

FORELESNING 2

EIVIND ERIKSEN

AUG 31 2016

MET1180

MATEMATIKK

BI

Plan:

- ① Renteresning
- ② Nåverdi af kontantstrømmer
- ③ Endelige rækker
- ④ Annuiteter og annuitetslån

Pensum:

[E] 1.3-1.6

Fortsettes med dette
neste gang.

Qpps. 1.1.7 -

Prisen øker med 9%, så 20% og til slutt
går den ned med 25%

$$r_1 = 9\% = 0.09 \quad r_2 = 20\% = 0.20 \quad r_3 = -25\% = -0.25$$

Verst-fahrer:

$$1+r_1 = 1,09 \quad 1+r_2 = 1,20 \quad 1+r_3 = 0,75$$

$$\begin{aligned}(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3) - 1 &= 1,09 \cdot 1,20 \cdot 0,75 - 1 \\&\approx 0,981 - 1 \approx \underline{\underline{-1,9\%}} \\&\quad \text{"} \\&-0,019 = -0,019 \cdot 100\%\end{aligned}$$

Opps. 1.1.10

Erdriser på $R\%$ og $R'\%$

$$r = \frac{R}{100}$$

$$r_2 = \frac{r_1}{100}$$

Verstärker:

$$1 + \frac{R}{100}$$

$$1 + \frac{R_1}{100}$$

$$(1+r_1) \cdot (1+r_2) - 1 = \cancel{1} + r_1 + r_2 + r_1 r_2 \cancel{- 1} = r_1 + r_2 + r_1 r_2$$

$$= R\% + R'\% + \frac{RR'}{100 \cdot 100} = R\% + R'\% + \frac{RR'}{100} \%$$

①

Renteregning

BI

Ex: Bankkonto med 3% rente
 Efter 5 år är 10.000kr värt till:

$$r = 3\% \rightarrow 1 + r = 1,03$$

Belopp efter 5 år:

$$K = 10.000 \cdot 1,03 \cdot 1,03 \cdot \dots \cdot 1,03$$

$$= 10.000 \cdot (1,03)^5 \approx \underline{11.592,74}$$

$$K = (1+r)^n \cdot K_0$$

K_0 : startbelopp
 r : renten
 n : antall år
 K : sluttbelopp

Innskutt:	10.000	
Renten:	1.500	$(10.000 \cdot 3\%)^5$
Bankens renter:	92,74	" $300 \cdot 5$
	<u>11.592,74</u>	

Kapitalisering: När renter läggs till balansen

Rentetermin: Perioden mellan hver kapitalisering

Terminrente: Rente per rentetermin

Ex: Renter er 3% p.a. men kapitaliseres hver mnd.

Rentetermin: 1 mnd.

Antall terminer per år: 12

Terminrente: $\frac{r}{n} = \frac{3\%}{12} = 0,25\% = \underline{0,0025}$

Etter 5 år:

$$10.000 \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot 5} = 10.000 \cdot 1,0025^{60} \approx \underline{11.616,17}$$

↑
vekstfaktor
per termin

$$K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{N \cdot n}$$

Terminrente

{

K_0 : startbeløp

r : rente per år
(nominell rente)

n : antall renteterminer
per år

N : antall år

K : slutt beløp

Effektiv. rate:

Samlet vekstfaktor for 1 år: $\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = 1 + r_{\text{eff}}$

" $1,0025^{12}$

$$r_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1$$
$$= 1,0025^{12} - 1 = \underline{\underline{3,04\%}} \quad \text{effektiv. rente}$$

$$r_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1$$

r : nominell rente
(årsrente)

n : ant. terminer per år

Exs. 1) 2% rente kapitalisert hvert år
2) 1,95% rente — 11 — — — — — måned



1) $r_{eff} = 2\% = 0,02$

2) $r_{eff} = \left(1 + \frac{0,0195}{12}\right)^{12} - 1 \approx \underline{1,97\%} = 0,0197$

