MET 1180, Forelesning 18, 24. jan 2017, Runar Ile

1. Rep.
2. Delbrøksoppspaltning
3. Bestemte integraler og areal [E] 5.5-5.6

---

1. Repetisjon. Delvis integrasjon

$u = u(x)$
$v = v(x)$

$$\boxed{\begin{aligned}\int u'v\,dx &= uv - \int uv'\,dx \\ \int uv'\,dx &= uv - \int u'v\,dx\end{aligned}}$$

Eks: $\int (x+1)\cdot\ln(x)\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned}\text{Setter } u &= \tfrac{1}{2}(x+1)^2 \\ u' &= x+1 \\ v &= \ln(x) \\ v' &= \tfrac{1}{x}\end{aligned}}$$

$$\left(\tfrac{1}{2}x^2+x+\tfrac{1}{2}\right)\tfrac{1}{x} = \frac{x}{2}+1+\frac{1}{2x}$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x) - \int \overbrace{\frac{1}{2}(x+1)^2\cdot\frac{1}{x}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x) - \left[\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{2}\ln|x|\right] + C$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x) - \frac{x^2}{4} - x - \frac{1}{2}\ln|x| + C.$$

---

2. Delbrøksoppspaltning

Vil finne $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ der $p(x)$ og $q(x)$ er polynomer ($\frac{p(x)}{q(x)}$ er rasjonal)

Eks: $\int \frac{2x^3}{x+1}\,dx$?

1. Bruk polynomdivisjon og få polynom + ny rasjonal funksjon hvor deg(teller) < deg(nevner)

Polynomdivisjon:

$$\begin{array}{l} 2x^3 : (x+1) = 2x^2 - 2x + 2 \\ \underline{-(2x^3+2x^2)} \\ \quad -2x^2 \\ \quad \underline{-(-2x^2-2x)} \\ \qquad 2x \\ \qquad \underline{-(2x+2)} \\ \qquad\quad -2 \end{array}$$

resten

Så $\dfrac{2x^3}{(x+1)} = 2x^2 - 2x + 2 + \dfrac{-2}{(x+1)}$

$$\int \frac{2x^3}{x+1}\,dx = \int 2x^2 - 2x + 2 + \frac{-2}{(x+1)}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 2x - 2\ln|x+1| + C$$

Generelt: $\displaystyle\int \frac{A}{ax+b}\,dx = \frac{A}{a}\ln|ax+b| + C$

Her er A, a, b konstanter.

Argument: Derivér begge ~~si~~ sider!

- Dette bruker vi hvis nevner har grad 1

Hva hvis nevner har grad 2?

Eks: $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$ $\qquad u = x^2+1$, $du = 2x\,dx$

$$= \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln(x^2+1) + C$$

– men dette var flaks!

Eks $\int \frac{2}{x^2-1}\,dx$

Hjelper ikke å sette $u = x^2-1$

$du = 2x\,dx$ osv.

Prøver å skrive

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

fordi $x^2-1 = (x+1)(x-1)$

Her A og B konstanter

$$= \frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{(A+B)x + (-A+B)}{x^2-1}$$

Da må tellerne være like som polynomer!

Dvs
$$\begin{cases} A+B = 0 \\ -A+B = 2 \end{cases}$$

$$2B = 2$$

$\underline{B=1}$ og $\underline{A=-1}$.

Så $$\int \frac{2}{x^2-1}\,dx = \int \frac{-1}{x+1}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= \underline{\underline{-\ln|x+1| + \ln|x-1| + C}}$$

Eks $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+5x+6}\,dx$

Som i forrige eks. (polynom divisjon hjelper ikke)

Må faktorisere x^2+5x+6.

Løser $x^2+5x+6=0$

får $x = \dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 6}}{2}$

så $x=-2$ el. $x=-3$

og $x^2+5x+6=(x-(-2))(x-(-3))$
$=(x+2)(x+3)$

$$\frac{x-1}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$$

$$= \frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{(A+B)x+3A+2B}{x^2+5x+6}$$

Så $\begin{cases} A+B=1 \\ 3A+2B=-1 \end{cases}$ -3

$-B=-4$

$\boxed{B=4}$

$\boxed{A=-3}$.

$$= \int \frac{-3}{x+2}\,dx + \int \frac{4}{x+3}\,dx$$

$$= -3\ln|x+2| + 4\ln|x+3| + C$$

NB: Her er de to røttene til andregradspolynomet i nevneren ulike. Da går dette bra!

Hva gjør vi hvis det er en dobbeltrot?

Eks $\int \frac{x}{x^2+6x+9}\,dx$

Løser $x^2+6x+9=0$

Får faktorisering

$x^2+6x+9=(x+3)^2$

- dobbeltrot !

