

FORELESNING 14

EIVIND EIKRSEN

NOV 18, 2016

MET 1180

MATEMATIKK

Plan:

- ① Repetisjon: Konvekse/konkave funksjoner, andredrivert-testen
- ② L'Hopitals regel
- ③ Elastisitet og økonomiske anvendelser

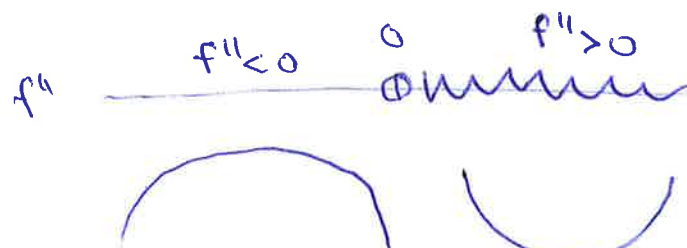
Periode:

[ES 4.8-4.9]

① Repetisjon:

f konveks på $[a,b]$ $\iff f''(x) \geq 0$ for $x \in (a,b)$
 f konkav $\iff f''(x) \leq 0$

Ek: $f(x) = x^3 + 2$
 $f'(x) = 3x^2$
 $f''(x) = 6x$



konkav : $(-\infty, 0]$
konveks : $[0, \infty)$

konkav

konveks

Vendepunkt: x s.d. $f''(x)$ skifter fortegn.

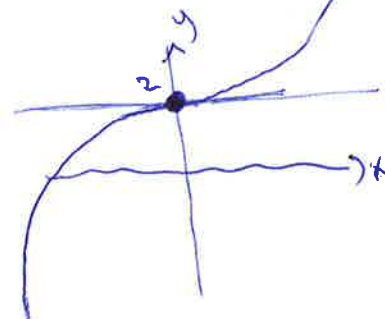
$f(x) = x^3 + 2$: $x=0$ vendepunkt

Vendetangent = tangent i vendepunkt

$f(x) = x^3 + 2$

$x=0$ vendepunkt

$x=0$
 $y = f(0) = 2$
 $a = f'(0) = 0$



Vendetangent i vendepunkt $x = x_0$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$y = 2 + 0 \cdot (x - 0)$$

$$\underline{\underline{y = 2}}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 2 \\ f'(x_0) = 0 \end{cases}$$

f er konveks $\iff f''(x) \geq 0$ for alle x i D_f

f er konkav $\iff f''(x) \leq 0$ — " —

Ex: $f(x) = x^3 + 2$ f er ikke konveks
 $f'(x) = 3x^2$ " ikke konkav
 $f''(x) = 6x$

Ex: $f(x) = 3x^2 + 4$
 $f'(x) = 6x$
 $f''(x) = 6 \geq 0$ for alle $x \Rightarrow f$ konveks

Ex: $f(x) = 1 - e^{2x}$
 $f'(x) = -e^{2x} \cdot 2 = -2e^{2x}$
 $f''(x) = -2e^{2x} \cdot 2 = -4e^{2x} \leq 0$ for alle $x \Rightarrow f$ konkav

Resultat:

Hvis f er konveks, så er ethvert stoppunkt
pkt et globalt min.



Hvis f er konkav, så er ethvert
stoppunkt pkt et globalt maks.

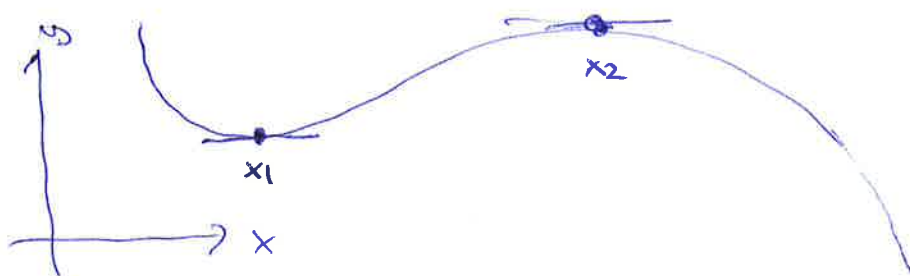


Andrederivert-testen:

Hvis x^* er et stoppunkt for f , så har vi:

$f''(x^*) > 0$: x^* lokalt min

$f''(x^*) < 0$: x^* lokalt maks



$f''(x_1) > 0$: lokalt min x_1

$f''(x_2) < 0$: lokalt maks

Ex: $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$f''(x) = 6x - 6 = 6 \cdot (x - 1)$$

$$f''(x_1) = 6 \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{3} - 1 \right) = \frac{6\sqrt{6}}{3} > 0$$

$$f''(x_2) = 6 \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3} - 1 \right) = -\frac{6\sqrt{6}}{3} < 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{6}$$

$$= 1 \pm \frac{\sqrt{24}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{4 \cdot 6}}{6}$$

$$= 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$x_1 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \quad x_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$$

lokalt min lokalt maks

② L'Hopitals regel: Metode for å regne ut kompliserte grenseverdier uha derivasjon $\rightarrow$ ubestemte "0/0" uttrykk "∞/∞"

