

FORELESNING 12

Eivind Ekinsep

NOV 09, 2016

MET1180

MATEMATIKK

Plan:

- ① Implisitt derivasjon
- ② Funksjonsdrøfting og optimering (maks/min)
- ③ Tangentlinjer
- ④ Funksjoner som ikke er deriverbare

Pensum:

[E] 4.3-4.6

Repetisjon: Derivasjonsregler

Ex:

$$(x^3 - 3x + 7\sqrt{x})' = 3x^2 - 3 + 7 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(x^2 e^x)' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x \\ = (2x + x^2) e^x$$

$$\left(\frac{x}{4-x^2}\right)' = \frac{1 \cdot (4-x^2) - x(-2x)}{(4-x^2)^2} \\ = \frac{4+x^2}{(4-x^2)^2}$$

$$\left(\ln(x^2-1)\right)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{x^2-1} \cdot 2x \\ \text{"} \\ \ln(u), \\ u = x^2-1 \\ = \underline{\underline{\frac{2x}{x^2-1}}}$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(c \cdot u)' = c \cdot u' \quad (c \text{ konstant})$$

$$(*) (u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$(*) (u/v)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(e^x)' = e^x \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$$

$$(\ln x)' = 1/x \quad (\log_a(x))' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln(a)}$$

$$(*) (f(u))' = f'(u) \cdot u'(x)$$

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

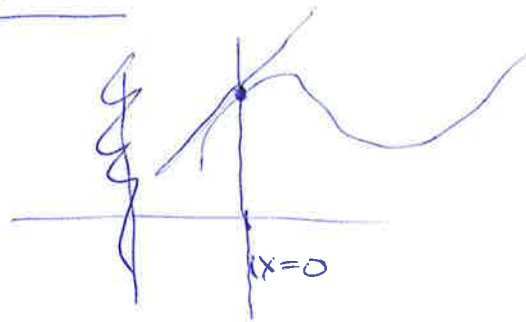
Prøve-eksamen 11/2015, Alt I, Oppg. 10

$$f(x) = \frac{x \cdot \ln(x^2+1)}{(x+1)^2} = \frac{u}{v}$$

$$f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$= \frac{(1 \cdot \ln(x^2+1) + x \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x) \cdot (x+1)^2}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{x \ln(x^2+1) \cdot 2(x+1) \cdot 1}{(x+1)^4}$$



Stigningskullet til
tangenten til $y=f(x)$
i $x=0$: $f'(0)$

$$f'(1) = \frac{(\ln 2 + \frac{1}{2} \cdot 2) \cdot 2^2 - 1 \cdot \ln 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1}{2^4} = \frac{4 \ln 2 + 4 - 4 \ln 2}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0,25$$

(C) positivt stigningskall

$$f'(0) = \frac{(1 \cdot \ln 1 + 0) \cdot 1^2 - 0 \cdot \ln 1 \cdot 2}{1^4} = 0$$

(B)

horizontal
tangent

① Implisitt derivasjon:

Ekse: Løsnings i x og y :

$$xy = 1 \quad \Rightarrow$$

(implisitt form)

$$y = 1/x$$

(eksplisitt form)

Generelt:

$$y = f(x)$$

Implisitt derivasjon:

$$xy = 1$$

$$x \cdot y(x) = 1$$

$$(x \cdot y)' = (1)'$$

$$x' \cdot y + x \cdot y' = 0$$

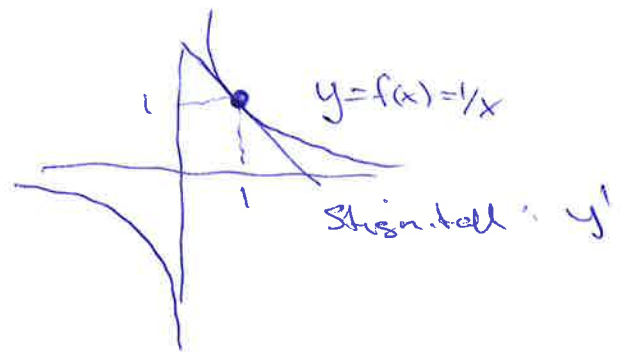
$$1 \cdot y + x \cdot y' = 0$$

$$\frac{x \cdot y'}{x} = -\frac{y}{x}$$

$$\boxed{y' = -\frac{y}{x}}$$

$$\left(y = 1/x : y' = -\frac{1/x}{x} = -\frac{1}{x^2} \right)$$

$$y'(1,1) = -\frac{1}{1^2} = -1$$

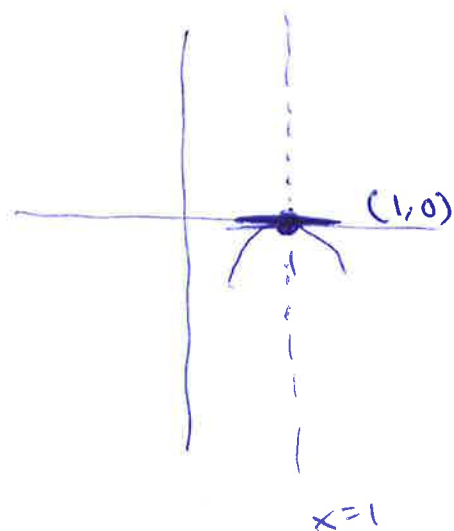


$$f(x) = 1/x = x^{-1}$$

$$f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$$

Ek: $x^2 y^3 (x+y) - xy = 0 \rightarrow$ eksplisitt form?
 implisitt form $y = f(x)$



x=1: $y^3(1+y) - y = 0$
 $y^4 + y^3 - y = 0$
 $y \cdot (y^3 + y^2 - 1) = 0$
 $y=0$ er en løsning.

Implisitt derivasjon:

$$(y^3)' = (y(x)^3)'$$

$$= 3y^2 \cdot y'$$

kjerneregelen

$$x^2 y^3 (x+y) - xy = 0$$

$$(x^2 y^3 (x+y))' - (xy)' = 0'$$

$$(x^3 y^3 + x^2 y^4)' - (xy)' = 0$$

$$3x^2 \cdot y^3 + \underline{x^3 \cdot 3y^2 \cdot y'} + 2x \cdot y^4 + \underline{x^2 \cdot 4y^3 \cdot y'} - (1 \cdot y + x \cdot y') = 0$$

$$x^3 \cdot 3y^2 \cdot y' + x^2 \cdot 4y^3 \cdot y' - xy' =$$

$$-3x^2 y^3 - 2xy^4 + y$$

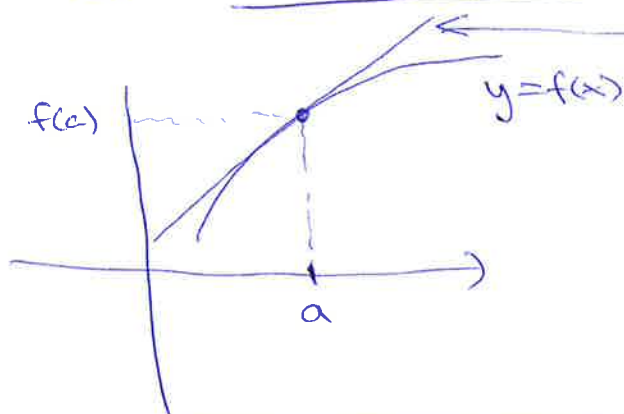
$(x,y) = (1,0):$

$$y'(1,0) = \frac{0}{-1} = \underline{\underline{0}}$$

$$(3x^3 y^2 + 4x^2 y^3 - x) y' = y - 3x^2 y^3 - 2xy^4$$

$$y' = \frac{y - 3x^2 y^3 - 2xy^4}{3x^3 y^2 + 4x^2 y^3 - x}$$

③ Tangentlinjer



Tangentlinjen til $y=f(x)$
i $x=a$:

Går gjennom

$$(x_0, y_0) = (a, f(a))$$

og har stigningstall

$$f'(a)$$

Likningen for tangenten:

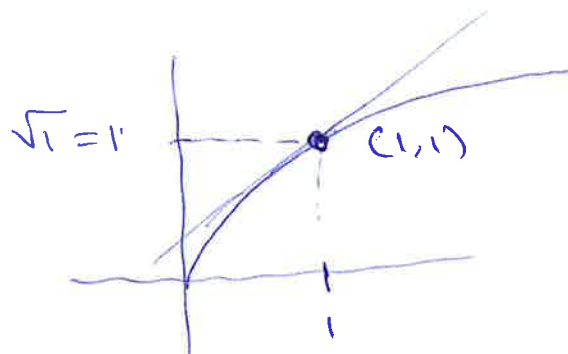
$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

husk!

