FORELESNING 26

MET1180 — MATEMATIKK

EIVIND ERIKSEN, APRIL 01 2016

Plan:

① Partiellderivasjon og Hesse-matrisen

② Lokale maks./min. i to variable

Pensum:

[S] 8.4–8.7, 8.12

[E] 7.3–7.4

Hesse

① Partiell-derivasjon og Hesse-matrisen

Eks: $f(x,y) = xy$

Partiellderiverte:

$$f'_x = (xy)'_x = y \cdot (x)'_x = y \cdot 1 = \underline{y}$$

$$f'_y = (xy)'_y = x \cdot (y)'_y = x \cdot 1 = \underline{x}$$

Skrivemåter:

$f'_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ ← Leibniz-notasjon $\qquad \partial$ = partiellderivasjon

$f' = \dfrac{df}{dx}$ ← (d = "vanlig derivasjon")

Husk: f'_x, f'_y er egentlig funksjoner $\begin{cases} f'_x(x,y) = y \\ f'_y(x,y) = x \end{cases}$

Eks: $f'_x(0,0) = 0$

$f'_y(0,0) = 0$

2) Stasjonært punkt:

Et stasjonært plt. for f er et plt. slik at $\boxed{f'_x = f'_y = 0}$.

Eks: $f = xy$

$$\begin{cases} f'_x = y = 0 \\ f'_y = x = 0 \end{cases} \longleftarrow$$ Førsteordensbetingelsene (to likninger i to ukjente)

$$\Downarrow$$

$$y = 0,\ x = 0$$

Stasjonære plt.: $(x,y) = \underline{(0,0)}$

Stasjonære plt. er kandidater for max/min.

Funksjonsverdi: $f(0,0) = \underline{0}$

Klassifikasjon: Lokalt maks / lokalt min / sadelplt.

Defn:

(x^*, y^*) er lokalt maks for f hvis $f(x^*, y^*) \geq f(x,y)$ for alle plt (x,y) i nærheten.

(x^*, y^*) er lokalt min for f " $f(x^*, y^*) \leq f(x,y)$ for alle plt (x,y) i nærheten.

Hvis (x^*, y^*) er et stasjonært plt som hverken er lokalt maks. eller min, kalles det et sadelplt.

Annenderivert-testen:

Vi kan regne ut annenordens partiell deriverte til f:

$$f''_{xx} = (f'_x)'_x = (y)'_x = \underline{0}$$

↑ i Eks.

$$f''_{xy} = (f'_x)'_y = (y)'_y = 1$$

$$f''_{yx} = (f'_y)'_x = (x)'_x = 1$$

$$f''_{yy} = (f'_y)'_y = (x)'_y = 0$$

1 Eks $f = xy$

<u>Hesse-matrise</u> til f er

$$H(f) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}$$

<u>Egentlig</u>:
$H(f)(x,y) = H(f)$

1 <u>Eks</u>: $f = xy$:

$$H(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

For å klassifisere et stasjonært punkt (x^*, y^*), ser vi på

$$H(f)(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x^*, y^*) & f''_{xy}(x^*, y^*) \\ f''_{yx}(x^*, y^*) & f''_{yy}(x^*, y^*) \end{pmatrix}$$

1 <u>eks</u>:

$$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Annenderivert-testen:

Hvis (x^*, y^*) er et stasjonært pkt for f og

$$H(f)(x^*,y^*) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

slik at $A = f''_{xx}(x^*,y^*)$, $B = f''_{xy}(x^*,y^*)$ og $C = f''_{yy}(x^*,y^*)$, regner vi ut

$$D = |H(f)(x^*,y^*)| = AC - B^2$$

Vi har at:

1. $D > 0$, $A > 0$: (x^*,y^*) lokalt min
2. $D > 0$, $A < 0$: (x^*,y^*) lokalt maks
3. $D < 0$: (x^*,y^*) sadelpkt

Hvis $D = 0$, kan vi ikke klassifisere (x^*,y^*) vha annenderivert-testen. (Vi må da bruke en annen metode.)

