BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

OPPSUMMERINGSFORELESNING

MET1180 MATEMATIKK

EIVIND ERIKSEN, MAI 23 2017

Plan:

1. Gjennomgang i Eksamen MET1180 fra 06/2016
2. Repetisjon av sentrale deler av kurset

Temaer:

Hoved-temaer

Derivasjon (Kap. 4) } funksj. i
Integrasjon (Kap. 5) } én variabel

Lineære likningssystemer og matriser (Kap 6) } funksj. i flere var.
Funksjoner i flere variable (Kap. 7)

\+ diverse andre tema:

Finansmatematikk
Grenseverdier (L'Hop.)
Likninger og ulikheter
Geometri (grafer, kurver) → rette linjer ($y=ax+b$), sirkler ($x^2+y^2=r^2$),
ellipser ($\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$), parabler ($y=x^2$), hyperbler ($y=1/x$)
grafen til e^x / $\ln(x)$

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

1.

$$A = \begin{pmatrix} 2-s & 3 & 3 \\ 3 & 2-s & 3 \\ 3 & 3 & 2-s \end{pmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ s+4 \\ 1-2s \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b} \iff \begin{aligned} (2-s)x + 3y + 3z &= 3 \\ 3x + (2-s)y + 3z &= s+4 \\ 3x + 3y + (2-s)z &= 1-2s \end{aligned}$$

s er en parameter

a) Gauss når $s=8$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 3 & 12 \\ 3 & 3 & -6 & -15 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & 3 & 12 \\ -6 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & -6 & -15 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & 3 & 12 \\ 0 & -9 & 9 & 27 \\ 0 & 9 & -9 & -27 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & 3 & 12 \\ 0 & -9 & 9 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

en fri variabel (z), dvs uendelig mange løsn.

$$3x - 6y + 3z = 12$$
$$-9y + 9z = 27 \Rightarrow \frac{-9y}{-9} = \frac{27-9z}{-9} \Rightarrow y = \underline{-3+z}$$

$$\Downarrow$$

$$3x = 12 + 6y - 3z = 12 + 6(-3+z) - 3z = 3z - 6$$

$$x = \frac{3z-6}{3} = \underline{z-2}$$

Løsn: $\boxed{\begin{aligned} x &= z-2 \\ y &= z-3 \\ z &\text{ er fri} \end{aligned}}$ //

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

b) $$|A| = \begin{vmatrix} 2-s & 3 & 3 \\ 3 & 2-s & 3 \\ 3 & 3 & 2-s \end{vmatrix}$$

$$= (2-s)\cdot\begin{vmatrix} 2-s & 3 \\ 3 & 2-s \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2-s \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2-s \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (2-s)\cdot\left((2-s)^2-9\right) - 3\left(3(2-s)-9\right) + 3\left(9-3(2-s)\right)$$

$$= (2-s)\left((2-s)^2-9\right) + 27 - 9(2-s) + 27 - 9(2-s)$$

$$= (2-s)\left((2-s)^2-9\right) + 54 - 18(2-s)$$

$$= (2-s)\left(s^2-4s+\underbrace{4-9}_{-5}\right) + 54 - 36 + 18s$$

$$= -s^3 + 2s^2 + 4s^2 - 8s + 5s - \cancel{10} + \cancel{54} - \cancel{36} + 18s$$

$$= -s^3 + 6s^2 + 15s + 8$$

c) $s=0$: $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot(C_{ij})^T = \frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$|A| = 8$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$(A^T = A)$

$C_{11} = -5$ $\quad C_{12} = -(-3)$ $\quad C_{13} = 3$

$C_{21} = 3$ $\quad C_{22} = -5$ $\quad C_{23} = -(-3)$

$C_{31} = 3$ $\quad C_{32} = 3$ $\quad C_{33} = -5$

$$A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow \underline{x} = A^{-1}\underline{b} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

Resultat:

Hvis $A\underline{x} = \underline{b}$ er et kvadratisk lineært system (like mange lign. som ukjente, dvs A kvadratisk), så:

Én løsning $\Longleftrightarrow$ $|A| \neq 0$

(Ingen eller uendelig mange løsn $\Longleftrightarrow$ $|A| = 0$)

d) Eksakt én løsn $\Longleftrightarrow$ $|A| \neq 0$

$|A| = 0$: $\underbrace{-s^3 + 6s^2 + 15s + 8}_{|A|} = 0$

Alt. Se på $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ (heltall som er faktor i 8)

Alt: Vet at $s = 8$ er løsn. pga a).

