BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

FORELESNING 17

MET1180
MATEMATIKK

EIVIND ERIKSEN JAN 17, 2017

Plan:

1. Substitusjon
2. Delvis integrasjon
3. Delbrøksoppspaltning

Pensum:

[EJ] 5.3-5.5

Oppgaveregning: Tirsdag 1100-1300 C2-065
starter i dag (17/01).

Repetisjon:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \iff F'(x) = f(x)$$

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\left.\begin{aligned} \int u \pm v\,dx &= \int u\,dx \pm \int v\,dx \\ \int c\cdot u\,dx &= c\cdot \int u\,dx \end{aligned}\right\}$$

u, v: vilkårlige uttrykk
c: konstant

(i) **Substitusjon:** Brukes for å integrere sammensatte funksjoner med kjerne $u = u(x)$

Eks:

$$\int e^{1-2x}\,dx = \int e^u\,dx = \int e^u \cdot \frac{du}{-2}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= 1-2x \\ du &= u' \cdot dx \\ du &= (-2)\cdot dx \end{aligned}\right\} \quad dx = \frac{du}{-2}$$

$$= \int -\frac{1}{2}e^u\,du = -\frac{1}{2}\int e^u\,du = -\frac{1}{2}e^u + C$$

$$= -\frac{1}{2}e^{1-2x} + C$$

$$\left(e^{1-2x}\right)' = e^{1-2x}\cdot(-2)$$

$$\left(\frac{1}{-2}\cdot e^{1-2x}\right)' = \frac{1}{\cancel{-2}}\cdot e^{1-2x}\cdot\cancel{(-2)} = e^{1-2x}$$

Framgangsmåte:

i) Velger en kjerne $u = \ldots$ (uttrykk i x)

ii) Bruk $\boxed{du = u' \cdot dx}$ til å skrive om integralet på formen $\int \underbrace{\ldots}_{\text{uttrykk i } u} du$

iii) Løs integralet i u, og skriv svaret om som en funksjon i x.

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

Eks:

$$\int \frac{12}{2-3x}\,dx = \int \frac{12}{u}\cdot\frac{du}{-3} = \int -4\,\frac{1}{u}\,du$$

$du = u'\,dx \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} u &= 2-3x \\ du &= (-3)\cdot dx \end{aligned}}$

$$\frac{du}{u} = \frac{1}{u}\cdot du$$

$$= -4\int \frac{1}{u}\,du = -4\ln|u| + C = -4\ln|2-3x| + C$$

Eks:

$$\int x\ln(x^2+1)\,dx \neq \int x\,dx \cdot \int \ln(x^2+1)\,dx$$

Substitusjon:

$$\int x\cdot\ln(x^2+1)\,dx = \int x\cdot\ln(u)\cdot\frac{du}{2x}$$

$\boxed{\begin{aligned} u &= x^2+1 \\ du &= 2x\,dx \end{aligned}}$

$$= \int \frac{\cancel{x}\cdot\ln(u)}{2\cancel{x}}\,du = \frac{1}{2}\int \ln(u)\,du$$

løses vha delvis integrasjon, kommer tilbake til det i neste time

Delvis integrasjon:
$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$

$$\frac{1}{2}\left(u\ln(u) - u\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}u\ln(u) - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}(x^2+1)\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}(x^2+1) + C$$

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

Eks:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{2x}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = x^2+3 \\ du = 2x \cdot dx \end{array}}$$

$$= \int \frac{\cancel{x}}{\sqrt{u}\cdot 2\cancel{x}}\,du = \int \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \sqrt{u} + C$$

Alt. I

Alt. 2

$$\int \frac{1}{2}\cdot u^{-1/2}\,du = \frac{1}{2}\,\frac{u^{1/2}}{1/2} + C$$

potensregel

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

med $n = -1/2$

$$= \frac{u^{1/2}}{1} + C = \sqrt{u} + C$$

$$= \sqrt{x^2+3} + C$$

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

Eks:

$$\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{x}{u}\cdot 2\sqrt{x}\,du$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 1+\sqrt{x} \\ du &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \end{aligned}}$$

