

FORELESNING 16

Eivind Eiriksen

JAN 10 2017

MET1180

MATEMATIKK

Plan for vårsemesteret

- (A) Integrasjon [E] Kap 5
- (B) Lineære likningssystemer og matriser [E] Kap 6
- (C) Funksjoner i flere variable [E] Kap 7

Eksamen

MET11803 : Skriftlig avsluttende eksamen (5L.) 30/05/17

MET11801 : Kontrollprøve	Frst 16/03/17	} Kontinuasjon fra høstsemesteret
MET11802 : Flervalgs eksamen	12/05/17	

Kontortid: tirsdag 12-14

Oppgaveregning: ?

Plan:

- ① Antiderivasjon og integrasjon
- ② Grunnleggende integrasjonsregler
- ③ Substitusjon

Pensum:

[E] S.1-S.3

① Antiderivasjon og integrasjon:

Eks: $f'(x) = 2x$ ← hvilke funksjoner $f(x)$ oppfyller denne likningen?

$f(x) = x^2$ er en løsning (antiderivert)
hvilke andre løsninger finnes?

① $f(x) = x^2 + C$ er også løsning
når C er konstant

Sjekk:

$$f'(x) = 2x + u'(x) = 2x$$

$$2x + u'(x) = 2x$$

$$u'(x) = 0$$

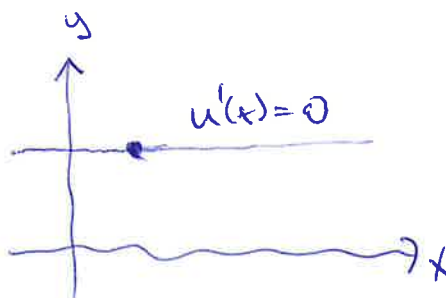
de eneste funksjonene med
derivert lik 0 er
konstante funksjoner

⇔

$$u(x) = C$$

② $f(x) = x^2 + u(x)$ er dette en løsn.
for noen andre
fun. enn $u(x) = C$?

Nei!



② Grunnleggende integrasjonsregler

$$\int 12x^3 + 2 \, dx = \underline{\underline{3x^4 + 2x + C}}$$

Sjekk: $(3x^4 + 2x)' = 3 \cdot 4x^3 + 2 = \underline{12x^3 + 2}$

Integrasjonsregler:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \int u(x) + v(x) \, dx &= \int u(x) \, dx + \int v(x) \, dx \\ \int u(x) - v(x) \, dx &= \int u(x) \, dx - \int v(x) \, dx \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \int c \cdot u(x) \, dx = c \cdot \int u(x) \, dx$$

Ekse: $\int 3x^2 + 2x \, dx = \int 3x^2 \, dx + \int 2x \, dx$

$$\begin{aligned} &\int 3x^2 \, dx + \int 2x \, dx \\ &\quad \quad \quad \parallel \\ &= \underline{\underline{x^3 + x^2 + C}} \end{aligned}$$

$$3 \int x^2 \, dx + 2 \int x \, dx$$

$$= x^3 + C_1 + x^2 + C_2 \quad \uparrow$$

$C = C_1 + C_2$

$$\textcircled{3} \quad \int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C \quad \text{for alle } n \neq -1$$

Sjekk: $\left(\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} \right)' = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^n = x^n$

Ekse:

$$\int x^3 + 7x^2 - x + 1 \, dx$$

$$= \int x^3 dx + \int 7x^2 dx - \int x dx + \int 1 dx$$

$$= \int x^3 dx + 7 \cdot \int x^2 dx - \int x dx + \int 1 dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + 7 \cdot \left(\frac{1}{3}x^3\right) - \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

Husk:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$$

$n \neq -1$

$$\int x^3 + 7x^2 - x + 1 \, dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

Ekse:

$$\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{1/2} \, dx = \frac{1}{3/2} \cdot x^{3/2} + C$$

$$\frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

Ekse:

1) $\int 12x^5 + 4x^4 + 3x \, dx = 12 \cdot \frac{1}{6}x^6 + 4 \cdot \frac{1}{5}x^5 + 3 \cdot \frac{1}{2}x^2 + C$

2) $\int x\sqrt{x} \, dx = \int x^{3/2} \, dx = \frac{2}{5}x^{5/2} + C = \frac{2}{5}x^2 \cdot \sqrt{x} + C$

3) $\int \frac{1}{x^2} \, dx = \int x^{-2} \, dx$

$$= \frac{1}{-1}x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

Derivasjonsregler:

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n x^{n-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln(a)}$

$$\int n x^{n-1} dx = x^n + C$$

$\Leftrightarrow$

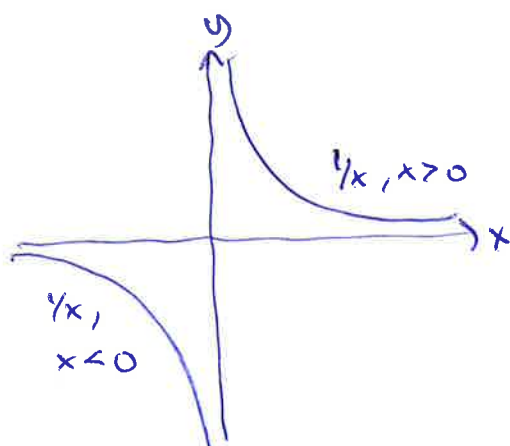
$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