$-s^3 + 6s^2 + 15s + 8 = (s-8) \cdot (-s^2 - 2s - 1)$

Polynom divisjon

$= -(s-8)(s^2 + 2s + 1)$

$\boxed{|A| = -(s-8)(s+1)^2}$

$|A| = 0$: $s = 8$, $s = -1$

$|A| \neq 0$: $s \neq 8, -1$ $\rightarrow$ Én løsn for $\underline{\underline{s \neq 8, -1}}$

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

Kramer's regel: $\quad s \neq 8, -1$

$$x = \frac{|A_1(b)|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ s+4 & 2-s & 3 \\ 1-2s & 3 & 2-s \end{vmatrix}}{-(s-8)(s+1)^2} = \frac{0}{|A|} = \underline{\underline{0}}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ s+4 & 2-s & 3 \\ 1-2s & 3 & 2-s \end{vmatrix} = 3\left((2-s)^2 - 9\right) - 3\left((s+4)(2-s) - 3(1-2s)\right) + 3\left(3(s+4) - (1-2s)(2-s)\right)$$

$$= 3\left[\left(\cancel{s^2} \cancel{-4s} \cancel{+4} \cancel{-9}\right) - \left(\cancel{-s^2} \cancel{-2s} \cancel{+8} \cancel{-3} \cancel{+6s}\right) + \left(\cancel{3s} \cancel{+12} - \left(\cancel{2s^2} \cancel{-5s} \cancel{+2}\right)\right)\right]$$

$$= 3[0] = \underline{0}$$

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

2. $f(x) = 4 - (x^2+3)e^x$

$$f'(x) = -\left(2xe^x + (x^2+3)\cdot e^x\right) = \underline{-(x^2+2x+3)e^x}$$

$$f''(x) = -\left((2x+2)\cdot e^x + (x^2+2x+3)\cdot e^x\right)$$

$$= \underline{-(x^2+4x+5)e^x}$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} f''(x) \geq 0 \text{ for alle } x & \Leftarrow & f \text{ konveks} \\ f''(x) \leq 0 \quad \text{— " —} & \Leftarrow & f \text{ konkav} \end{array}}$$

<u>Fortegn for $f''(x)$:</u>

-1

x^2+4x+5

e^x

f'' $\div$

x^2+4x+5
$=(x+2)^2+1>0$

f er $\underline{\underline{\text{konkav}}}$

(men ikke konveks)

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

3.

Integrasjonsteknikker:
- delvis
- substitusjon
- delbrøksoppsp.

a) $$\int \frac{3x-4}{x^2+x}\,dx = \int \frac{-4}{x} + \frac{7}{x+1}\,dx$$

$$= -4\ln|x| + 7\cdot\ln|x+1| + C$$

$$\frac{3x-4}{x^2+x} = \frac{3x-4}{x\cdot(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \quad \Big|\cdot x(x+1)$$

$$3x-4 = A\cdot(x+1) + Bx$$

$x=-1$: $\quad -7 = A\cdot 0 + B\cdot(-1) \qquad B=7$

$x=0$: $\quad -4 = A\cdot 1 + B\cdot 0 \qquad A=-4$

b) $$\int \underbrace{18x^2}_{u'}\underbrace{\ln(x+1)}_{v}\,dx = \underbrace{6x^3\cdot\ln(x+1)}_{u\cdot v} - \underbrace{\int 6x^3\cdot\frac{1}{x+1}\,dx}_{u\cdot v'}$$

$u = 18\cdot\frac{1}{3}x^3 = 6x^3$

$v' = \frac{1}{x+1}$

$$x^3 : x+1 = x^2 - x + 1$$
$$\frac{-(x^3+x^2)}{-x^2}$$
$$\frac{-(-x^2-x)}{x}$$
$$\frac{-(x+1)}{-1}$$

poly.div.

