

FORELESNING 21

EIVIND ERIKSEN

FEB 14, 2017

MET1180
MATEMATIKK

Plan:

① Lineære likningssystemer og Gauss eliminasjon

② Systemer med ingen eller uendelig mange løsninger

③ Gauss-Jordan eliminasjon

Pensum:

[EJ] 6.2-6.3

① Lineære systemer og Gauss eliminasjon

Et $m \times n$ -lineært system er et likningssystem som består av m likninger i n ukjente $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Koeffisientmatrisen og ^{den} utvidete koeff.-matrisen er

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Gauss-elimnasjon:

- i) Skriv ned utvidet koeff. matrise til systemet
- ii) Gjør om den utvidede koeff. matrise til trappetform ved hjelp av elementære radoperasjoner
- iii) Skriv ned systemet til trappetformen, og løs det ved baklengs substitusjon.

Defn.:

Trappetform: En ledende koeffisient / pivot er det første tallet ulik null i en rad. (først= lengst til venstre)

En matrise er på trappetform hvis:

- i) Alle null-rader er nederst
- ii) Alle koeff. under en pivot er null.

Exs:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{array} \right)$$

trappetform

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

trappetform

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

ikke trappetform

Pivot-posisjon

De posisjonene i matrisen som har en pivot når matrisen er på trappetform.

Elementære radoperasjoner:

- i) Bytte om to rader
- ii) Multiplisere en rad med $c \neq 0$ (multiplisere eller dividere)
- iii) Legge til et multiplum av en rad til en annen rad

$$R(2) := R(2) + 3 \cdot R(1)$$

Ekse:

$$R(2) := R(2) + (-2) \cdot R(1)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 5 \\ 2x - y - z &= -1 \\ 4x + 2y - 7z &= -8 \end{aligned}$$

3x3 lineært

 $\rightsquigarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & -7 & -8 \end{array} \right) \begin{array}{l} \downarrow \\ \leftarrow -2 \\ \leftarrow -2 \end{array}$$

utvidet matrise

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -3 & -11 \\ 0 & -6 & -11 & -28 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow -4 \\ \leftarrow -4 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2 & 1 & 5 \\ 0 & \textcircled{-5} & -3 & -11 \\ 0 & -6 & -11 & -28 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow -6/5 \\ \leftarrow -6/5 \end{array}$$

Alt I.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2 & 1 & 5 \\ 0 & \textcircled{-30} & -18 & -66 \\ 0 & -30 & -55 & -140 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow -4 \\ \leftarrow -4 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2 & 1 & 5 \\ 0 & \textcircled{-30} & -18 & -66 \\ 0 & 0 & \textcircled{-37} & -74 \end{array} \right)$$

trappetform

trappetform

Resultat:

Enhver matrise kan gjøres om til trappetform v.h.a. elementære radoperasjoner. Trappetformen er ikke entydig, men pivotposisjonene er entydige.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -30 & -18 & -66 \\ 0 & 0 & -37 & -74 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 5 \\ -30y - 18z &= -66 \\ -37z &= -74 \end{aligned}$$

Backwards substitution: ←

Start med siste likning og dreier arbeidet oppover.
Løs for variablene som svarer til pivotposisjon.
Bruk substitusjon.

$$\underline{-37z = -74} \Rightarrow z = \frac{-74}{-37} = \underline{2}$$

$$\underline{-30y - 18z = -66} \Rightarrow -30y = -66 + 18 \cdot 2 = -30$$

$$y = \underline{1}$$

$$\underline{x + 2y + z = 5} \Rightarrow x = 5 - 2 \cdot 1 - 2$$

$$x = \underline{1}$$

Løsning: $(x, y, z) = \underline{(1, 1, 2)}$ (en løsning)

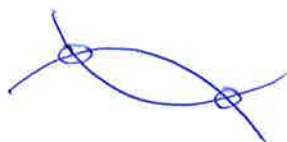
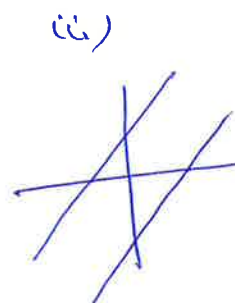
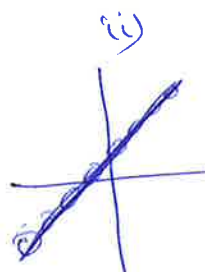
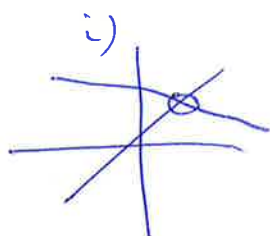
Teorem:

Et $m \times n$ -linært likningssystem har enten

- i) Systemet har en løsning
- ii) Systemet har uendelig mange løsninger
- iii) Systemet har ingen løsninger

Ex: 2×2

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}$$



kan ikke skje
for lineære
likningssystem

Eks:

$$x + y + z = 3$$

$$x - y + z = 1$$

$$x + 5y + z = 6$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1} \xrightarrow{R_2} \xrightarrow{R_3} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

trappetform

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ -2y &= -2 \\ 0 &= -1 \end{aligned}$$

ingen løsn.