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2 \cdot 1}{1+1} = \underline{\underline{1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2}{0} = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{2x} = \frac{0}{2} = \underline{\underline{0}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{x^2-1} = \frac{0}{0}$$

"

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \cdot \cancel{(x-1)}}{(x+1) \cdot \cancel{(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x+1} = \frac{2}{2} = \underline{\underline{1}}$$

Ubestemte uttrykk

" $\frac{0}{0}$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ "

Ex: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = ?$ " $\frac{0}{0}$ "

L'Hôpital's regel:

Hvis $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ er ubestemt av formen " $\frac{0}{0}$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ ",

Så er

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

hvis den siste grenseverdien eksisterer.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

Ekso: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{1} = \underline{\underline{-1}}$

$\parallel$
 $\frac{0}{1} = \underline{\underline{0}}$

kan ikke bruke L'Hôpital regel
siden $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x}$ ikke er ubestemt
 $\frac{0}{1}$

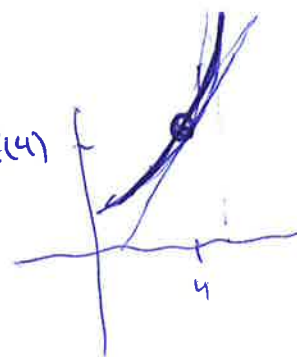
③ Elastisitet:

Ekso: $f(x) = 400 - 2x + x^2$

$f'(x) = -2 + 2x$

$x=4$: $f'(4) = -2 + 8 = \underline{\underline{6}}$

$408 = f(4)$



om vi øker x med 1 enhet,
vil $f(x)$ øke med ca $1 \cdot 6 = 6$ enheter

Hva om vi øker x med 10%?

relativ øke av x : $\frac{\Delta x}{x}$

relativ øke av $y = f(x)$: $\frac{\Delta y}{y}$

$f' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$x \cdot \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \frac{x \cdot \Delta y}{y \cdot \Delta x} = \frac{x}{f(x)} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Elastisitet:

$\varepsilon = El_x f(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$

$$\underline{x=4}$$

$$f(x) = 408$$

$$f'(4) = 6$$

$$f(x) = 400 - 2x + x^2$$

$$f'(x) = -2 + 2x$$

$$\underline{x=4}: \quad \frac{\Delta x}{x} = 1\% \Rightarrow \Delta x = 0,04 \quad x + \Delta x = 4,04$$

$$\Delta y \approx \Delta x \cdot f' = 0,04 \cdot 6 = 0,24$$

$$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{0,24}{408} = 0,000588 = \underline{\underline{0,058\%}}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x}{400 - 2x + x^2} \cdot (-2 + 2x) \\ &= \frac{-2x + 2x^2}{400 - 2x + x^2} \end{aligned}$$

$$\underline{x=4}: \quad \varepsilon = \frac{-8 + 32}{408} = \frac{24}{408} = \underline{\underline{0,058\%}}$$

Tolkning: en økning i x på 1% $\rightarrow$ økning i y på 1% $\cdot \varepsilon$
" " " "
0,058%

Priselastisitet: $x = D(p) \rightarrow E(p) D(p)$

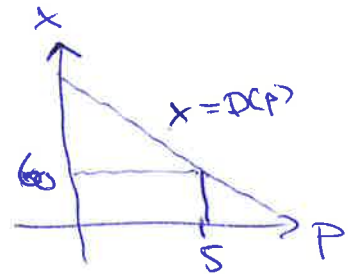
$$\varepsilon = E(p) D(p) = \frac{p}{D(p)} \cdot D'(p)$$

Hvis prisen øker med 1%, så vil
forbruket øke med
i etterspørselen
være $\varepsilon \cdot 1\%$

$\varepsilon = -1$: ~~Etter~~ Om prisen øker med 1%, vil
etterspørselen gå ned med 1%