For å fe f. eks 8 desimaler på BI-kalk:

RED
SHIFT + DISP + 8

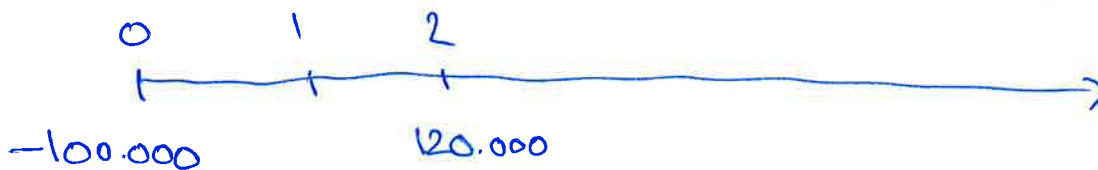
For å regne ut 2) overfor:

$$0,0195 \boxed{\div} 12 = \boxed{+} 1 = \boxed{\times} 12 = - 1 =$$

eller $(1 + 0,0195 \boxed{\times} 12) \boxed{\div} 12 - 1 =$

② Nåverdi av kontant strømmer

Kontant strøm: Inn og utbetalinger på ulike tidspunkt.



Tidslinje
1 = 1 etter
et år
etc.

Nåverdi: En betaling K etter n år
har nåverdi:

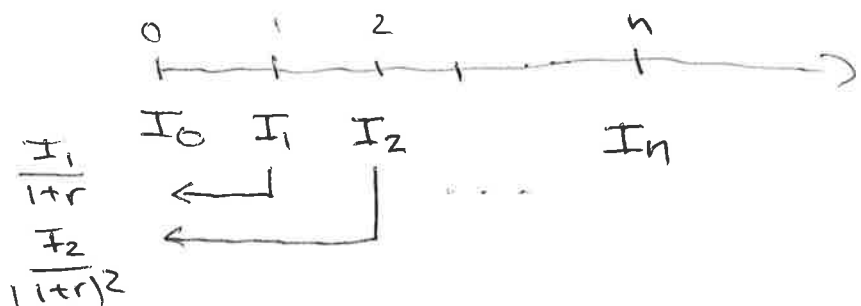
$$K_0 = \frac{K}{(1+r)^n}$$

r = diskonteringsrente

$r = 10\%$: $K_0 = \frac{120.000}{1,10^2} \approx 99.173,55$

Nåverdi av kontantstrømmen:

Kontant strøm: $(I_0, I_1, I_2, \dots, I_n)$



Nåverdi av kontantstrømmen = summen av
nåverdien av betalinger i kontantstrømmen:

$$I_0 + \frac{I_1}{1+r} + \frac{I_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{I_n}{(1+r)^n}$$

Ek:



$$r = 10\%$$



Nåverdi: $-100.000 + \frac{120.000}{1,10^2}$

$$\approx -100.000 + 99.173,55 = \underline{-826,45}$$

investeringen lønner sig ikke ved $r = 10\%$

Internrente:

Diskonteringsraten r som er slik at nåverdien til kontantstrømmen blir 0.