$$= 6x^3\cdot\ln(x+1) - \int \frac{6x^3}{x+1}\,dx = 6x^3\ln(x+1) - 6\int\frac{x^3}{x+1}\,dx$$

$$= 6x^3\ln(x+1) - 6\int x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= 6x^3\ln(x+1) - 6\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \ln(x+1)\right) + C$$

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

c) $\int e^{\sqrt{x}} dx = \int e^u \cdot du \cdot 2\sqrt{x}$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \sqrt{x} \\ du &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx \end{aligned}}$$

$= \int e^u \cdot 2u \, du = \int \underset{q}{2u}\, \underset{p'}{e^u} du$

$p = e^u$
$q' = 2$

$= 2u \cdot e^u - \int 2 e^u du$

$= \underline{2u e^u - 2e^u + C} = \underline{\underline{2\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C}}$

d) $\lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2+x} dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2+x} dx$

$\int_1^b \frac{1}{x^2+x} dx = \int_1^b \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \, dx = \Big[\ln|x| - \ln|x+1|\Big]_1^b$

$= (\ln b - \ln(b+1)) - (\underset{0}{\ln 1} - \ln 2)$

$= \ln b - \ln(b+1) + \ln 2$

$= \ln\left(\frac{b}{b+1}\right) + \ln 2$

$\downarrow b \to \infty$

$\ln(1) + \ln 2 = \underline{\underline{\ln 2}}$

$\simeq 0{,}693$

$\frac{1}{x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \quad | \cdot x(x+1)$

$1 = A(x+1) + Bx$

$\underline{x=-1:} \quad 1 = A \cdot 0 + B \cdot (-1) \quad \underline{B=-1}$

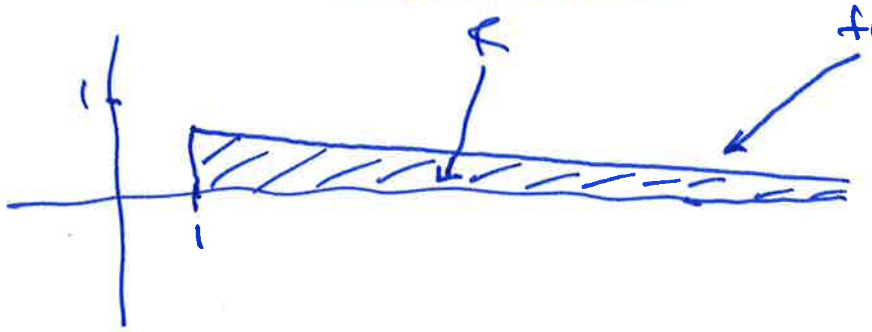
$\underline{x=0:} \quad 1 = A \cdot 1 + B \cdot 0 \quad \underline{A=1}$

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x}\,dx = \ln(2) \simeq \underline{0{,}693}$$

arealet området

$f(x) = \frac{1}{x^2+x}$



Karakterskala:

A: 92%
B: 77%
C: 58%
D: 46%
E: 40%

utg.pkt.
100% = 96p
(uten bonus)

Kontortid:

se It's.

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

4. $f(x,y) = \sqrt{36 - x^2 - 4y^2} = \sqrt{u}$, $u = 36 - x^2 - 4y^2$

a) $f'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'_x = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{u}} = -\frac{x}{\sqrt{u}}$

$f'_y = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'_y = \frac{-8y}{2\sqrt{u}} = -\frac{4y}{\sqrt{u}}$

Stasjonære pkt:

$f'_x = 0$ $\quad$ $-\frac{x}{\sqrt{u}} = 0 \quad \cdot \sqrt{u}$ $\quad$ $-x = 0$ $\quad$ (f''_x)

$f'_y = 0$ $\quad$ $-\frac{4y}{\sqrt{u}} = 0 \quad \cdot \sqrt{u}$ $\quad$ $-4y = 0$

$\Downarrow$

$x = 0, y = 0$

Sjekk: $u(0,0) = 36$ ok.