Ex: $D(p) = 100 - 8p$

$D'(p) = -8$



$$\varepsilon = \frac{p}{D(p)} \cdot D'(p) = \frac{p}{100 - 8p} \cdot (-8)$$

$$= \frac{-8p}{100 - 8p}$$

$p = 5$:

$$D(5) = 100 - 8 \cdot 5 = 60$$

$$\varepsilon = \frac{-8 \cdot 5}{100 - 8 \cdot 5} = \frac{-40}{60} = -\frac{2}{3}$$

pris øker med 1% $\rightarrow$ ettersp. øker med 0.67%

$I = p \cdot D(p)$:

$$I'(p) = 1 \cdot D(p) + p \cdot D'(p) = \underline{D(p) + p \cdot D'(p)}$$

$$El_p I(p) = \frac{p}{I(p)} \cdot I'(p)$$

$$= \frac{p \cdot (D(p) + p D'(p))}{p \cdot D(p)}$$

$$= \frac{p D(p) + p^2 D'(p)}{p D(p)}$$

$$= 1 + \frac{p \cdot D'(p)}{D(p)} = 1 + El_p D(p)$$

$$= \underline{1 + \varepsilon}$$

$\varepsilon > -1$: $El_p I(p) > 0$
(u elastisk) $\frac{1}{1 + \varepsilon}$

$\varepsilon < -1$: $El_p I(p) < 0$
(elastisk) $\frac{1}{1 + \varepsilon}$

$\varepsilon = -1$: $El_p I(p) = 0$
 $\frac{1}{1 + \varepsilon}$

④ Grense inntekt og grensekostnad

$I(x)$: inntektsfun.
 $K(x)$: kostnadsfun.

}

$$\pi(x) = I(x) - K(x)$$

Grense inntekt: $I'(x)$
 (marginal inntekt)

økn. i inntekt ved å
 produsere en elstrekke enhet.

Grense Kostnad = marginal kostnad: $K'(x)$

økn. i kost.
 ved å prod.
 en elstrekke
 enhet

$$I(x) = x \cdot (100 - 2x) = 100x - 2x^2$$

$$I'(x) = \underline{100 - 4x}$$

$$x=20$$

$$I'(20) = \underline{20}$$

$$K(x) = 10.000 + x \cdot (40 - x) = 10.000 + 40x - x^2$$

$$K'(x) = 40 - 2x$$

$$x=20$$

$$K'(20) = \underline{0}$$

Maks. profit:

$$\pi(x) = I(x) - K(x)$$

$$\pi'(x) = 0$$

$$I'(x) - K'(x) = 0$$

$$\underline{I'(x) = K'(x)}$$

Grense inntekt =
grensekostnad

Es.

$$I'(x) = 100 - 4x$$

$$K'(x) = 40 - 2x$$

$$100 - 4x = 40 - 2x$$

$$100 - 40 = 4x - 2x$$

$$60 = 2x$$

$$x = \underline{\underline{30}}$$

Enhetskostnad: $A(x) = \frac{K(x)}{x}$ kostnad/enhet

Kostnads optimum: $\boxed{\text{minimum } A(x)}$

$$A'(x) = \left(\frac{K(x)}{x} \right)' = \frac{(K'(x) \cdot x - K(x) \cdot 1) \cdot \frac{1}{x}}{x^2} = \frac{K'(x) - \frac{K(x)}{x}}{x}$$

$$= \frac{K'(x) - \frac{K(x)}{x}}{x} = \frac{K'(x) - A(x)}{x} = 0$$

$$\boxed{K'(x) = A(x)}$$

grensekostnad = enhetskostnad

Ex: $K(x) = 10.000 + 40x - x^2$, $x \in [0, 20]$

$K'(x) = 40 - 2x$ grensekostnad

$A(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{10.000 + 40x - x^2}{x}$

$= \frac{10.000}{x} + 40 - x$ enhetskostnad

$x=20$: $K'(20) = 0$

$A(20) = \frac{10.000}{20} + 40 - 20 = 500 + 20 = \underline{520}$

Grensekost = Enhetskost:

~~$40 - 2x$~~ $= \frac{10.000}{x} + 40 - x$

$-x = \frac{10.000}{x}$

$-x^2 = 10.000$
ingen løsn.

Normalt antas det at $K(x)$ tilfredsstiller kravene

- i) $K(x)$ er voksende
- ii) $K(x)$ er konveks

Følgelig $K(x) = 10.000 + 40x - x^2$ er voksende for $x \leq 20$
og ikke konveks (men konkav).

Et bedre eksempel:

$$K(x) = 10.000 + x \cdot (40 + x) \\ = \underline{10.000 + 40x + x^2}$$

$$K'(x) = 40 + 2x > 0 \quad \text{for } x \geq 0$$

$$K''(x) = 2 > 0$$

- i) voksende
- ii) konveks

Da får vi:

$$K' = 40 + 2x \quad \text{grensekost.}$$

$$A = \frac{10000 + 40x + x^2}{x} = \frac{10000}{x} + 40 + x \quad \text{enhetskost.}$$

$$\underline{K' = A}: \quad 40 + 2x = \frac{10000}{x} + 40 + x$$

$$2x - x = \frac{10.000}{x}$$

$$x^2 = 10.000$$

$$\underline{x = 100}$$

$$K'(100) = 240$$

$$A(100) = 240$$

grensekost =
enhetskost

~~10000~~