Setter

$$\frac{x}{x^2+6x+9} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{A(x+3)+B}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{Ax+3A+B}{x^2+6x+9}$$

Så $\begin{cases} A = 1 \\ 3A+B = 0 \end{cases}$

Altså $\underline{A=1}$ og $\underline{B=-3}$

[NB: Kan også løses ved subst. $u=x+3$]

$$= \int \frac{1}{x+3}\,dx + \int \frac{-3}{(x+3)^2}\,dx$$

Setter $u = x+3$

$du = dx$

$$\int \frac{-3}{(x+3)^2}dx = -3\int u^{-2}\,du$$

$$= -3\cdot(-1)\,u^{-1} + C$$

$$= 3(x+3)^{-1} + C$$

$$= \ln|x+3| + \frac{3}{x+3} + C$$

Noen ganger har ikke andregradspolynomet røtter. Da kan vi ikke bruke delbrøksoppspaltning.

Eks: $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x)$.

arc tan(x) er den inverse funksjonen til $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

3. Bestemte integraler og areal

Anta $F(x)$ er en antiderivert til $f(x)$.

Setter $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ — det bestemte integralet — er et tall!

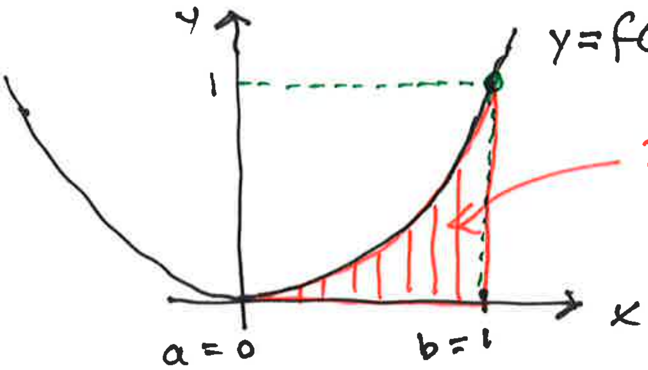
a og b er tall.

Eks: $\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + C\right]_0^1$

$= \frac{1}{3}(1)^3 + C - \left(\frac{1}{3}(0)^3 + C\right)$

$= \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$ (uavhengig av valg av C)

Vi kan tolke dette tallet som et areal (fordi $x^2 \geq 0$ for $0 \leq x \leq 1$)



$y = f(x) = x^2$

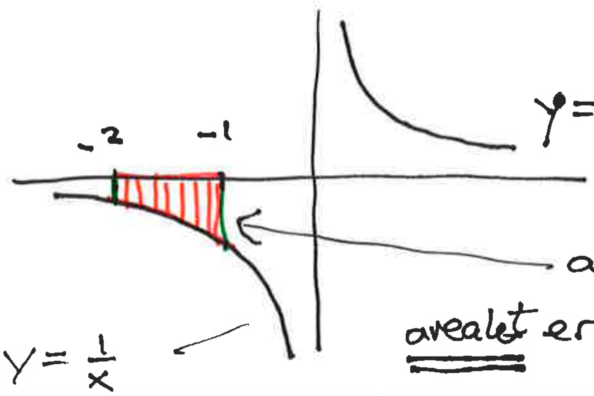
Dette arealet er $\int_0^1 x^2 dx$ $= \frac{1}{3}$

Eks: $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln|x|\right]_{-2}^{-1} = \ln|-1| - \ln|-2|$

$= \ln 1 - \ln 2 = \underline{\underline{-\ln 2}}$

$\approx -0{,}693$

— negativt!



$y = f(x) = \frac{1}{x}$

arealet er under x-aksen

<u>arealet er derfor</u> minus $-\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \underline{\underline{\ln 2}}$

Eks: $\int_{x=0}^{x=1} x \ln(x^2+1)\,dx$

Må finne $\int x\ln(x^2+1)\,dx$!

