

# FORELESNING 22

EIVIND ERIKSEN

FEB 20, 2017

**MET1180**

MATEMATIKK

Plan:

- ① Repetisjon: Gauss eliminasjon
- ② Determinanter
- ③ Kramers regel

Person:

LES 6.4

Repetisjon:

Husk: Et  $m \times n$  lineært system har enten

$$m \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$n$

- i) ingen løsn.
- ii) en entydig løsn.
- iii) uend. mange løsn.

Eks: Gauss eliminasjon

$$x + y + z = 7$$

$$x - y + z = 5$$

$$x + 2y + 3z = 14$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix} R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1 \end{smallmatrix}} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix} R_2 \cdot (-1/2) \\ R_2 \leftrightarrow R_3 \end{smallmatrix}} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 + 2R_2} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right)$$

Løsn:

$$(x, y, z) = (3, 1, 3)$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 7 \\ x - y + z &= 5 \\ \hline 2y &= 2 \\ y &= 1 \\ x + 2y + 3z &= 14 \\ x + 2 + 3z &= 14 \\ x + 3z &= 12 \\ x &= 12 - 3z \end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right)$$

trappetform

Husk:

i) Ingen løsn  
(inkonsistent)

$\Leftrightarrow$  pivot-posisjon i siste kolonne

Konsistent

ii) én løsn.

$\Leftrightarrow$  ingen pivot-posisjon i siste kolonne

fri variabel : Ingen pivot-posisjon i kolonnen

avhengig variabel : pivot-posisjon i kolonnen

ii) én løsn  $\Leftrightarrow$  ingen fri var.

iii) uendelig  
mange løsn  $\Leftrightarrow$  minst én fri var.

(antall frihetsgrader  
= antall fri variable)

Ex:  $3 \times 5$  lineært system

$\left( \begin{array}{ccccc|c} \otimes & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \otimes & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \otimes & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right) \rightarrow$  uendelig mange løsn., to frihetsgrader

$\left( \begin{array}{ccccc|c} \circ & \otimes & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \circ & \circ & \circ & \otimes & \cdot & \cdot \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \otimes \end{array} \right) \rightarrow$  ingen løsn.



én løsn. ikke mulig

to mulige  
trappeformer

## ② Determinanter

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

En  $m \times n$ -matrise  $A$  er en rektangulær tabell av tallverdier med  $m$  rader og  $n$  kolonner

En kvadratisk matrise:  $m=n$   
(like mange rader som kolonner)

Ex:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 7 \\ x-y+z &= 5 \\ x+2y+3z &= 14 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{utvidet} \\ \text{matrise} \end{array}$$

$3 \times 4$ -matrise

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{koeffi.} \\ \text{matrisen} \end{array}$$

$3 \times 3$ -matrise (kvadratisk)

Defn: Determinant

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$n \times n$ -matrise

$$\leadsto \det(A) = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

$\nwarrow$  gir en tallverdi som svar.

Metode for å regne ut  $\det(A)$ :

$n=2$ :  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$|A| = ad - bc$

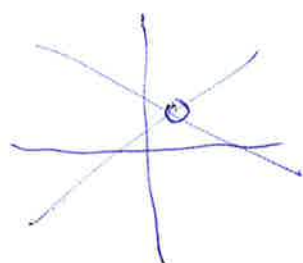
Ex:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad |A| = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = \underline{\underline{-3}}$

Ex.

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 2x + y &= 10 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -3$$

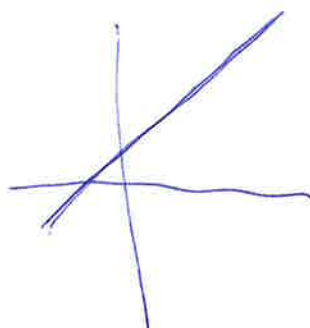


En løsn.

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 2x + 4y &= 10 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$$

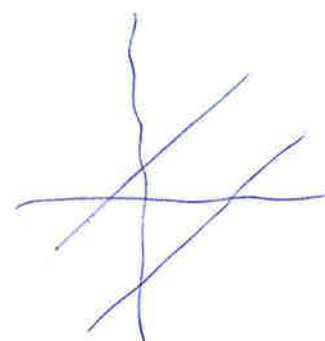


Uendelig mange løsn.

