

FORELESNING 19

EIVIND ERIKSEN

JAN 31, 2017

MET1180

MATEMATIKK

Plan:

- ① Bestemte integral, økonomiske anvendelser
- ② Eksamen MET11803 12/2015, Oppg. 2

Referanser:

[EF] 5.6-5.7

① Bestemte integral:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = \underbrace{F(b) - F(a)}_{\text{tallverdi}} \quad \text{når } F'(x) = f(x)$$

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Ex:

$$\int_0^4 e^{1-2x} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{1-2x} + C \right]_0^4$$

$$= \left(-\frac{1}{2} e^{1-2 \cdot 4} + \cancel{C} \right) - \left(-\frac{1}{2} e^{1-2 \cdot 0} + \cancel{C} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-7} + \frac{1}{2} e = \underline{\underline{\frac{1}{2} (e - e^{-7})}}$$

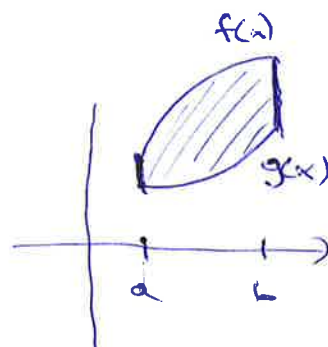
Arealberegning

Hvis $f(x), g(x)$ er kontinuerlige funksjoner på $[a, b]$, og

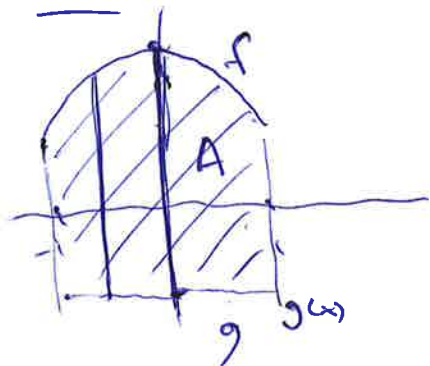
$$f(x) \geq g(x) \text{ for alle } x \text{ i } [a, b]$$

Da er arealet av området begrenset av $f(x) \geq y \geq g(x)$, $b \geq x \geq a$ gitt ved

$$A = \int_a^b f(x) - g(x) dx$$



Ekse: $f(x) = 2 - x^2$ $g(x) = -1$ i $[-1, 1]$



$$A = \int_{-1}^1 f(x) - g(x) dx = \int_{-1}^1 2 - x^2 + 1 dx$$

$$= \int_{-1}^1 3 - x^2 dx = \left[3x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^1$$

$$= (3 \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 1^3) - (3 \cdot (-1) - \frac{1}{3} \cdot (-1)^3)$$

$$= \underbrace{3 - \frac{1}{3}} + \underbrace{3 - \frac{1}{3}} = 6 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3} \approx 5,33$$

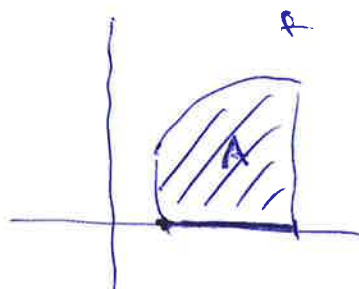
$$2 \cdot \int_0^1 3 - x^2 dx$$

$$= 2 \cdot \left[3x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1$$

$$= 2 \cdot \left(3 - \frac{1}{3} \right) = 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

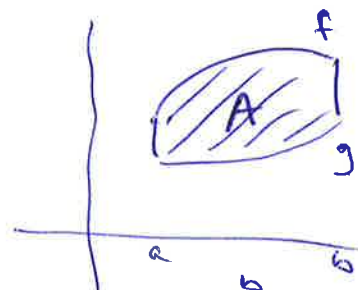
Spesialtilfeller:

a) $g(x)=0$:



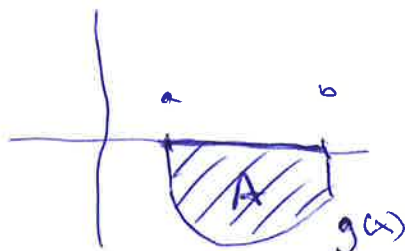
$$A = \int_a^b f(x) dx \quad \text{når } \underline{f(x) \geq 0}$$

$f(x) \geq g(x)$:



$$A = \int_a^b f(x) - g(x) dx$$

b) $f(x)=0$:



$$A = \int_a^b -g(x) dx \quad \text{når } g(x) \leq 0$$

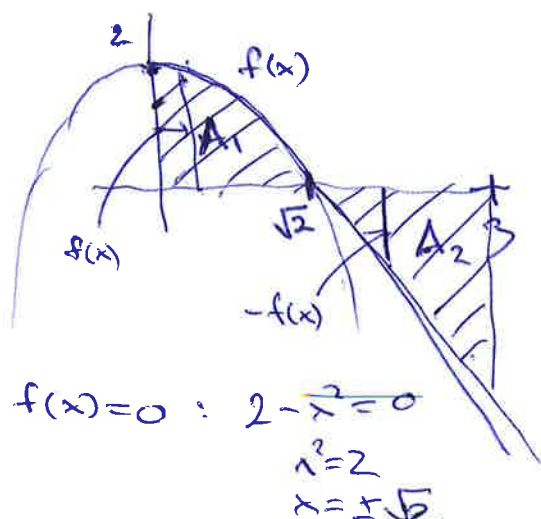
$$-A = \int_a^b g(x) dx$$

Ex:

$A =$ arealet av området
begrenset av $f(x) = 2 - x^2$
og x -aksen på $[0, 3]$

$$\int_0^3 2 - x^2 dx = ?$$

$A_1 - A_2$



$$f(x)=0 : 2 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

$$A = A_1 + A_2$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} (2 - x^2) dx + \int_{\sqrt{2}}^3 -(2 - x^2) dx$$

$$= \left[2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\sqrt{2}} - \left[2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{\sqrt{2}}^3$$

$$= \left(2\sqrt{2} - \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{2} \right) - \left((6 - 9) - \left(2\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{2} \right) \right)$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} + 3 + 2\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} = 3 + \frac{8}{3}\sqrt{2}$$

Økonomiske anvendelser

Anta at leieinntekten er 30 mill kr / år,
og øker til 54 mill kr / år i løpet av 6 år.

Gj. snittlig leieinntekt per år:

$$\frac{54 - 30}{6} \text{ mill kr/år} = 4 \text{ mill kr/år}$$

Alt A

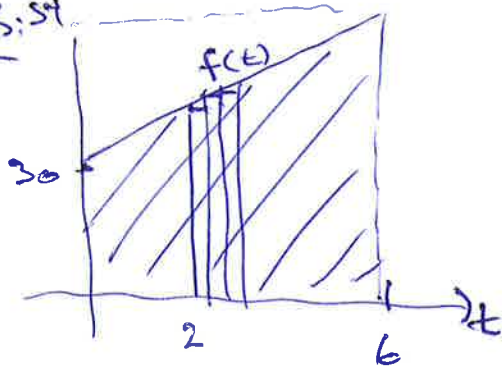


Samlede leieinntekter:

$$30 + 34 + \dots + 50$$

$$= \frac{30 + 50}{2} \cdot 6 = \underline{\underline{240 \text{ mill kr}}}$$

Alt B: St



$$f(t) = 30 + 4t$$

Samlede leieinntekter:

$$\int_0^6 f(t) dt = \int_0^6 30 + 4t dt$$

$$= [30t + 2t^2]_0^6$$

$$= 30 \cdot 6 + 2 \cdot 6^2 - 0$$

$$= 180 + 72 = \underline{\underline{252 \text{ mill kr.}}}$$

Inntektsstrøm $f(t)$ (målt i mill kr / år)

Samlet inntekt: $\int_{t_0}^{t_1} f(t) dt$

Samlet neddiskontert inntekt: $\int_{t_0}^{t_1} f(t) e^{-rt} dt$

Repetisjon: Delbrøllsoppsettning.

Eksempel: $\int \frac{5}{x^2 - 5x + 6} dx$

Delbrøllsoppsettning:

$$\frac{5}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2}$$

$$x = 3, 2$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$$

$$5 = A \cdot (x-2) + B \cdot (x-3)$$

$$\begin{array}{l} \underline{x=3}: \quad 5 = A \cdot 1 + B \cdot 0 \quad \underline{A=5} \\ \underline{x=2}: \quad 5 = A \cdot 0 + B \cdot (-1) \quad \underline{B=-5} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \underline{x=3}: \\ \underline{x=2}: \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 5(x-2) - 5(x-3) \\ = 5x - 10 - 5x + 15 \\ = 5 \end{array}$$

$$\int \frac{5}{x^2 - 5x + 6} dx = \int \frac{5}{x-3} + \frac{-5}{x-2} dx$$

$$= \underline{5 \ln|x-3| - 5 \ln|x-2| + C}$$

Ek: $\int \frac{2+3x}{x^3-4x} dx = ?$

$= \int \frac{-1/2}{x} + \frac{-1/2}{x+2} + \frac{1}{x-2} dx = -\frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x+2| + \ln|x-2| + C$

$\frac{2+3x}{x^3-4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$ $\left| \cdot x(x+2)(x-2) \right.$

$$2+3x = A(x+2)(x-2) + B \cdot x(x-2) + C \cdot x(x+2)$$

$$2+3x = A(x^2-4) + B(x^2-2x) + C(x^2+2x)$$

$$= \underline{A}x^2 - 4A + \underline{B}x^2 - 2Bx + \underline{C}x^2 + 2Cx$$

$$3x+2 = \underbrace{(A+B+C)}_0 x^2 + \underbrace{(-2B+2C)}_3 x + \underbrace{(-4A)}_2$$

$$A+B+C=0$$

$$2C-2B=3$$

$$2C=3+2B \Rightarrow C=\frac{3}{2}+B$$

$$-4A=2 \rightarrow A=-\frac{1}{2}$$

$$A=-\frac{1}{2}$$

$$C=\frac{3}{2}+B=1$$

$$-\frac{1}{2}+B+\frac{3}{2}+B=0$$

$$2B=-1$$

$$B=-\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \underline{\arctan(x) + C}$$

Det forventes at dere vet at enkelte integral (som dette) kan si trigonometriske funksjoner ($\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, etc) men ikke at dere kan regne ved slike funksjoner

OPPGAVE 1.