④ $\int e^x dx = e^x + C$

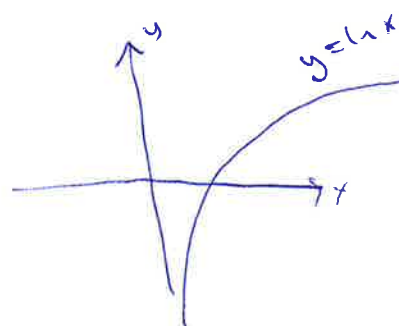
$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln(a)} a^x + C$$

⑤ $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

← $\int x^n dx$ for $n=-1$

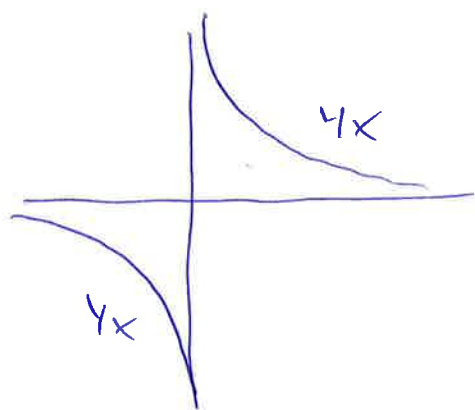


$x > 0$: $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
fordi $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ og
 $\ln x$ er definert
for $x > 0$

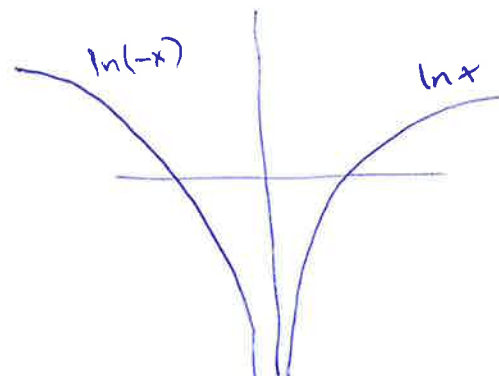


$x < 0$: $F(x)$ slik at $F'(x) = 1/x$ når $x < 0$

$$F(x) = \ln(-x) : F'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$$



integrasjon



$$\int \frac{1}{x} dx = \left\{ \begin{array}{ll} \ln(x) + C, & x > 0 \\ \ln(-x) + C, & x < 0 \end{array} \right\} = \underline{\underline{\ln|x| + C}}$$

Eks: $\int \ln x dx \rightarrow$ kan løses via delvis integrasjon

$\int e^{x^2} dx \rightarrow$ det finnes en antiderivert, men den kan ikke uttrykkes via "vanlige funksjoner"

Resultat: Hvis $f(x)$ er en kontinuerlig funksjon, så finnes en antiderivert $F(x)$ av $f(x)$

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Taylor-rekker: } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \\ e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} + \dots \\ \int e^{x^2} dx = \int \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} + \dots \right) dx \\ = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + \dots + C \end{array} \right)$$

Integrasjonsteknikker:

- Substitusjon
- Delvis integrasjon
- Delbrøksoppspaltnings

③ Substitusjon

Ex: $\int \frac{1}{x-1} dx = ?$

Husk: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$$(\ln(ax+b))' = \frac{1}{ax+b} \cdot a = \underline{\frac{1}{ax+b} \cdot a}$$

$$(\ln(x-1))' = \frac{1}{x-1} \cdot 1$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(ax+b) + C$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x-1} dx &= \frac{1}{1} \cdot \ln|x-1| + C \\ &= \ln|x-1| + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x-1} dx = \int \frac{1}{u} dx = \int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= x-1 \\ du &= u' \cdot dx \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} u' &= 1 \\ dx &= \frac{du}{u'} = \frac{du}{1} \end{aligned}$$

$$= \int \frac{1}{u} \cdot du = \ln|u| + C = \underline{\underline{\ln|x-1| + C}}$$

Ek: $\int \sqrt{1-x} dx = \int \sqrt{u} \cdot \frac{du}{-1}$

$$\begin{array}{l} u = 1-x \\ du = u' \cdot dx \\ \quad = -1 \cdot dx \end{array} \rightarrow dx = \frac{du}{-1}$$

$$\begin{aligned} &= \int -\sqrt{u} du = - \int \sqrt{u} du = - \int u^{1/2} du \\ &= - \frac{2}{3} \cdot u^{3/2} + C = \underline{\underline{- \frac{2}{3} (1-x)^{3/2} + C}} \end{aligned}$$

Substitusjon: * velg substitusjon $u = \dots$ (uttrykk i x)
* bytt ut $f(x)$ med uttrykk i u og
Substitusjonen, og dx med du og

$$du = u' \cdot dx$$

* les integralet i u , og skriv svaret
og x ved å bruke substitusjonen