Stasjonære pkt: $(x,y) = (0,0)$

b) $f''_{xx} = \frac{-1 \cdot \sqrt{u} - (-x) \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{u}} \cdot (\cancel{2}x)}{u} = \frac{-\sqrt{u} - x^2/\sqrt{u}}{u}$

$= \frac{\left(-\sqrt{u} - \frac{x^2}{\sqrt{u}}\right) \cdot \sqrt{u}}{u \cdot \sqrt{u}} = \frac{-u - x^2}{u\sqrt{u}}$

$= \frac{(-36 + \cancel{x^2} + 4y^2) - \cancel{x^2}}{u\sqrt{u}} = \frac{4y^2 - 36}{u\sqrt{u}}$

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

$$f''_{xy} = \left(\frac{-x}{\sqrt{u}}\right)'_y = \frac{\cancel{0 \cdot \sqrt{u}} - (-x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (-8y)}{u} \cdot \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u}}$$

$$= \frac{-4xy}{u\sqrt{u}}$$

$$f''_{yy} = \left(\frac{-4y}{\sqrt{u}}\right)'_y = \frac{\left(-4 \cdot \sqrt{u} - (-4y) \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (-8y)\right)}{u} \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u}}$$

$$= \frac{-4u - 16y^2}{u\sqrt{u}} = \frac{-4(36 - x^2 - \cancel{4y^2}) \cancel{-16y^2}}{u\sqrt{u}}$$

$$= \frac{4x^2 - 144}{u\sqrt{u}}$$

$$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(0,0) & f''_{xy}(0,0) \\ f''_{xy}(0,0) & f''_{yy}(0,0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-36}{144} & 0 \\ 0 & -\frac{144}{36 \cdot 6} \end{pmatrix}$$

$\det H(f)(0,0) = AC - B^2 > 0$ $\Rightarrow$ $(0,0)$ er lokalt maks. ved annenderivert-testen
$A = -\frac{36}{144} < 0$

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

c) Lin approks. til f i (4,2):

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

$$= f(4,2) + f'_x(4,2)\cdot(x-4) + f'_y(4,2)\cdot(y-2)$$

$$\cancel{= f(4,2) - \frac{x_0}{\sqrt{u(x_0,y_0)}}\cdot(}$$

$$\cancel{= f(4,2) - \frac{4}{\sqrt{u(4,2)}}\cdot(x-4) - \frac{4\cdot 2}{\sqrt{u(4,2)}}\cdot(y-2)}$$

$$= 2 - 2(x-4) - 4(y-2)$$

d) Maks/min-verdier: Globale maks/min, funksjonsverdier

Vet: Et stasjonært pkt (0,0), lokalt maks.

~~Ingen lokale min ⟹ ingen globale min~~

Andre kritiske pkt: $u=0$

$f=\sqrt{u}$

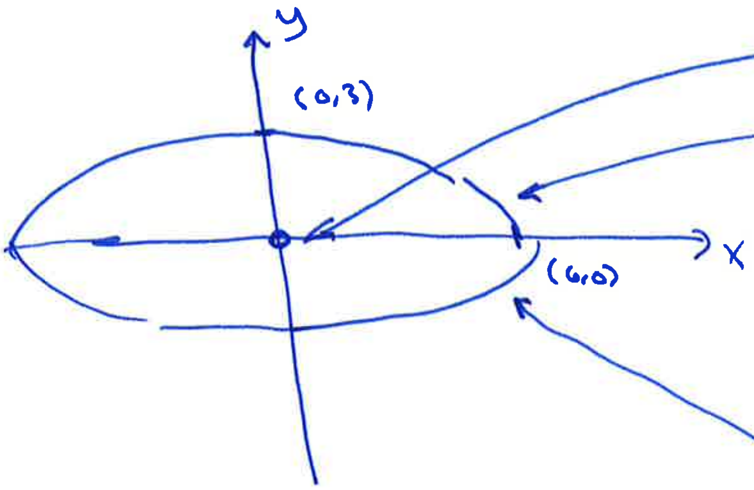
$$f'_x = \frac{-x}{\sqrt{u}} \qquad f'_y = \frac{-4y}{\sqrt{u}}$$

$36 - x^2 - 4y^2 = 0$

$\boxed{x^2+4y^2=36}$

Eks: (6,0)
(0,3)

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865



Stasj: $(0,0)$

Andre kritiske: $x^2+4y^2=36$

$$\frac{x^2}{36}+\frac{4y^2}{36}=1$$

$$\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$$

Randpkt:

D_f: $36-x^2-4y^2 \geq 0$

Rand: $x^2+4y^2=36$

$$f(x,y)=\sqrt{36-x^2-4y^2}$$

$f(0,0)=\underline{6}$

$f(x,y)=\underline{0}$ når $x^2+4y^2=36$

Globalt min verdi: $f(x,y)=\underline{\underline{0}}$ for alle (x,y) på ellipsen

siden $f(x,y)=\sqrt{u}\geq 0$ for alle x,y.