Resultat:

ingen løsninger $\iff$

trappetform med
pivot-posisjon i siste
kolonne.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} * \\ \text{"} \\ c \neq 0 \end{array}$$

$$\underbrace{0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n}_{=0} = \underbrace{c}_{\neq 0}$$

Eks:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x - y + z &= 1 \\ x + 5y + z &= 7 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 7 \end{array} \right) \begin{array}{l} \downarrow -1 \\ \downarrow -1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \downarrow 2 \\ \downarrow 2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

trappetform

$$\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 3 \\ \underline{-2y} & & \\ \hline & & -2y = -2 \\ & & 0 = 0 \end{array}$$

x, y : pivot-variabler, uavhengig var.
 z : fri variabel

$$-2y = -2 \Rightarrow \underline{y = 1}$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \Rightarrow x = 3 - y - z \\ &= 3 - 1 - z = \underline{2 - z} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 - z \\ y = 1 \\ z = z \text{ (fri)} \end{array} \right\}$$

$z = 0$: $x = 2, y = 1, z = 0$

$z = 1$: $x = 1, y = 1, z = 1$

$z = 2$: $x = 0, y = 1, z = 2$

uendelig mange
løsninger

Resultat:

Uendelig mange
løsninger

$\Leftrightarrow$

Trappetform

uten pivot-posisjon
1ste kolonne

+
minst en fri variabel
(minst en variabelkolonne
uten pivot posisjon)

Eks: $x + 3y + 4w = 7$
 $2z - w = 4$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 3 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & \textcircled{2} & -1 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

trappetform

Uendelig mange løsninger; y og w
er frie
variable

$2z - w = 4 \Rightarrow 2z = 4 + w \Rightarrow z = 2 + \frac{w}{2}$

$x + 3y + 4w = 7 \Rightarrow x = 7 - 3y - 4w$

$$\left. \begin{array}{l} x = 7 - 3y - 4w \\ y = y \text{ (fri)} \\ z = 2 + w/2 \\ w = w \text{ (fri)} \end{array} \right\}$$

uttrykk i y og w (frie vari.)
på høyresiden

Begreper:

Et lineært system kalles inkonsistent hvis det har ingen løsninger
og konsistent hvis det har minst én løsn.
(én løsn. eller uend. mange)

Antall frihetsgrader i et konsistent system er antall frie
variabler. Ingen frihetsgrader = én løsn.

Pivot-posisjonene bestemmer antall løsn.

Ex:

3x4
lin.
system

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Uendelige mange løsn., én frihetsgrad, > fri

$$\underline{*x} + * + * + * = *$$

$$\underline{*z} + * = *$$

$$+ \underline{*w} = *$$

③ Gauss-Jordan eliminasjon

Redusert trappetform:

En trappetform med følgende ekstra betingelser oppfylt:

i) Alle pivoter = 1

ii) Alle koeff. over en pivot er null.

Ex:

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 7 \\ x - y + 2z - w &= 3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{-1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \text{trappetform} \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{-1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \text{reduisert trappetform} \end{array}$$

$$\begin{aligned} x + 3/2 z &= 5 \\ y - 1/2 z + w &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= -\frac{3}{2}z + 5 \\ y &= \frac{1}{2}z - w + 2 \end{aligned}}$$

(z, w frie variabler)

Mer: Den reduserte trappetformen er entydig.

Ek:

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 7 \\ x - y + 2z - w &= 3 \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 0 & 3/2 & 0 & 5 \\ 0 & \textcircled{1} & -1/2 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

2 frihetsgrader (uendelig mange løsninger) med z, w fri.

$$x = -\frac{3}{2}z + 5$$

$$y = \frac{1}{2}z - w + 2$$

z, w : fri

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} x &= -\frac{3}{2}t + 5 \\ y &= \frac{1}{2}t - s + 2 \\ z &= t \\ w &= s \end{aligned}$$

t, s : parameter - free var.

eller

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t + 5 \\ \frac{1}{2}t - s + 2 \\ t \\ s \end{pmatrix}$$