$\rightarrow \sqrt{x} = u-1,\ x=(u-1)^2$

$\leftrightarrow \quad dx = 2\sqrt{x}\cdot du$

$$= \int \frac{2x\sqrt{x}}{u}\,du = \int \frac{2\cdot(u-1)^2\cdot(u-1)}{u}\,du$$

$$= 2\int \frac{(u-1)^3}{u}\,du = 2\cdot\int \frac{u^3-3u^2+3u-1}{u}\,du$$

$$= 2\int u^2-3u+3-\frac{1}{u}\,du$$

$$= 2\left(\tfrac{1}{3}u^3-3\cdot\tfrac{1}{2}u^2+3\cdot u-\ln|u|\right)+C$$

$$= \frac{2}{3}u^3-3u^2+6u-2\ln|u|+C$$

$$= \frac{2}{3}(1+\sqrt{x})^3-3(1+\sqrt{x})^2+6\cdot(1+\sqrt{x})$$
$$-2\ln(1+\sqrt{x})+C$$

Binomial formelen:

$(a+b)^n = a^n + n\cdot a^{n-1}b$
$+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots$
$\ldots + b^n$

$(u-1)^3 = u^3-3u^2+3u-1$

$a=u,\ b=-1,\ n=3$

$$= \frac{2}{3}(1+\sqrt{x})^3-3(1+\sqrt{x})^2+6(1+\sqrt{x})-2\ln(1+\sqrt{x})+C$$

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

2 Delvis integrasjon:

Brukes for å integrere produkt

$$\int u' \cdot v \, dx = uv - \int u \cdot v' \, dx$$

$$\cancel{\int u \cdot v' \, dx = uv - \int u' v \, dx}$$

(samme som over med u og v byttet om)

Eks: $\int \underbrace{x}_{u'} \cdot \underbrace{\ln x}_{v} \, dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \frac{1}{2}x^2 & v = \ln x \\ u' = x & v' = 1/x \end{array}}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \int \frac{1}{2}x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x^2 + C = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C}}$$

$\int \underbrace{x}_{v} \cdot \underbrace{\ln x}_{u'} \, dx =$ vanskelig

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = ? & v = x \\ u' = \ln x & v' = 1 \end{array}}$$

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

Eks: $\int \ln x \, dx = \int \underset{u'}{1} \cdot \underset{v}{\ln x} \, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx$

$$\boxed{\begin{matrix} u = x & v = \ln x \\ u' = 1 & v' = 1/x \end{matrix}}$$

$= x \cdot \ln x - \int 1 \, dx = \underline{x \ln x - x + C}$

$$\boxed{\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C}$$

$(x \cdot \ln x - x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1$
$= \ln x + 1 - 1 = \ln x$

Husk: - substitusjon: $du = u' \cdot dx$
brukes for å integrere sammensatte funksjoner

- delvis integrasjon: $\int u' v \, dx = uv - \int u v' \, dx$
brukes til å integrere produkter

$(uv)' = u'v + uv'$

$uv = \underline{\int u' v \, dx} + \int u v' \, dx$

$\int u' v \, dx = uv - \int u v' \, dx$

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

Eks:

$$\int x\cdot e^x\,dx = \cancel{\tfrac{1}{2}x^2\cdot e^x - \int \tfrac{1}{2}x^2\cdot e^x\,dx}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \cancel{\tfrac{1}{2}x^2}\ e^x & v = \cancel{e^x}\ x \\ u' = \cancel{x}\ e^x & v' = \cancel{e^x}\ 1 \end{array}}$$

$$\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$$

$$= e^x\cdot x - \int e^x\cdot 1\,dx$$

$$= xe^x - \int e^x\,dx = \underline{\underline{xe^x - e^x + C}}$$

Eks:

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = e^x & v = x^2 \\ u' = e^x & v' = 2x \end{array}}$$

$$= x^2e^x - 2\underbrace{(xe^x - e^x)}_{\int xe^x\,dx} + C$$

$$= \underline{x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C}$$

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \frac{1}{x}\cdot \ln x \; dx$$

Alt I

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & v = \ln x \\ u' = 1/x & v' = 1/x \end{array}}$$

$$= \ln x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x}\cdot \ln x \; dx$$

$$\Downarrow$$

$$\int \frac{1}{x}\ln x\,dx = (\ln x)^2 - \int \frac{1}{x}\ln x\,dx$$

$$2\cdot \int \frac{1}{x}\ln x\,dx = (\ln x)^2 + C$$

$$\int \frac{1}{x}\ln x\,dx = \underline{\underline{\frac{(\ln x)^2}{2} + C}}$$

$$\int \frac{1}{x}\ln x\,dx \underset{\text{Alt 2}}{=} \int \frac{1}{x}\cdot u \cdot du \cdot x = \int \frac{u\cdot \cancel{x}}{\cancel{x}}\,du$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}\,dx \end{array}}$$

$$= \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C = \underline{\underline{\frac{1}{2}\cdot(\ln x)^2 + C}}$$

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

3 Delbrøksoppspalting:

brukes for å integrere rasjonale funksjoner

$$\int \frac{2}{x^2-4}\,dx = ?$$

$$\int \frac{2}{x-4}\,dx = \int \frac{2}{u}\,du = 2\cdot\int \frac{1}{u}\,du = 2\ln|u|+C$$

$$= 2\ln|x-4|+C$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= x-4 \\ du &= 1\cdot dx \end{aligned}}$$

$$\int \frac{2}{x^2-4}\,dx = \int \frac{2}{u}\cdot\frac{du}{2x} = \int \frac{1}{xu}\,du$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= x^2-4 \\ du &= 2x\,dx \end{aligned}}$$

$$x^2 = u+4$$
$$x = \pm\sqrt{u+4}$$

$$= \int \frac{1}{\pm\sqrt{u+4}\cdot u}\,du \rightarrow \text{Vanskelig}$$

Vi må skrive om $\frac{2}{x^2-4}$: Delbrøksoppspalting

(1) Faktoriserer nevner: $x^2-4 = (x-2)(x+2)$

(2) Omskriving: $\frac{2}{x^2-4} = \boxed{\frac{2}{(x-2)\cdot(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}}$

Vi må finne A, B (konstanter) slik at uttrykkene er like dvs: like for alle x

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

$$\frac{2}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \quad \Big| \cdot (x-2)(x+2)$$

$$2 = \frac{A}{\cancel{(x-2)}} \cdot \cancel{(x-2)}(x+2) + \frac{B}{\cancel{(x+2)}} \cdot (x-2)\cancel{(x+2)}$$

$$2 = A \cdot (x+2) + B(x-2)$$

skal være riktig for alle x

Alt I:

$$2 = Ax + Bx + 2A - 2B$$

$$2 = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{(A+B)}}x + \underset{2}{\underset{\shortparallel}{(2A-2B)}}$$

$A + B = 0 \qquad B = -A$

$2A - 2B = 2 \qquad 2A - 2(-A) = 2$

$4A = 2$

$A = 1/2$

$B = -1/2$

Alt. 2:

$2 = A(x+2) + B(x-2)$

$x = -2$: $2 = B \cdot (-4)$

$\Rightarrow B = 2/-4 = -1/2$

$x = 2$: $2 = A \cdot 4 + 0$

$A = 2/4 = 1/2$

$$\boxed{\frac{2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1/2}{x-2} + \frac{-1/2}{x+2}}$$

$$\int \frac{2}{x^2-4}\,dx = \int \frac{1/2}{x-2} + \frac{-1/2}{x+2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln|x+2| + C$$