Globalt maks-verdi: $f(0,0)=\underline{\underline{6}}$

fordi $u=36-x^2-4y^2 \leq 36$

og $\sqrt{u}\leq\sqrt{36}=6$

BI HANDELSHØYSKOLEN

Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo

Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500

www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

5. max/min $x+2y-\sqrt{36-x^2-4y^2}$ når $x^2+4y^2=36$

$=$ max/min $x+2y$ når $x^2+4y^2=36$

a) $x^2+4y^2=36$: punkt med $y'=\frac{1}{2}$

Bibetingelse: $\underbrace{x^2+4y^2}_{g(x,y)}=\underbrace{36}_{a}$

nivåkurven for g i høyde 36

$$y'=-\frac{g'_x}{g'_y}=\frac{1}{2}$$

$$-\frac{2x}{8y}=\frac{1}{2} \quad | \cdot 8y$$

$$-2x=4y$$

$$y=-x/2$$

Setter inn i $g(x,y)=36$: $x^2+4y^2=36$

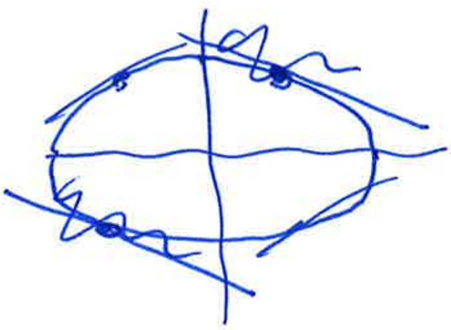
$$x^2+4(-x/2)^2=36$$

$$x^2+x^2=36$$

$$2x^2=36$$

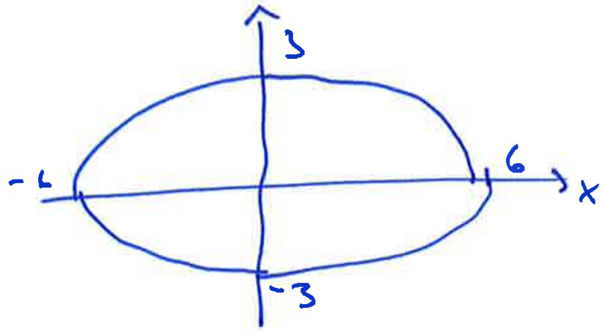
$$x^2=18$$

$$x=\pm\sqrt{18}$$



Løsn: $(x,y)=(\sqrt{18},-\sqrt{18}/2)$, $(-\sqrt{18},\sqrt{18}/2)$ //

b) $\underline{x^2+4y^2=36:}$



Ellipse

<u>Begrenset</u>, sider

$-6 \le x \le 6$

$-3 \le y \le 3$

c) max/min $\overbrace{x+2y}^{f(x,y)}$ når $x^2+4y^2=36$

$L = x+2y - \lambda(x^2+4y^2)$

FOC: $\begin{cases} L'_x = 1 - \lambda \cdot 2x = 0 \\ L'_y = 2 - \lambda \cdot 8y = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $2\lambda x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2\lambda}$

$8\lambda y = 2 \quad y = \dfrac{2}{8\lambda} = \dfrac{1}{4\lambda}$

C: $x^2+4y^2=36$

$\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + 4\cdot\left(\frac{1}{4\lambda}\right)^2 = 36$

$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}16\lambda^2} = 36 \quad \Big| \cdot 4\lambda^2$

$1 + 1 = 144\lambda^2 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{2}{144} = \frac{1}{72}$

$\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{72}}$

$x = \dfrac{1}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{72}}} = \dfrac{\sqrt{72}}{2} = \dfrac{\sqrt{36}\cdot\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

<u>Kandidatpkt:</u> $(x, y; \lambda) = (3\sqrt{2}, 3/2\sqrt{2}; 1/\sqrt{72}) \quad f = 6\sqrt{2}$

$(-3\sqrt{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}; -1/\sqrt{72}) \quad f = -6\sqrt{2}$

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

Konklusjon:

Siden D er begrenset, fins maks/min pga. ekstremverdisetn.