Merk: $D = AC - B^2$

$$D > 0 \Rightarrow AC - B^2 > 0$$
$$AC > B^2 \geq 0 \Rightarrow AC > 0 \Rightarrow \begin{cases} A > 0,\ C > 0 \ (1) \\ \text{eller} \\ A < 0,\ C < 0 \end{cases}$$

Eks: 1. $f(x,y) = xy$

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = y = 0 \\ f'_y = x = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y=0, \\ x=0 \end{array} \Rightarrow \underline{\text{Stasjonære pkt:}}$$

$$\underline{\underline{(x,y) = (0,0)}} \quad f = 0$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

$D = -1 < 0$ $\boxed{\text{Sadelpkt i } (0,0)}$

Konklusjon: f har <u>ikke maks</u>, <u>ikke min</u>

Eks. 2: $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$

<u>Stasjonære pkt.</u>

① $f'_x = 4x^3 - 4y = 4x^3 - 4y = 0 \Rightarrow$ ① $\cancel{4}x^3 = \cancel{4}y$

② $f'_y = -4x + 4y^3 = -4x + 4y^3 = 0$

$\underline{y = x^3}$

Setter inn i ②

$-4x + 4(x^3)^3 = 0$

$4x^9 - 4x = 0$

$4x \cdot (x^8 - 1) = 0$

$x = 0$ eller $x^8 = 1$

$\underline{x = 0}$ $\quad x = \pm\sqrt[8]{1}$

$\underline{x = \pm 1}$

<u>Stasjonære pkt:</u>

$x = 0 \Rightarrow y = x^3 = 0 \Rightarrow \underline{(x,y) = (0,0)}$ $\quad f = 0$

$x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \underline{(x,y) = (1,1)}$ $\quad f = -2$

$x = -1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow \underline{(x,y) = (-1,-1)}$ $\quad f = -2$

Stasj. pkt: $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$

$$f'_x = 4x^3 - 4y$$
$$f'_y = -4x + 4y^3$$

Hessematrisen:

$$H(f) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

Klassifikasjon:

$(0,0)$: $H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

$D = 0^2 - (-4)^2 = -16 < 0$ sadelpkt $(0,0)$

$(1,1)$: $H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$

$D = 12^2 - (-4)^2 = 144 - 16 = 128 > 0$

$A = 12 > 0$ lokalt min $(1,1)$

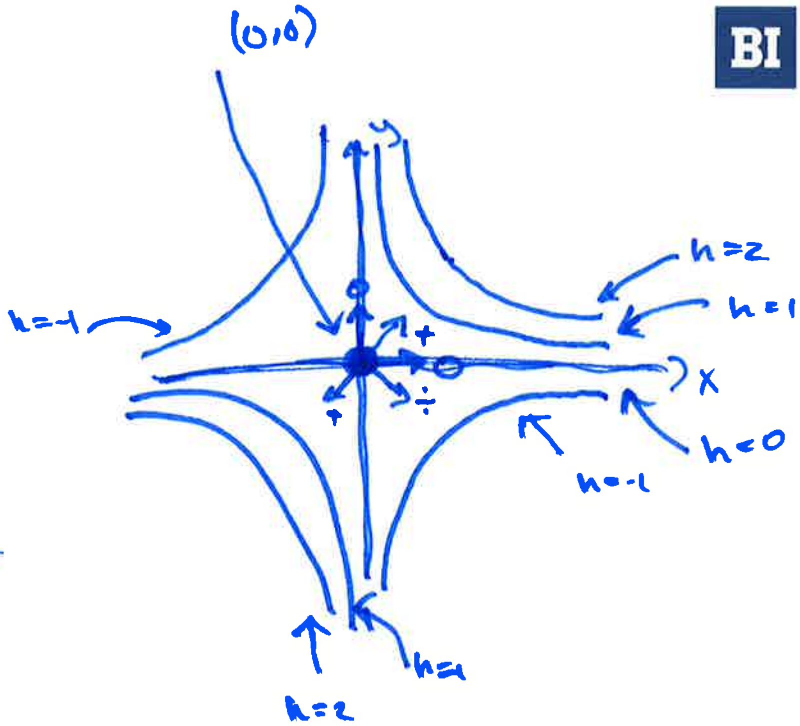
$(-1,-1)$: $H(f)(-1,-1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$ lokalt min $(-1,-1)$

samme som for $(1,1)$

Konklusjon: f har ikke maks

f har lokalt min i $(1,1)$, $(-1,-1)$

Eks: $f(x,y) = xy$



Nivåkurvene:

$f(x,y) = h$

h=0: $xy = 0$

$x=0$ eller $y=0$

h=1: $xy=1$

$y = 1/x$

h=2: $xy = 2$

$y = 2/x$

h=-1: $xy = -1$

$y = -1/x$

Merk: $f'_x(a,b)$, $f'_y(a,b)$ er stigningstallet til tangenten i (a,b) i x-retn. / y-retn.