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 2x + 4y &= -10 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0$$



Ingen løsn.

Resultat:

Et  $n \times n$  lineært system med koeff.-matrise  $A$  har:

$$\text{en løsn} \iff |A| \neq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ingen løsn.} \\ \text{eller} \\ \text{uendelig} \\ \text{mange løsn} \end{array} \right\} \iff |A| = 0$$

Ex.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 5z &= 17 \\ 5x + 2y + 7z &= 1 \\ 3x - y + 2z &= 4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Tilfelle  $n > 2$ :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= \underline{aei} + bfg + cdh \\ &\quad - \underline{ceg} - bdi - \underline{afh} \\ &= a \cdot (ei - fh) + b(fg - di) \\ &\quad + c(dh - eg) \end{aligned}$$

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

fungerer  $\rightarrow$   
ven for  $n=3$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot 2 \cdot 9 + 1 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 3 \\ &\quad - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 9 \\ &= 18 + 4 + 3 - 2 - 12 - 9 \\ &= 25 - 23 = \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

Kofaktor utvikling:

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Fortegn:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Fortegn i posisjon  $(i,j)$ :  $(-1)^{i+j}$

kofaktor i posisjon  $(1,1)$

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \cdot C_{11} + 1 \cdot C_{12} + 1 \cdot C_{13} \\ &= \boxed{+1 \cdot M_{11}} + \boxed{(-1) \cdot M_{12}} + \boxed{(+1) \cdot M_{13}} \\ &\quad \quad \quad \parallel \quad \quad \quad \parallel \quad \quad \quad \parallel \\ &\quad \quad \quad C_{11} \quad \quad \quad C_{12} \quad \quad \quad C_{13} \end{aligned}$$

$M_{ij}$ : minoren i posisjon  $(i,j)$   
= determinanten til matrisen vi får ved å strøke rad  $i$ , kolonne  $j$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$|A| = +1 \cdot M_{11} - 1 \cdot M_{12} + 1 \cdot M_{13}$$

$$= +1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (18 - 12) - 1 \cdot (9 - 4) + 1 \cdot (3 - 2)$$

$$= 6 - 5 + 1 = \underline{\underline{2}}$$

Mark: \* Enhver determinant kan regnes ut uha  
køsteheter utvikling.

\* Utan bruke køsteheterutvikling lags enhver  
rad eller kolonne, for å finne  $\det(A)$ .

$$\text{Eks: } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$|A| = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= - (9 - 12) + 2 (9 - 4) - 3 (4 - 1)$$

$$= -5 + 10 - 9 = \underline{\underline{2}}$$

Ex:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = +3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \dots + 0 \cdot \dots$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot 3 = \underline{\underline{18}}$$

Merk: Hvis  $A$  er en trappetform, så er  
 $|A| =$  produktet av tallene  
 på diagonalen

en løsn.  $\rightarrow$  pivot-posisjon i hver kolonne  $=$  produktet av pivot'ene  $\neq 0$

ingen løsn. eller uend. mange løsn.  $\rightarrow$  minst én kolonne mangler pivot-posisjon  $= 0$

Ex:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Merk:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Diagonalen =  
 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$

kvadratisk matrise

Ex:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$



$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \left( +5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} \right) + 4 \cdot \left( -3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (5 - 12) \cdot (-2 - 49) = -7 \cdot (-51) = \underline{\underline{357}}$$

Au:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{7} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 51 \end{pmatrix} = E$$

$$|A| = |E| = \underline{\underline{357}}$$

$$|E| = 1 \cdot (-1) \cdot (-7) \cdot 51 \\ = \underline{\underline{357}}$$

Effekten på determinanten av elementære radoperasjoner:

A → B  
elementære  
radoperasjoner

- i) Bytte om to rader:  $|B| = -|A|$
- ii) Mult. en rad med  $c \neq 0$ :  $|B| = c \cdot |A|$
- iii) Legge til et multipl. av en rad til en annen rad:  $|B| = |A|$

### ③ Cramer's regel:

For ~~E~~ et n x n lineært system med koef. matrise  $A$  og utvidet matrise  $(A | \underline{b})$ , gjelder følgende:

Hvis  $|A| \neq 0$ ,  
så er:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{|A_1(\underline{b})|}{|A|} \\ x_2 &= \frac{|A_2(\underline{b})|}{|A|} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{|A_n(\underline{b})|}{|A|} \end{aligned}$$

der  $A_i(\underline{b})$  er matrise vi får om vi ~~bytter ut~~ kolonne i fra  $A$  med kolonnen  $\underline{b}$ .