Sjekker degenert bibetingelse:

$g(x,y) = x^2+4y^2 = 36$

$g'_x = 2x = 0$

$g'_y = 8y = 0$

Ingen kandidatpkt ved degenert bibetingelse. ←

$x=0,\ y=0$ ikke tillatt.

$\Downarrow$

$f(3\sqrt{2}, 3/2\cdot\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}$ maks

$f(-3\sqrt{2}, -3/2\cdot\sqrt{2}) = -6\sqrt{2}$ min

d) maks/min $\underbrace{\boxed{x+2y-\sqrt{36-x^2-4y^2}}}_{f(x,y)}$ når $x^2+4y^2 \le 36$

$=$ på ellipsen $\rightarrow$ se (c).

$<$ inni ellipsen $\rightarrow$ Sjekk om det fins stasjonære pkt inne i ellipsen.

$f'_x = 1 - \frac{-x}{\sqrt{u}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{u}} = 0 \quad |\cdot\sqrt{u}$

$f'_y = 2 - \frac{-4y}{\sqrt{u}} = 2 + \frac{4y}{\sqrt{u}} = 0 \quad |\cdot\sqrt{u}$

$\sqrt{u} + x = 0$

$2\sqrt{u} + 4y = 0$

$\Rightarrow \sqrt{u} = -x$

$2\cdot(-x) + 4y = 0$

$2x = 4y$

$\underline{x = 2y}$

$\sqrt{36-x^2-4y^2} + x = 0$

$\sqrt{36-4y^2-4y^2} + 2y = 0$

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

$$\sqrt{36-8y^2} = -2y$$

$$36-8y^2 = 4y^2$$

$$36 = 12y^2$$

$$y^2 = 3$$

$$y = \pm\sqrt{3}$$

setter prøve: $\underline{y = -\sqrt{3}}$

$\underline{x = 2y = -2\sqrt{3}}$

<u>Stasjonært pkt:</u>

$(x,y) = (-2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

$u = 36 - x^2 - 4y^2$

$= 36 - 12 - 12 = 12$

ok

$x^2 + 4y^2 < 36$

$\downarrow$

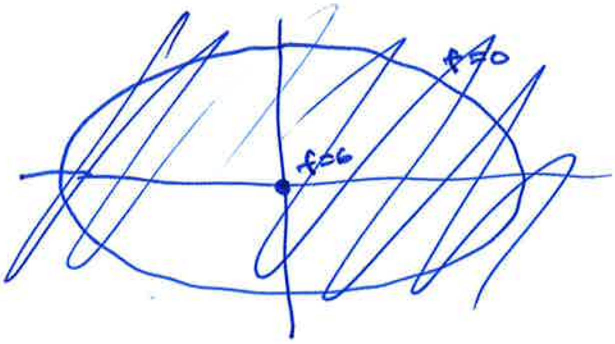
$0 < 36 - x^2 - 4y^2$

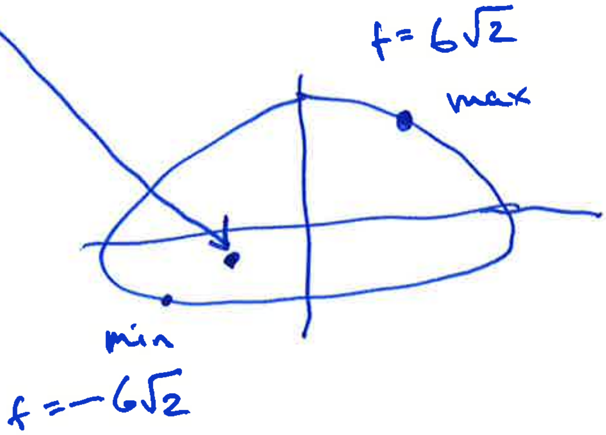
$f(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

$\underbrace{\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}}_{=\sqrt{12}} = 2\sqrt{3}$

$= -2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - \sqrt{12}$

$= \underline{-6\sqrt{3}}$





<u>max:</u> $f = 6\sqrt{2}$

<u>min:</u> $f = -6\sqrt{3}$ //