

FORELESNING 20

EIVIND ERIKSEN

FEB 7, 2017

MET1180

MATEMATIKK

Plan:

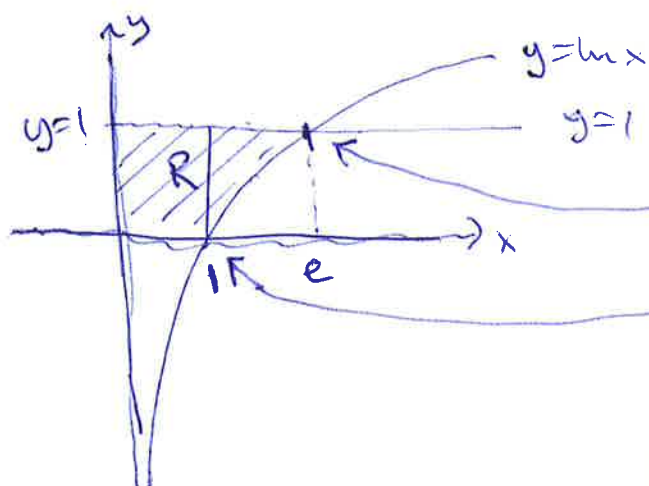
- ① Likhningssystemer
- ② Lineære systemer

Persone:

[EJ] 6.1-6.2

Eksempel MET11803 12/2015, Oppg 2

- d) E : området begrenset av $y = \ln x$, $y = 1$,
 $x = 0$, $y = 0$



Skisser R , og regn ut
arealet til R .

$$\ln x = 0 \\ \underline{x = 1}$$

$$\ln x = 1 \\ \underline{x = e}$$

$$A(R) = 1 \cdot 1 + \int_1^e (1 - \ln x) dx$$

$$= 1 + \left[x - (x \ln x - x) \right]_1^e$$

$$= 1 + \left[2x - x \ln x \right]_1^e$$

$$= 1 + (2e - e \ln e) - (2 - 1 \ln 1) \approx \underline{\underline{1,72}}$$

$$= 1 + 2e - 2 - e \\ \text{further} \\ = e - 1$$

① Likningssystemer

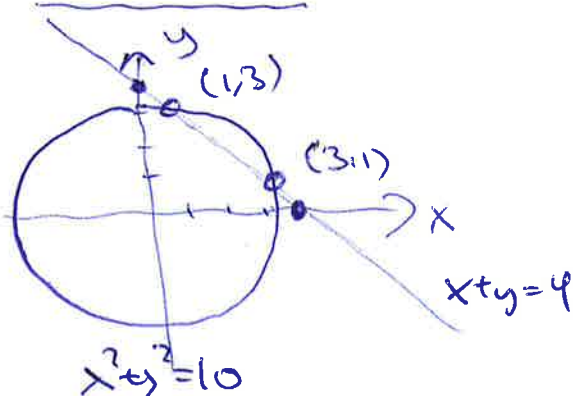
Ekso:

$$\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$$

$\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ likninger} \\ 2 \text{ ubekjente } (x,y) \end{array} \right.$

Løsning: (x,y) som tilfredsstiller
begge likninger samtidig

Geometrisk:



① $x+y=4$ lineær
 $y=-x+4$

② $x^2+y^2=10$ kvadratisk
Sirkel med sentr i $(0,0)$
og radius $\sqrt{10}$
 $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$

Ser at som det er
to løsninger.

Innsetningsmetoden: (substitusjon)

$$\begin{aligned} x+y=4 &\Rightarrow y=4-x \\ x^2+y^2=10 &\Rightarrow x^2+(4-x)^2=10 \\ &x^2+16-8x+x^2=10 \\ &2x^2-8x+6=0 \\ &x^2-4x+3=0 \\ &x=\frac{4 \pm \sqrt{16-4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|c} x=3 & x=1 \\ \hline y=1 & y=3 \end{array}$$

