

FORELESNING 23

METISO

EIVIND ERIKSEN ,

FEB 28, 2017

MATEMATIKK

Plan:

- ① Repetisjon: Lineære system og determinanter
- ② Regning med vektorer og matriser
- ③ Inverse matriser

Pensum:

[E] 6.5-6.6

Øvingsoppgaver: Integrasjon

{ Innlevering: Grupper (2-4 stud.)
Frist: Tirsdag 14/03

① Repetisjon

Determinanter: Uken regne ut determinanter
for alle kvadratiske matriser.

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 - 4 = \underline{\underline{-3}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (1 - 4) - 2(2 + 8) + 4(-4 - 4)$$

$$= -3 - 20 - 32 = \underline{\underline{-55}}$$

Lineære system:

Vi ser på et $n \times n$ - lineært system med koeff. matrise A og utvidet koeff. matrise $(A|\underline{b})$. Da har vi:

$|A| \neq 0 \iff$ det lineære systemet har én løsning

$|A| = 0 \iff$ det lineære systemet har ingen eller uendelig mange løsninger.

$|A| \neq 0$:

$$(A|\underline{b}) \rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} * & - & - & - \\ 0 & * & - & - \\ 0 & 0 & * & - \end{array} \right)$$

trappetform

der hver pivotposisjon er på hoveddiagonalen ($\neq 0$)

$\Downarrow$

én løsning

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & - & - & - \\ 0 & * & - & - \\ 0 & 0 & * & - \end{array} \right) \rightarrow \text{én løsn.}$$

$\rightarrow$ én løsn.

$|A| \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & - & - & - \\ 0 & 0 & * & - \\ 0 & 0 & 0 & * \end{array} \right) \rightarrow \text{ingen løsn.}$$

$\rightarrow$ ingen løsn.

$|A| = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & - & - & - \\ 0 & 0 & * & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \text{uendelig mange løsn.}$$

$\rightarrow$ uendelig mange løsn.

Cramer's regel: Lineært system ($n \times n$) med $|A| \neq 0$

$$x_1 = \frac{|A_1(\underline{b})|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2(\underline{b})|}{|A|} \quad \dots \quad x_n = \frac{|A_n(\underline{b})|}{|A|}$$

$A_i(\underline{b})$: Matrisen A , der kolonne i er byttet ut med $\underline{b}$

Ex:

$$\begin{aligned} 2x + ay &= 4 \\ x - 2y &= a \end{aligned}$$

2x2 lineært system
w/ parameter a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ a \end{pmatrix} \quad |A| = -4 - a$$

$ A = 0: -4 - a = 0$ $\underline{a = -4}$ Ingen eller uendelig mange løsn.	$ A \neq 0:$ $\underline{a \neq -4}$ En løsn.
---	--

$a = -4$: $\xrightarrow{-\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{array} \right)$ Ingen løsn.

$a \neq -4$: Cramer's regel

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{|A_1(\underline{b})|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & a \\ a & -2 \end{vmatrix}}{-4-a} = \frac{-8-a^2}{-4-a} = \frac{a^2+8}{a+4} \\ y &= \frac{|A_2(\underline{b})|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & a \end{vmatrix}}{-4-a} = \frac{2a-4}{-a-4} \end{aligned} \right\} a \neq -4$$

② Regning med matriser og vektorer

En $m \times n$ -matrise A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$: m rader, n kolonner

matrisen: A

a_{21} : tallet i matrise A
i posisjon $(2,1)$ =
rad 2, kolonne 1

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

En n -vektor $\underline{v}$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

n -vektor =
 $n \times 1$ -matrise
= kolonnevektor

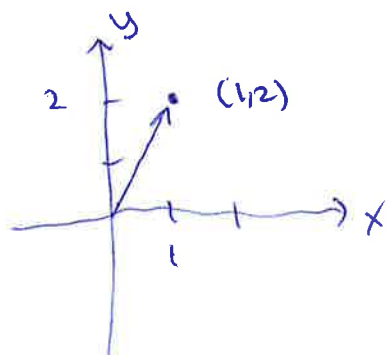
Vektor: $\underline{v}$

Ex: $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Hvorfor trenger vi vektorer?

