow C = \frac{f''(a)}{2}$$

Taylorpolynom av grad 2 i $x=a$:

$$P_2(x) = L(x) + C\cdot(x-a)^2 \quad \text{med } C = \frac{f''(a)}{2}$$

$$\boxed{P_2(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2}\cdot(x-a)^2}$$

Eks: $f(x) = e^x$ i $x=0$ $(a=0)$ $\rightarrow f(0)=1$

$f'(x) = e^x \rightarrow f'(0)=1$

$f''(x) = e^x \rightarrow f''(0)=1$

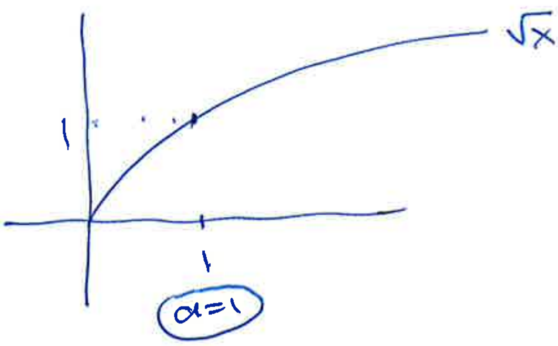
$$P_2(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2}\cdot x^2$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

$f''(0)=1$ $\quad P_2''(x) = (1+x)' = 1$

$P_2''(0) = 1$

Eks: $f(x) = \sqrt{x}$ i $x=1$



$$P_2(x) = A + B\cdot(x-1) + C\cdot(x-1)^2$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2$$

$A = f(a) = \sqrt{1} = 1$

$B = f'(a) = 1/2$

$C = \frac{f''(a)}{2} = \frac{-1/4}{2} = -\frac{1}{8}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\cdot x^{-1/2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^{-3/2}$$

$$= -\frac{1}{4}x^{-3/2} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

Taylor-polynom av høyere grad

Taylor-polynom til $f(x)$ i $x=a$ av grad n:

$$\boxed{p_n(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}$$

$$\frac{f'''(a)}{6}$$

hvor $n! = n\cdot(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$

$f^{(n)}(a) =$ deriverte av orden n i $x=a$

Eks: $f(x) = e^x$ i $x=0$

$f(0)=1$

$f'(x) = e^x \rightarrow f'(0)=1$

$f''(x) = e^x \quad f''(0)=1$

$f'''(x) = e^x \quad f'''(0)=1$

$f''''(x) \rightarrow f^{(4)}(x) = e^x \quad f^{(4)}(0)=1$

$p_1(x) = 1 + x$

$p_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

$p_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

$p_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}\cdot x^4$

$\vdots$

Restledd = feilledd:

$$R_n(x) = \underbrace{f(x) - p_n(x)}$$

differansen mellom riktig verdi $f(x)$ og tilnærmingen $p_n(x)$ fra Taylor-polynom av grad n.

Lagrange's restleddsformel.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$$ for et tall c mellom x og a

$f(x) - p_n(x)$

Eks: $f(x) = e^x$ i $x = 0$

$$p_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!}(x-0)^5 = \frac{e^c}{120}x^5$$

$$R_4(x) = \frac{e^c}{120}x^5$$ for en c mellom 0 og x

i $x=2$:

$$e^2 = f(2) \simeq p_4(2) = 1 + 2 + 2 + 8/6 + 16/24$$
$$= 5 + 4/3 + 2/3 = 7$$

$$e^2 \simeq 7$$

Feilen i denne tilnærmingen: $R_4(2) = \frac{e^c}{120} \cdot 2^5 = \frac{32}{120}e^c$

der $c \in (0,2)$

$$\leq \frac{32}{120}e^2$$

$$R_5(2) = \frac{e^c}{720} \cdot 64 \leq \frac{64}{720}e^2$$

For "de fleste" funksjoner, så er

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

funksjoner der $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ kalles <u>analytiske</u> funksjoner

Eks: $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \ldots = e^x$

(Taylor-rekken til e^x)

Taylor-rekken til $f(x)$:
$p(x) = \lim_{n\to\infty} p_n(x)$

Eks: $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ i $x=0$ $\to f(0) = 1$

$f'(x) = 4x^3 + 2x \to f'(0) = 0$

$f''(x) = 12x^2 + 2 \qquad f''(0) = 2$

$f'''(x) = 24x \qquad f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = 24 \qquad f^{(4)}(0) = 24$

$f^{(5)}(x) = 0$

$p_2(x) = 1 + 0\cdot x + \frac{2}{2}x^2 = 1 + x^2$

$p_3(x) = 1 + x^2 + \frac{0}{6}x^3 = 1 + x^2$

$p_4(x) = 1 + x^2 + \frac{24}{24}\cdot x^4 = \underline{1 + x^2 + x^4}$

$$R_4(x) = \frac{0}{5!}x^5 = 0$$

Eks: $f(x) = \frac{1}{1+x}$ i $x=0$ $\qquad f(0) = 1$

$f'(x) = \left((1+x)^{-1}\right)' = -1\cdot(1+x)^{-2}\cdot 1 = -1\cdot(1+x)^{-2} \qquad f'(0) = -1$

$f''(x) = (-1)\cdot(-2)\cdot(1+x)^{-3}\cdot 1 = 2\cdot(1+x)^{-3} \qquad f''(0) = 2$

$f'''(x) = -6\cdot(1+x)^{-4} \qquad f'''(0) = -6$

$$p_3(x) = 1 - x + \frac{2}{2}x^2 - \frac{6}{6}x^3 = \underline{1 - x + x^2 - x^3}$$

Newton's binomial formel:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

der $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!} = C_{n,i}$