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$$

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

Ex: $f(x) = \sqrt{x}$ i $x=1$:



$$y - 1 = \frac{1}{2} \cdot (x - 1)$$

$$y = 1 + \frac{1}{2}(x - 1) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

Stigningstallet til tangenten

i $x=1$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

②

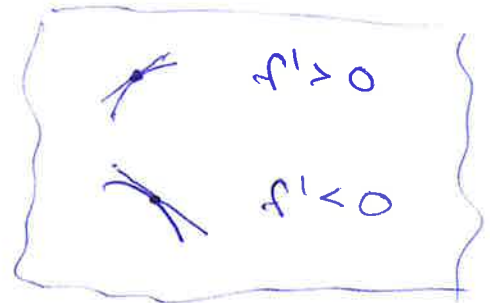
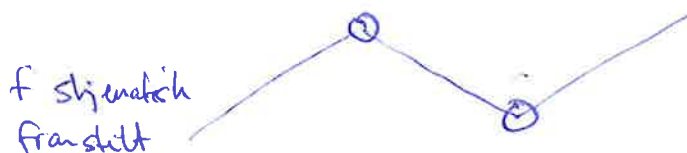
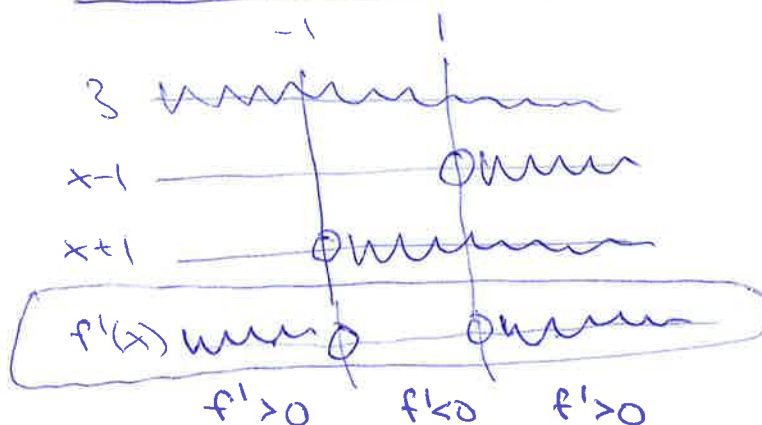
FunksjonsdrøfterMonotoniegenskapernår er f voksende / avtagendeOptimeringmaks / min av f Ex.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

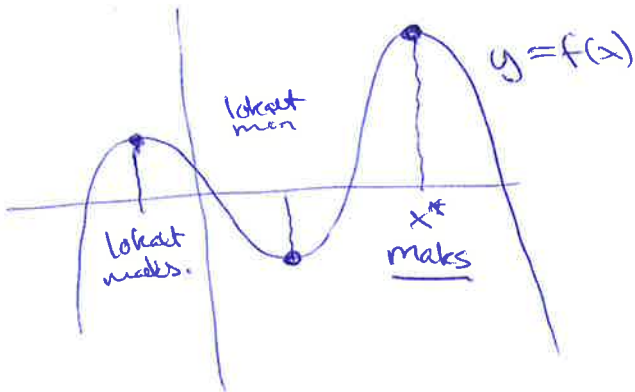
$$= 3 \cdot (x^2 - 1)$$

$$= 3 \cdot (x-1)(x+1)$$

Fortegnsdiagram: $f'(x)$  f skjematisk
framstiltKonklusjon: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

f vokser : $(-\infty, -1]$ og $[1, \infty)$
 f avtar : $[-1, 1]$

Viser også at f har lokalt maks-punkt $x = -1$
 lokalt min-punkt $x = 1$

Maks/min - optimeris

ikke noe min i
eksempel

a) maks/min = globale maks/min
→ det er dette vi ønsker å finne

b) lokale maks/min
→ det er dette vi finner ut fra $f'(x)$

Defn:

$x = x^*$ er maksimumspunkt
for f hvis $f(x^*) \geq f(x)$
for alle $x \in D_f$.