Setter $u = x^2+1$

$du = 2x\,dx$

$dx = \frac{du}{2x}$

$x=0$ gir $u=1$

$x=1$ gir $u=2$

$= \left[\frac{1}{2}(u\ln u - u)\right]_{u=1}^{u=2}$

$= \frac{1}{2}(2\ln 2 - 2)$

$\quad - \frac{1}{2}(1\ln 1 - 1)$

$= \ln 2 - 1 + \frac{1}{2}$

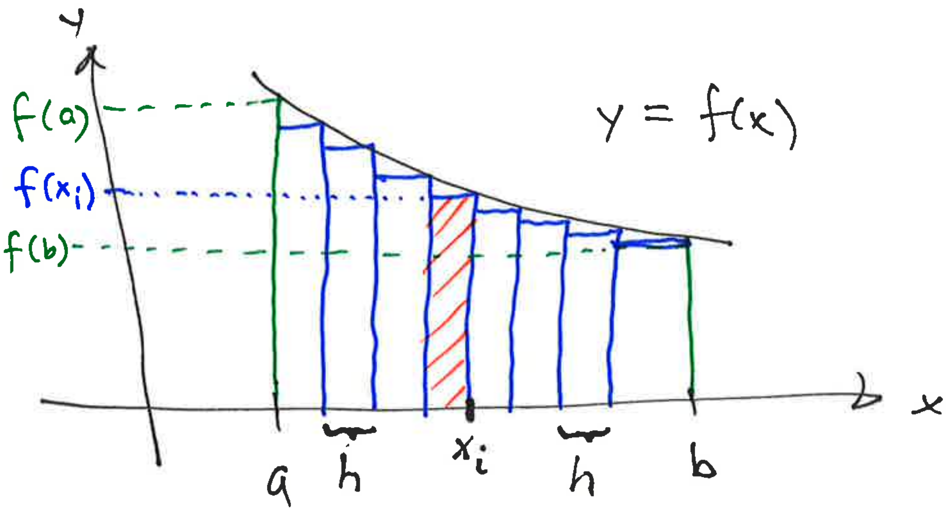
$= \ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0{,}193$ (et areal)

$\int x\ln(x^2+1)\,dx$

$= \int \ln u \cdot \frac{1}{2}\,du$

delvis int.: $= \frac{1}{2}(u\ln u - u) + C$

Arealet under en graf. – komplisert!



Arealet til et rektangel er enkelt.

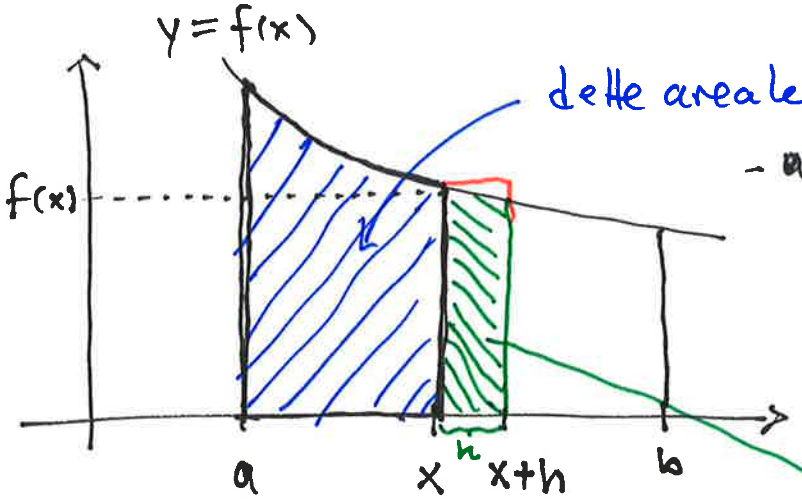
Lager en tilnærming til arealet ved å bruke mange smale rektangler og summérer.

Bredde på rektanglene: h

og høyden varierer: $f(x_i)$.

Arealet: $h \cdot f(x_i)$

Arealet under grafen $\approx h\cdot\left(f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)\right)$



dette arealet er en funksjon $A(x)$.

- arealet er begrenset av grafen til $f(x)$ og x-aksen på intervallet $[0, x]$.

areal $= A(x+h) - A(x)$
$\approx h\, f(x)$.

Påstår at $A'(x) = f(x)$. Hvorfor?

$$A'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

$$\approx \frac{h \cdot f(x)}{h} = f(x).$$

Så hvis $f(x) \geq 0$ på intervallet $[a, b]$ så er arealet under grafen til $f(x)$ og over x-aksen på dette intervallet gitt som

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[A(x)\Big]_a^b = A(b) - A(a)$$

hvor $A(x)$ er en antiderivert til $f(x)$.

Fundamentalteoremet for analysen:

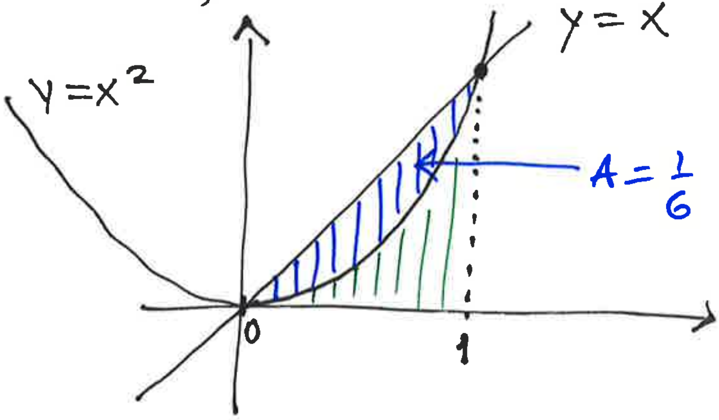
$$A'(x) = f(x)$$

($A(x)$ arealfunksjonen)

Eks: Finn arealet A av området begrenset av $\underbrace{f(x) = x}_{\text{grafen til}}$ og $\overbrace{g(x) = x^2}^{\text{grafen til}}$

Strategi:

Tar arealet under $(y=x)$-grafen og trekker fra arealet under $(y=x^2)$-grafen



$(x = x^2$ gir $x=0$ el. $x=1)$

$$A = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot 0^2 - \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}0^3\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}.$$