$$-100.000 + \frac{120.000}{(1+r)^2} = 0$$

$$\frac{120.000}{(1+r)^2} = 100.000$$

$$1,2 = \frac{120.000}{100.000} = \frac{100.000 \cdot (1+r)^2}{100.000}$$

$$(1+r)^2 = 1,2$$

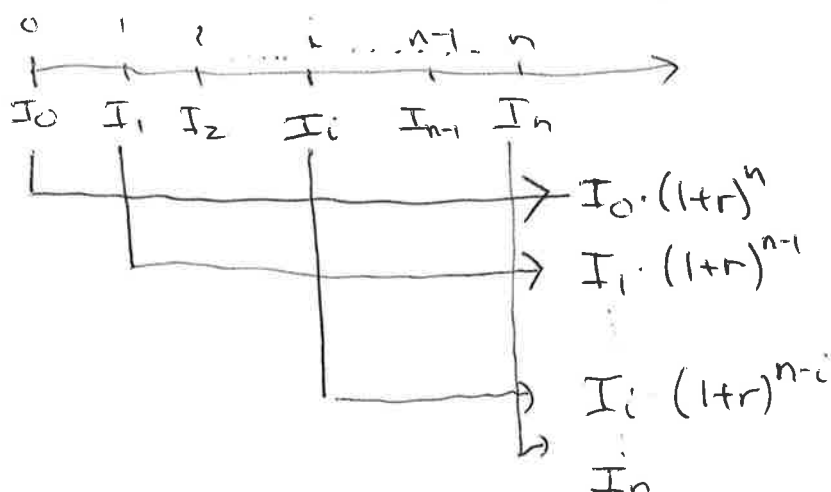
$$1+r = \sqrt{1,2}$$

$$r = \sqrt{1,2} - 1 \approx \underline{\underline{9,54\%}}$$

Internrente.

Sluttverdi:

Kontantstrøm $(I_0, I_1, \dots, I_n)$



Slutt-tidspunkt: n

Sluttverdi av beløpet I_i etter i år:

$$\boxed{I_i \cdot (1+r)^{n-i}}$$

BI

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Aritmetisk rekke:

$$a_2 - a_1 = d \quad a_3 - a_2 = d \quad a_4 - a_3 = d \quad \dots$$

$$a_2 = a_1 + d \quad a_3 = a_2 + d \quad a_4 = a_3 + d \quad \dots$$

Ex: $a_1=1$ $a_2=3$ $a_3=5$... $a_n=199$

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot 100 = 100 \cdot 100 = \underline{\underline{10.000}}$$

Hva er n ? $a_n = a_1 + (n-1) \cdot 2$

$$199 = 1 + (n-1) \cdot 2$$

$$a_i = a_1 + (i-1)d \quad \frac{199-1}{2} = n-1$$

$$\frac{199-1}{2} = n-1$$

$$99 = n - 1$$

$$n = 100$$

Geometrisk rekke:

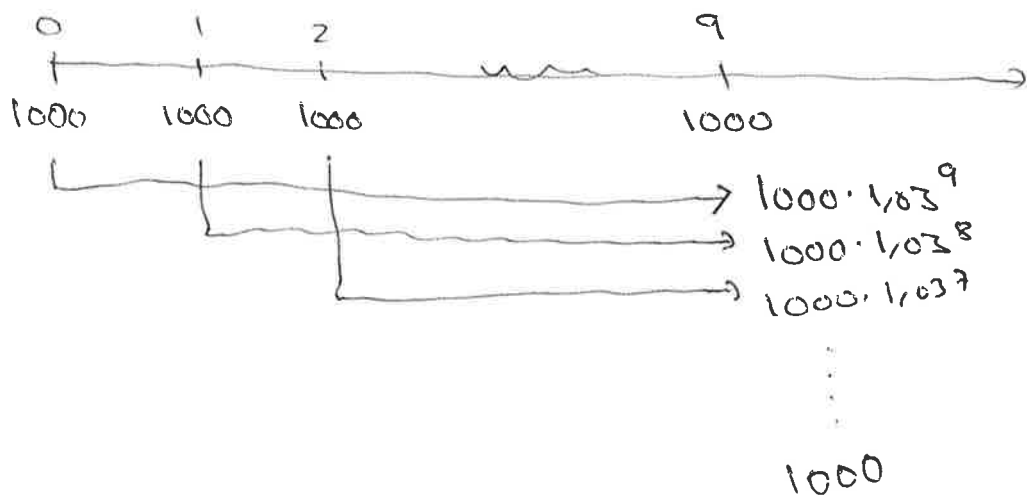
$a_i = a_{i-1} \cdot k$ for et fest tall k , rekkenes kvotient

$$\frac{a_i}{a_{i-1}} = k \text{ for alle } i$$

$$\frac{a_2}{a_1} = k \quad \frac{a_3}{a_2} = k \quad \frac{a_4}{a_3} = k \quad \dots$$

$$a_2 = k a_1 \quad a_3 = k a_2 \quad a_4 = k a_3 \quad \dots$$

Ex: Vi setter inn 1000 kr på ei bankkonto med 3% rente, og drøtter 1000 kr hvert år (tilsammen ti ganger).