Løsning:
 $(x,y) = (3,1),$
 $(1,3)$

Eq: $4x^3 - z = 0$

$$x + y + z = 0$$

$$x - 4z^3 = 0$$

$$y = -x - z$$

$$z = 4x^3$$



$$x - 4 \cdot (4x^3)^3 = 0$$

$$x - 256x^9 = 0$$

$$x \cdot (1 - 256x^8) = 0$$

$$\underline{x=0} \quad \text{eller} \quad 1 - 256x^8 = 0$$

$$256x^8 = 1$$

$$x^8 = 1/256$$

$$x = \pm \sqrt[8]{1/256}$$

$$= \pm 1/2$$

$x=0$	$x=1/2$	$x=-1/2$
$z=0$	$z=1/2$	$z=-1/2$
$y=0$	$y=-1$	$y=1$

Løsning: $(x, y, z) = (0, 0, 0), (1/2, -1, 1/2), (-1/2, 1, -1/2)$

* Start med "enkelte" likning
* vær systematisk

Eq:

$$(x-y)(x^2-y^2) = 3$$

(varshelost)

$$(x+y)(x^2+y^2) = 15$$

② Lineare likningssystem = lineære system

Et likningssystem der alle likninger er lineære.

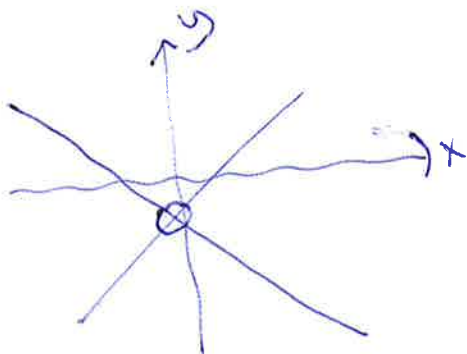
Et $m \times n$ -lineært system: m likninger
 n ukjente

Ex:
$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=3 \\ x+2y+4z=3 \end{cases} \quad 3 \times 3 \text{ lineært system}$$

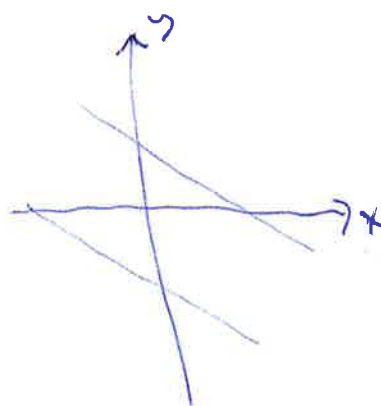
$$\begin{cases} x+y+z-w=1 \\ x-y+z+4w=3 \\ x+2y+4z+w=3 \end{cases} \quad 3 \times 4 \text{ lineært system}$$

Spesialtallet: $m=n=2$

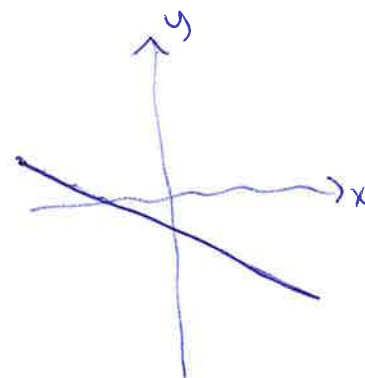
$$\begin{aligned} ax+by &= c \\ dx+ey &= f \end{aligned}$$



én løsning

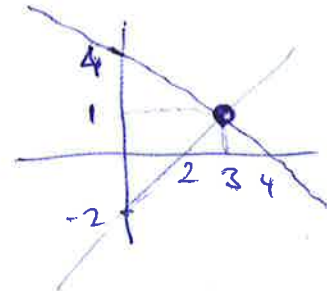


ingen løsninger



uendelig mange
løsninger
(pkt. på
linjen)

Eq: $x + y = 4$
 $x - y = 2$



Innsattingsmetoden: Substitusjon

$$y = 4 - x$$

$$y = x - 2$$

En løsn: $(x, y) = \underline{\underline{(3, 1)}}$

$$x + y = 4 \rightarrow y = 4 - x$$

$$x - y = 2 \quad x - (4 - x) = 2$$

$$2x - 4 = 2$$

$$2x = 6$$

$$\underline{x = 3}, \underline{y = 1}$$

$$(x, y) = \underline{\underline{(3, 1)}}$$

Eliminasjonsmetoden:

I	$\begin{array}{l} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{array}$	$\rightarrow \begin{array}{l} x + y = 4 \\ 2x = 6 \end{array}$	I	$y = 4 - x = \underline{1}$
II			I + II	

$$2x = 6 \rightarrow \underline{x = 3}$$

$$\underline{y = 1}$$



I	$\begin{array}{l} x + y = 4 \\ 2y = 2 \end{array}$	$x = 4 - y = \underline{3}$
I - II		$\underline{y = 1}$

Generelt $m \times n$ lineært system: Variable
 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

a_{ij} : et tall, koeff. for x_j i ligning i

b_i : et tall, konstantleddet i ligning i

Løsningsmetode: Gauss eliminasjon

Lovlige operasjoner:

En operasjon på et lineært system er lovlig hvis løsningsen bevares.