$x = x^*$ er minimumspunkt
for f hvis $f(x^*) \leq f(x)$
for alle $x \in D_f$

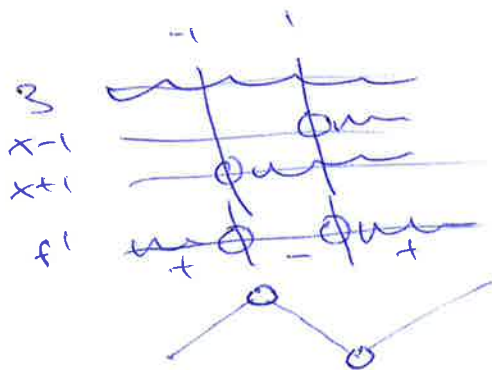
$x = x^*$ er lokal maksimumspunkt hvis $f(x^*) \geq f(x)$
for alle x i nærheten av x^* .

$x = x^*$ er lokal minimumspunkt
hvis $f(x^*) \leq f(x)$ for
alle x i nærheten av x^* .

Exo:

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$



$x = -1$: lokalt maks

$x = 1$: lokalt min

Defn: Et stasjonært punkt for f er et punkt der $f'(x) = 0$.

Ex: $f(x) = x^3 - 3x + 2$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$

$3(x+1)(x-1) = 0$

$x = 1, x = -1$

← Førstekords-
betegnelsen: $f'(x) = 0$

Stasjonære pkt for f : $x = 1, x = -1$

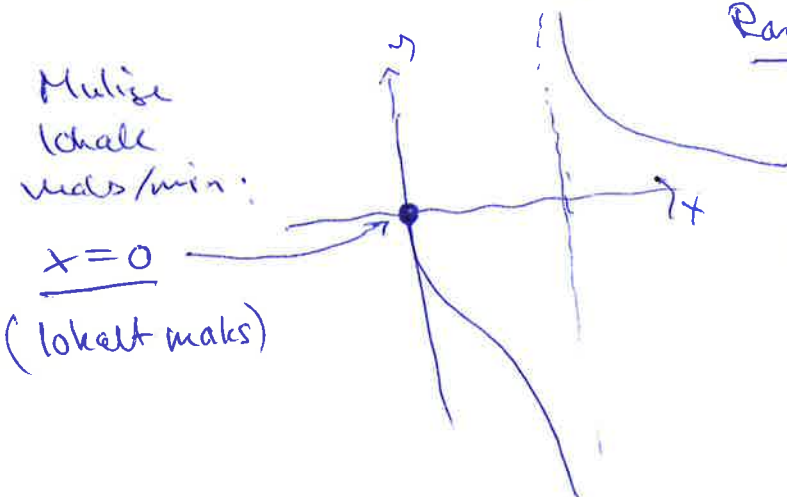
Resultat:

Hvis $x = x^*$ er et lokalt maks/min for f ,
så er punktet enten

- i) stasjonært punkt $f'(x) = 0$
- ii) punkt der $f'(x)$ ikke eksisterer
- iii) randpunkt

Ex: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$, $D_f = [0, 1) \cup (1, \infty)$

Randpunkt: $x = 0$



Punkt der $f'(x)$ ikke eksisterer

$x = 0$

$f'(x) = \frac{-(x+1)}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$

Ingen stasjonære pkt: $f'(x) = 0$

④ Funktioner som ikke er deriverbare overalt

Selv om en funktion er defineret i $x=a$, så er det ikke sikkert at $f'(a)$ er defineret. Det er altså ikke sikkert at grænseverdien

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

eksisterer. For eksempel brdi

- i) grænseverdien er $\pm\infty$
- ii) de to ensidige grænseverdier er forskellige

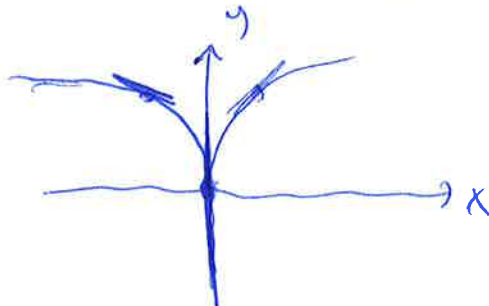
Ekso:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \sqrt[3]{x^2} \quad D_f = \mathbb{R} \\ &= x^{2/3} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{-1/3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{1/3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, \quad x \neq 0$$

f er deriverbar for $x \neq 0$, med $f' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

Hva med $x=0$? $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \pm\infty$



Tangenten i $x=0$ er y -aksen, dvs

$$\underline{x=0}$$

f er ikke deriverbar
i $x=0$