En eiendom antas å ha verdien $V(t) = 120 e^{\sqrt{t}/5}$ etter t år. Vi bruker kontinuerlig forrentning med diskonteringsrente $r = 4\%$ når vi beregner nåverdi av salgssummen.

- Vi ønsker å selge eiendommen når nåverdien av salgssummen er maksimal. Når er det optimalt å selge eiendommen?
- Det tar T år før eiendommens verdi har økt til det dobbelte. Finn T , og vis at det tar $3T$ år til før verdien har doblet seg på nytt.

OPPGAVE 2.

Regn ut de ubestemte integralene:

$$(a) \int x e^{1-x^2} dx$$

$$(b) \int x \ln(1-x) dx$$

$$(c) \int \frac{x^3 + x^2 - 2x - 6}{x^2 - 1} dx$$

Regionen R er avgrenset av de rette linjene $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$ og kurven $y = \ln x$.

- Lag en skisse av regionen R , og beregn dens areal.

OPPGAVE 3.

Vi betrakter matrisen A og det lineære likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$$

der a er en parameter og x, y, z er variable.

- Regn ut $|A|$.
- Finn A^{-1} når $a = 0$.
- Når har $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ uendelig mange løsninger? Løs det lineære systemet i disse tilfellene.
- Anta at a er slik at $|A| \neq 0$. Løs det lineære systemet ved hjelp av Cramers regel.

OPPGAVE 4.

Vi betrakter funksjonen

$$f(x, y) = x^2 y + x y^3 + x y^2$$

- Regn ut f'_x og f'_y , og finn eventuelle stasjonære punkter for f .
- Er $(0, 0)$ et sadelpunkt? Begrunn svaret.
- Finn alle lokale maksima og minima for f .
- La $D = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$. Finn maksimums- og minimumsverdien til f på D .

OPPGAVE 5.

Vi betrakter nivåkurven $g(x, y) = 0$, hvor g er funksjonen

$$g(x, y) = x^3 + x y + y^2$$

- Finn alle punkt på nivåkurven med $x = -2$, og bestem tangenten i hvert av disse punktene.
- Finn maksimumsverdien til $f(x, y) = x$ under bibetingelsen $x^3 + x y + y^2 = 0$.

Eksp. Oppg 2

a) $\int x \cdot e^{1-x^2} dx =$

$$\begin{aligned} u &= 1-x^2 \\ du &= -2x \cdot dx \end{aligned}$$

$$= \int \cancel{x} e^u \cdot \frac{du}{\cancel{-2x}} = \int \frac{1}{-2} \cdot e^u du$$

$$= -\frac{1}{2} e^u + C = \underline{\underline{-\frac{1}{2} e^{1-x^2} + C}}$$

$$\int x e^{1-x^2} dx$$

$$\int u' v dx = uv - \int u v' dx$$

~~$$\begin{aligned} u &= 1-x^2 & u' &= -2x \\ v &= e^{1-x^2} & v' &= e^{1-x^2} \cdot (-2x) \end{aligned}$$~~

~~$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} x^2 & u' &= x \\ v &= e^{1-x^2} & v' &= e^{1-x^2} \cdot (-2x) \end{aligned}$$~~

$$b) \int x \cdot \ln(1-x) dx =$$

$$u = x \quad u' = 1$$

$$u' = \ln(1-x) \quad u = x$$

$$\int u'v dx = uv - \int uv' dx$$

$$u = \frac{1}{2}x^2 \quad u' = x$$

$$v = \ln(1-x) \quad v' = \frac{1}{1-x} \cdot (-1)$$

$$\int \ln(1-x) dx = \int \ln(u) \frac{du}{-1}$$

$$\boxed{u = 1-x} \quad \boxed{du = -dx}$$

$$= \int -\ln(u) du$$

$$= -(u \ln u - u) + C$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(1-x) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{1-x} \cdot (-1) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln(1-x) + \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1-x} dx$$

$$\frac{x^2}{1-x} = -x - 1 + \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{x^2}{1-x} = \frac{x^2 - x + x}{1-x} = \frac{x(x-1) + x}{1-x} = \frac{-x(x-1) + x}{1-x} = \frac{-x^2 + x + x}{1-x} = \frac{-x^2 + 2x}{1-x}$$

$$\frac{-x^2 + 2x}{1-x} = -x - 1 + \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln(1-x) + \frac{1}{2} \int -x - 1 + \frac{1}{1-x} dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln(1-x) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}x^2 - x - \ln(1-x) \right) + C$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln(1-x) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \ln(1-x) + C$$