Ex: $2x - 3 = 7 \quad | +3$
 $2x = 7 + 3$

løsningsen bevares

$$\left. \begin{array}{l} x+y=4 \\ x-y=2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array}$$

$\perp$

$$\left. \begin{array}{l} x+y=4 \\ 2x=6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{I+II} \end{array}$$

løsningsen bevares

Elementære radoperasjoner:

Løslige operasjoner
på lineære systemer.

- i) Bytte om to linjer (rader)
- ii) Multiplisere en linje (rad) med et tall $c \neq 0$
- iii) Legge til et multiplum av en rad til en annen rad (linje)

Ex:
$$\begin{array}{l} x+y=4 \\ x-y=2 \end{array} \begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} x-y=2 \\ x+y=4 \end{array} \quad i)$$

$$\begin{array}{l} x+y=4 \\ x-y=2 \end{array} \cdot (-1) \rightarrow \begin{array}{l} x+y=4 \\ -x+y=-2 \end{array} \quad ii)$$

$$\begin{array}{l} I \quad x+y=4 \\ II \quad x-y=2 \end{array} \begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \rightarrow \begin{cases} x+y=4 & I \\ 2x=6 & II+I \end{cases} \quad iii)$$

$$\begin{array}{l} I \quad x+y=4 \\ II \quad x-y=2 \end{array} \begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{l} -1 \\ 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} x+y=4 & I \\ -2y=-2 & II-I \end{array} \quad iv)$$

$$\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ x-y+z=1 \\ 2x+y-z=4 \end{array} \begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} -2 \\ -2 \\ 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} x+y+z=3 \\ x-y+z=1 \\ -y-3z=-2 \end{array} \quad v)$$

Den augmenterte matrisen

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x - y + z &= 1 \\ 2x + y - z &= 4 \end{aligned}$$

likning = rad

augmentert = utvidet

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{likning 1} \\ \leftarrow \text{likning 2} \\ \leftarrow \text{likning 3} \end{array}$$

Koeffisientmatrisen
til likningssystemet

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \text{marker} = \\ \hline 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{array}$$

den augmenterte koeff.
matrisen til systemet
= utvidet matrise

Gauss-eliminering:

Ekse:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x - y + z &= 1 \\ 2x + y - z &= 4 \end{aligned}$$



$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right) \text{ utvidet matrise}$$

bruke elementære
radoperasjoner til
å eliminere variabler
på en systematisk
måte.

lineært system
som lett kan
løses

"baklengs
substitusjon"

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array} \right)$$

"trappeform"

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow (-1/2) \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 \leftarrow (-1/2) \cdot R_2 \\ R_3 \leftarrow R_3 + (1/2) \cdot R_2 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow (-1) \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

trappetern

$$\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ y = 1 \\ -3z = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ y = 1 \\ -3z = -1 \end{array}$$

Backwards substitution

$$x = 3 - y - z$$

$$x = 3 - 1 - 1/3 = 5/3$$

$$y = 1$$

$$z = 1/3$$

hensn: $x = 5/3, y = 1, z = 1/3$

$$(x, y, z) = (5/3, 1, 1/3)$$

Noen presiseringer:

- a) Trappeform: En ledende koeffisient (pivot) i en rad er den første koeffisient som er ulik null (dvs den lengst til venstre som er ulik null).

En matrise er på trappeform hvis:

- i) Alle rader med lin null er nederst
- ii) Alle koeff. under en pivot er null

Ex:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2 & 3 & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & 7 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{-1} & 2 \end{array} \right)$$

i) og ii) er oppfylt
||
trappeform

tallene markert med sirkel = pivot er

Ex:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

også
trappeform

Pivot-posisjoner:

posisjoner med pivot i en trappeform (de som er markert med sirkel).

b) Backwards substitusjon:

Vi løser systemet nedtre og oppover.

Hver linje løses for variabelen som tilsvarende pivot-posisjon, mens variabler fra tidligere nedtre substitueres med sine verdier.