Geometrisk tolking: Ex: $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$



Ex:

$$x + y + z = 3$$

$$x + 2y + 4z = 7$$

$$x + 3y + 9z = 13$$

Løsning: $x=1, y=1, z=1$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

① Addisjon og subtraksjon

Exo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ilike dim.}$$

$$2 \times 2 \neq 2 \times 3$$

Exo: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ilike dim.}$$

Vilken addere /
subtrahere matriser
av samme
størrelse, og gjør
det ved å bruke
add./subt.
posisjon for posisjon.

Vektorer er
spesialtilfeller.

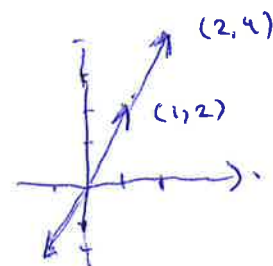
② Skalar multiplikasjon = multipl. med et tall (skalar = tall)

Exo: $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$- \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$



Eus:

	2016	2015	2014
Seg A	.	.	.
Seg B	.	.	.
Seg. C	.	.	.

	2016	2015	2014
Seg A	.	.	.
Seg B	.	.	.
Seg C	.	.	.

Salgsmatrise S

Driftskostnader K

↓

$$S - K = A$$

	2016	2015	2014
A	.	.	.
B	.	.	.
C	.	.	.

Driftsoverskudd

Overskudd: $(1-t) \cdot (S-K)$

$\underbrace{(1-t)}$ tall
 $\underbrace{(S-K)}$ driftsoverskudd
 " " " " " " " "
 1 - skattesats

③ Matrise multiplikasjon:

Ex: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = ?$ ikke
posisjon for
posisjon.

$2 \times 2 \quad \quad 2 \times 2$

$A \cdot B \rightarrow A \cdot B$ er definert hvis $n=r$
(# kolonner i A = # rader i B)
I så fall blir AB en $m \times s$ -matrise.

A B
 $m \times n$ $r \times s$
matrise matrise

Ex:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \uparrow & \uparrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 7 & 17 \end{pmatrix}$$

$2 \times 2 \quad \text{ok.} \quad 2 \times 2$

$$\begin{aligned} 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) &= 2 \\ 1 \cdot 7 + 2 \cdot 3 &= 13 \\ 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) &= 7 \\ 2 \cdot 7 + 1 \cdot 3 &= 17 \end{aligned}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = B$
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 7 & 17 \end{pmatrix} = A \cdot B$

Eksempel Lineære system

$$\begin{aligned}x + y + z &= 3 \\x + 2y + 4z &= 7 \\x + 3y + 9z &= 13\end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+2y+4z \\ x+3y+9z \end{pmatrix}$$

$3 \times 3 \quad \quad 3 \times 1 \quad \quad 3 \times 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 13 \end{array} \right) \quad \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z \\ 1 \cdot x + 2 \cdot y + 4 \cdot z \\ 1 \cdot x + 3 \cdot y + 9 \cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+2y+4z \\ x+3y+9z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}x + y + z &= 3 \\x + 2y + 4z &= 7 \\x + 3y + 9z &= 13\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

Alle lineære system kan skrives på
matriseform som

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

Identitetsmatrisen:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$n \times n$

I

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Generelt: $A \cdot I = A$
 $I \cdot A = A$

Mer: $A \cdot B \neq B \cdot A$ for matriser

Ek:

$$\begin{matrix} A & B \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = AB \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = BA \\ B & A \end{matrix}$$

Transponering:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$



$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

"
 A^t

bytter om
rader og
kolonner.

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Effekt av transponering:

a_{ii} : uforandret

$a_{ij} \leftrightarrow a_{ji}$ for $i \neq j$

En matrise kalles symmetrisk om $A^T = A$.

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

symm.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

symm.

③ Inverse matriser

For tall: $2^{-1} = \frac{1}{2}$ $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

Defn: En matrise A har en invers matrise B hvis

$$A \cdot B = I$$

$$B \cdot A = I$$

Ikke alle matriser har en invers. Hvis A har en invers, så er den entydig og skrives $B = A^{-1}$.

$n=2$: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

A har en invers: $\Leftrightarrow |A| = ad - bc \neq 0$

I så fall:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$|A| = 1 - 4 = -3 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ finnes

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Spekk: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 2x + y &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (Ax = \underline{b})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9/3 \\ 3/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A invertibel:

$$A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow \underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$$