Ex:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x + 2y + 3z &= 6 \\ x + 4y + 9z &= 14 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 2 \neq 0$$

(en løsn.)

$$x = \frac{|A_1(\underline{b})|}{|A|} = \frac{2}{2} = \underline{1}$$

$$y = \frac{|A_2(\underline{b})|}{|A|} = \frac{2}{2} = \underline{1}$$

$$z = \frac{|A_3(\underline{b})|}{|A|} = \frac{2}{2} = \underline{1}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = +1 \cdot 6 - 1 \cdot 6 + 1 \cdot 2 = \underline{2}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 14 & 4 & 9 \end{vmatrix} = +3 \cdot 6 - 1 \cdot (6 \cdot 9 - 3 \cdot 14) + 1 \cdot (6 \cdot 4 - 2 \cdot 14)$$

$$= 18 - 12 - 4 = \underline{2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 1 & 14 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 12 - 1 \cdot 13 + 1 \cdot 3 = \underline{2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 14 \end{vmatrix} = 1 \cdot (74) - 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = \underline{2}$$

Ess:

$$\begin{aligned} ax + 6y &= 0 \\ 3x + 2ay &= 3-a \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 6 \\ 3 & 2a \end{pmatrix}$$

$$(A|b) = \left( \begin{array}{cc|c} a & 6 & 0 \\ 3 & 2a & 3-a \end{array} \right)$$

2x2-lineært system  
med ubkjente x og y  
og parameter a

↓  
For hver verdi av  
a, skal vi finne  
løsninger (x, y).

Løsning:

Alt I: Gauss-Jordan

$$\left( \begin{array}{cc|c} a & 6 & 0 \\ 3 & 2a & 3-a \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot -\frac{3}{a}} \left( \begin{array}{cc|c} a & 6 & 0 \\ 0 & 2a - \frac{18}{a} & 3-a \end{array} \right)$$

$$a \neq 0$$

$$\downarrow a=0$$

komplisert

Alt 2:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a & 6 \\ 3 & 2a \end{vmatrix} = 2a^2 - 18 = 2 \cdot (a^2 - 9) \\ &= 2 \cdot (a-3)(a+3) \end{aligned}$$

$$a \neq \pm 3: |A| \neq 0 \rightarrow \text{en løsn.}$$

$$a = \pm 3: |A| = 0 \rightarrow \text{ingen / uend. mange løsn.}$$

↓  
unntak som løses ved å  
sette inn  $a=3$ ,  $a=-3$   
og bruke Gauss elm.

$$(A|b) = \left( \begin{array}{cc|c} a & 6 & 0 \\ 3 & 2a & 3-a \end{array} \right)$$

$|A| \neq 0$ :  $(a \neq \pm 3)$  én løsn.

$$x = \frac{|A_1(b)|}{|A|} = \frac{\overset{3}{+6} \cdot \cancel{(a-3)}}{2\cancel{(a-3)}(a+3)} = \underline{\underline{\frac{3}{a+3}}}$$

$$y = \frac{|A_2(b)|}{|A|} = \frac{-a \cdot \cancel{(a-3)}}{2\cancel{(a-3)}(a+3)} = \underline{\underline{-\frac{a}{2(a+3)}}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 3a & 2a \end{vmatrix} \\ = -6 \cdot (3-a) \\ = 6 \cdot (a-3) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} a & 0 \\ 3 & 3-a \end{vmatrix} \\ = a \cdot (3-a) \\ = -a(a-3) \end{array} \right.$$

konkl:

For  $a \neq \pm 3$ , så er det en løsn:

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/(a+3) \\ -a/(a+3) \end{pmatrix}}}$$

Unntakstilfeller:

$a=3$ :  $\left( \begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} \textcircled{3} & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$   $3x+6y=0 \Rightarrow x = -2y$   
 $y$  fri  $y = \text{fri}$   
 (uendelig mange løsn.)

$a=-3$ :  $\left( \begin{array}{cc|c} -3 & 6 & 0 \\ 3 & -6 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} \textcircled{-3} & 6 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{6} \end{array} \right)$  ingen løsn.