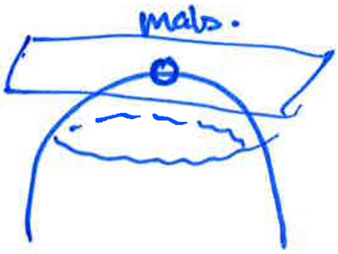
$f'_x = y \qquad f'_x(0,0) = 0$

$f'_y = x \qquad f'_y(0,0) = 0$

~~[illegible]~~:

Hvis f har et maks. eller min i (x^*, y^*), så må en av følgende betingelser være oppfylt:

① Tangenten til f i (x^*, y^*) i en hvilken som helst retning er horisontal.



$$\Downarrow$$

$$f'_x(x^*, y^*) = f'_y(x^*, y^*) = 0$$

$$\Updownarrow$$

(x^*, y^*) er stasjonært pkt for f

② Tangentene til f i (x^*, y^*) ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ eksisterer ikke

$$\Downarrow$$

$f'_x(x^*, y^*)$, $f'_y(x^*, y^*)$ eksisterer ikke

Eks: $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $D_f = \mathbb{R}^2$

$$f'_x = \frac{1}{\cancel{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cancel{2}x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$$f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ eksisterer ikke

(gir divisjon med null).

Konklusjon:

Punkter (x^*, y^*) i D_f der $f'_x(x^*, y^*)$ eller $f'_y(x^*, y^*)$ ikke eksisterer, kan være maks eller min.

Eks: $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $D_f = \mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ f'_y &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}\right\}$$

Stasjonære pkt: ingen

Punkter der f'_x, f'_y ikke begge er definert: $(x,y) = (0,0)$

$f(0,0) = \sqrt{0} = 0$

$f(x,y) > 0$ for $(x,y) \neq (0,0)$ $\Rightarrow (0,0)$ er min

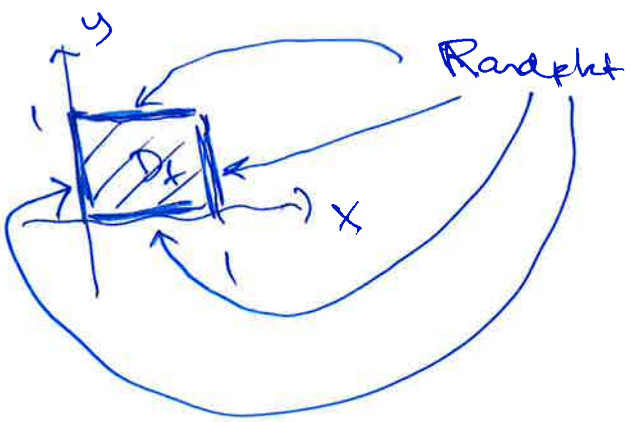
Defn: Et kritisk punkt for f er en ~~definisjon~~ punkt som enten er stasjonært eller et punkt der f'_x eller f'_y ikke er definert.

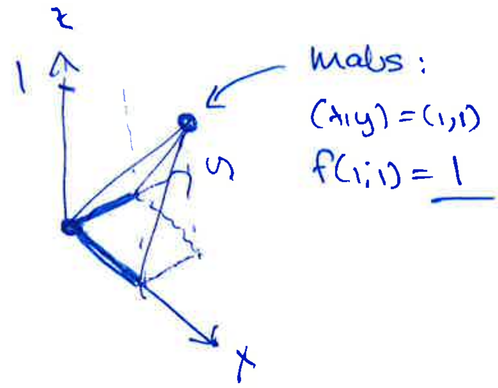
(Hvis $f(x,y)$ er en polynomfunksjon, er f'_x, f'_y alltid definert.)

③ <u>Randpunkt</u> kan være maks/min.

Eks: $f(x,y) = xy \;,\; 0 \le x,y \le 1$

<u>Randpunkt</u>: Et punkt i D_f slik at det fins punkt vilkårlig nært som ikke er i D_f.





<u>Konklusjon:</u>

<u>Kandidatepunkter</u> = kandidater for max/min for f

① <u>Stasjonære</u> pkt $(f'_x = f'_y = 0)$ } kritiske punkt
② Punkt der f'_x eller f'_y ikke eksisterer } kritiske punkt
③ <u>Randpunkt</u>

Hessematrisen er symmetrisk

For alle "vanlige" funksjoner, så er

$f''_{xy} = f''_{yx}$. Det betyr at $H(f)$ er symmetrisk.

<u>Eks</u>: $f(x,y) = xe^y$

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= e^y \\ f'_y &= x \cdot e^y \end{aligned}\right\} \qquad H(f) = \begin{array}{cc} & f''_{xy} \\ \begin{pmatrix} 0 & e^y \\ e^y & xe^y \end{pmatrix} & \\ f''_{yx} & \end{array}$$

Hvorfor virker annenderivert-testen?

$D > 0,\ A > 0 \implies$ lokal min

Hvis $\underset{\substack{\shortparallel \\ AC-B^2}}{D > 0}$, så er $\boxed{A>0,\ C>0}$

eller

$A<0,\ C<0$

(x^*, y^*) er stasjonært