Balansen etter 9 år:

$$1000 \cdot 1,03^9 + 1000 \cdot 1,03^8 + \dots + 1000$$

$$= 1000 + 1000 \cdot 1,03 + \dots + 1000 \cdot 1,03^8 + 1000 \cdot 1,03^9$$

↑
geometrisk rekke
 $k = 1,03$

$$= 1000 \cdot \frac{1,03^{10} - 1}{1,03 - 1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 1000 \\ n = 10 \\ k = 1,03 \end{array} \right.$$

$$\approx \underline{\underline{11.463,88}}$$

Nåverdi: $\frac{11.463,88}{1,03^9}$

$$a_1 (1 + k + k^2 + \dots + k^{n-1})$$

Formel für geometrische Reihe:

$$a_1 + \underset{a_2}{a_1 \cdot k} + \underset{a_3}{a_1 \cdot k^2} + \underset{a_4}{a_1 \cdot k^3} + \dots + \underset{a_n}{a_1 \cdot k^{n-1}} = S_n$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - k^n}{1 - k} = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$$

Ex: $x - \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{25} - \frac{x^4}{125} + \frac{x^5}{625} = x \cdot \frac{1 - (-x/5)^5}{1 - (-x/5)}$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{-x^2/5}{x} = -x/5$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{x^3/25}{-x^2/5} = -x/5$$

$$\frac{a_4}{a_3} = -x/5$$

$$\frac{a_5}{a_4} = -x/5$$

↑
geometrisch
reihe

$$k = -x/5$$

$$= x \cdot \frac{1 + x^5/5^5 \cdot 5}{1 + x/5 \cdot 5}$$

$$= \frac{x (5 + x^5/625)}{(5 + x)}$$

$$a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$$

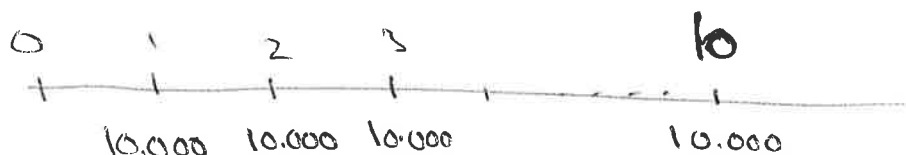
Formel für n'te Term
i geometrische Reihe
(Koeffizient k)

4

Annuiteter



Eks: Elterskuddsannuitet:



Nåverdi:

geometrisk
 $k = \frac{1}{1+r}$

$$\begin{aligned}
 & \frac{10.000}{1+r} + \frac{10.000}{(1+r)^2} + \frac{10.000}{(1+r)^3} + \dots + \frac{10.000}{(1+r)^{10}} \\
 &= \frac{10.000}{1+r} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{1+r}} \\
 &= \frac{10.000 \cdot (1 - (1/(1+r))^{10})}{(1+r) \cdot (1 - \frac{1}{1+r})} \\
 &= \frac{10.000 (1 - (1/(1+r))^{10})}{(1+r) - 1} = \frac{10.000 \cdot (1 - (1/(1+r))^{10})}{r} \\
 &= \frac{10.000 \cdot (1 - (1/(1+r))^{10})}{r} \cdot (1+r)^{10} \\
 &= \frac{10.000 \cdot ((1+r)^{10} - 1)}{r \cdot (1+r)^{10}}
 \end{aligned}$$

Fortsetter med dette neste gang

Oppg: 1.3 - 1.5 i [E]
(kan verte ved 1.6)