FORELESNING 25

MET 1180

MATEMATIKK

EIVIND ERIKSEN

MAR 08, 2017

Plan:

Pensum:

[E] 7.1–7.3

1. Funksjoner i to variabler og deres grafer
2. Nivåkurver
3. Partiell derivasjon

---

1. Funksjoner i flere variabler og deres grafer

Eks: $f(x,y) = \underbrace{2x+3y}_{\text{funksjons-uttrykk}}$

$f(0,0) = 0$
$f(1,0) = 2$
$f(0,1) = 3$
$\vdots$

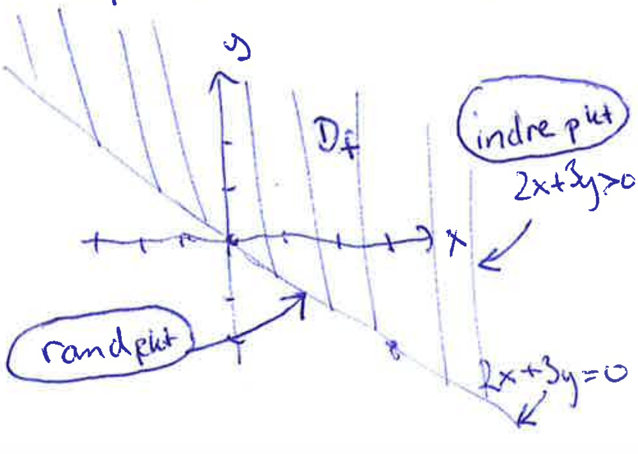
$$D_f = \{(x,y) : \text{ingen betingelser}\} = \mathbb{R}^2$$

Eks: $f(x,y) = \sqrt{2x+3y}$ $\quad D_f = \{(x,y) : 2x+3y \geq 0\}$

$2x+3y=0$

$3y = -2x$

$y = -\frac{2}{3}x$

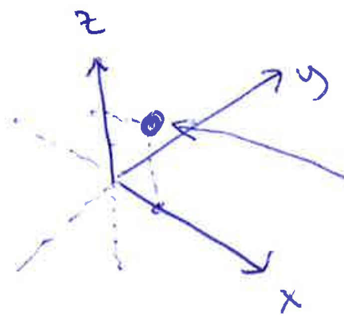


BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

Grafen til en funksjon i to variable:

$f(x,y) \rightsquigarrow \{ z = f(x,y) : (x,y) \text{ i } D_f \}$

D_f $\quad = \text{grafen til } f$



$(1,0)$ i D_f

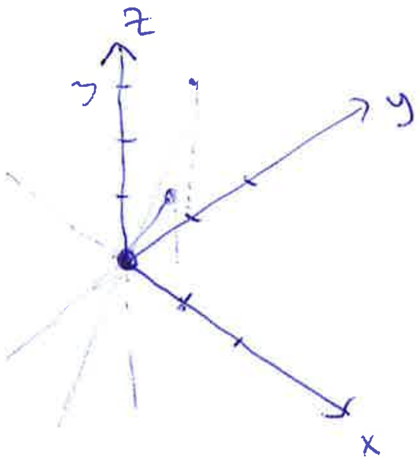
$f(1,0) = 2$

$(1,0,2)$

Eks:

$f(x,y) = 2x + 3y$

$D_f = \mathbb{R}^2 =$ alle tallpar (x,y)



Grafen til f består av alle tall-tripler (x,y,z) der

* (x,y) i D_f
* $z = f(x,y)$

Skjæringspunkt med plan:

$x = 0$: yz-planet

$z = f(x,y) = 2x + 3y$

$z = 3y$

$y = 0$: xz-planet

$z = 2x$

Skjæringspunkter med aksen

x-aksen: $y = z = 0$

$\boxed{\cancel{z} = f(x,y)}$

$0 = 2x + 3 \cdot 0$

$x = 0$

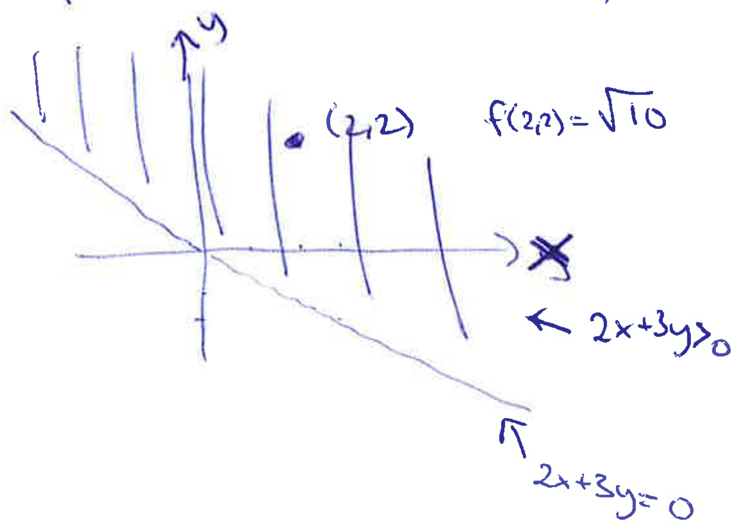
y-aksen: $x = z = 0$

$0 = 2 \cdot 0 + 3y$

$y = 0$

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

Eks: $f(x,y) = \sqrt{2x+3y}$, $D_f = \{(x,y) : 2x+3y \geq 0\}$



Skjæring med xz-planet:

xz-planet: $y=0$

$z = \sqrt{2x+3y}$

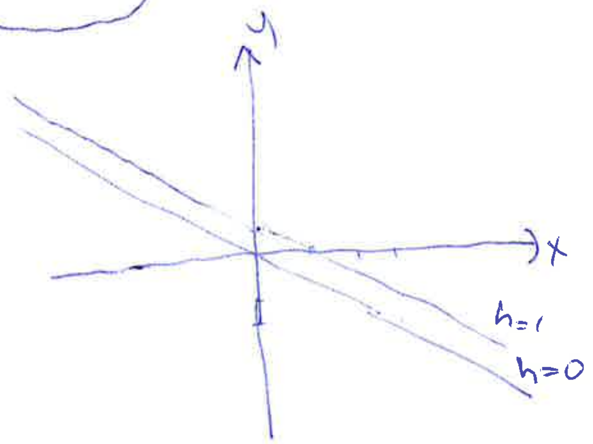
$z = \sqrt{2x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x}$

yz-planet: $x=0$

$z = \sqrt{3y} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{y}$

2) Nivåkurver:

Alle punkt i høyde h: $z=h$



$h=0$: $z = \sqrt{2x+3y} = 0$

$2x+3y=0$

$y = -\frac{2x}{3}$

$h=1$: $z = \sqrt{2x+3y} = 1$

$2x+3y = 1$

$y = \frac{3y}{3} = \frac{1-2x}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x$

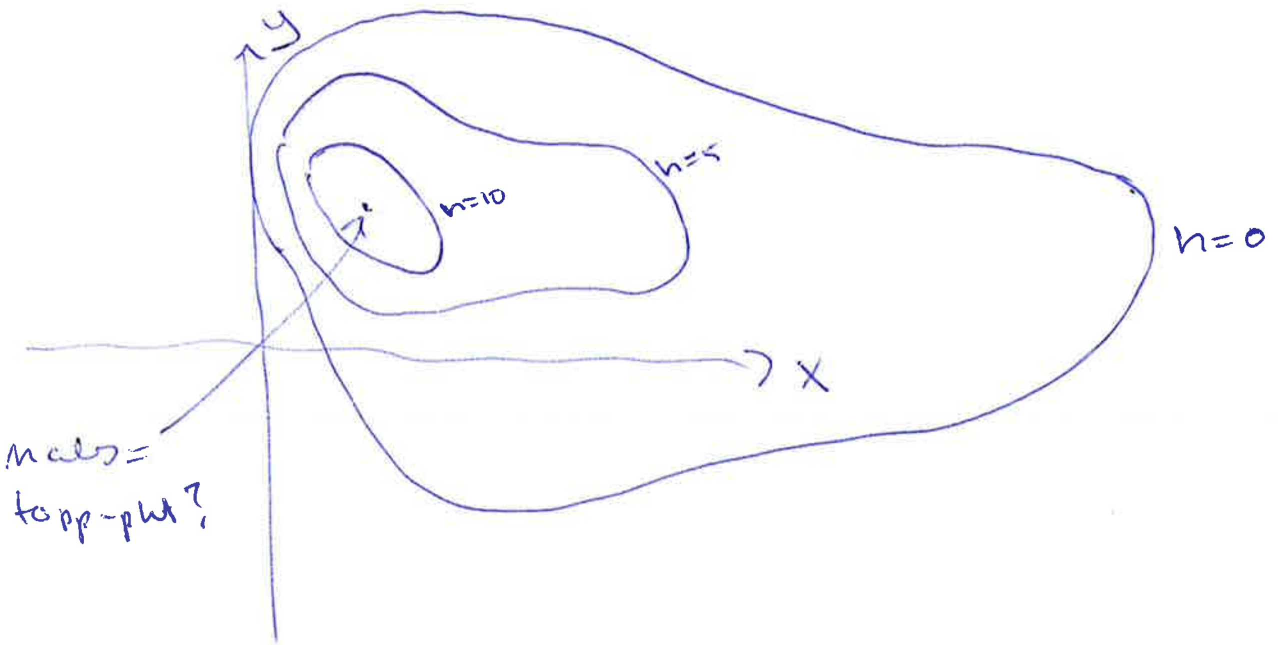
$h=-1$: $z = \sqrt{2x+3y} = -1$ ingen pkt

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

Nivåkurver:

$z = h \iff f(x,y) = h$

for ulike verdier for h



Typer av funksjoner:

Polynomfunksjoner:

Eks: $f(x,y) = 2x + 3y$ (grad 1) , $f(x,y) = x^2 + 2xy + 5y^2 + x - y$ (grad 2)

$f(x,y) = x^5 + xy - y^3$ (grad 5)

Funksjoner med røtter, potenser

Eks: $f(x,y) = 700\, x^{0,5} y^{0,3}$ $\leftarrow$ Cobb-Douglas funksjoner

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

Funksjoner med logaritmer / eksponentialuttrykk:

Ek: $f(x,y) = e^{2x+3y}$

$f(x,y) = x\ln(y) - y\ln(x)$

3 Partiell derivasjon

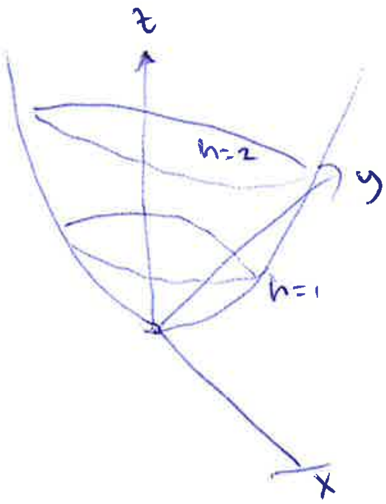
Eks: $f(x,y) = x^2 + y^2$

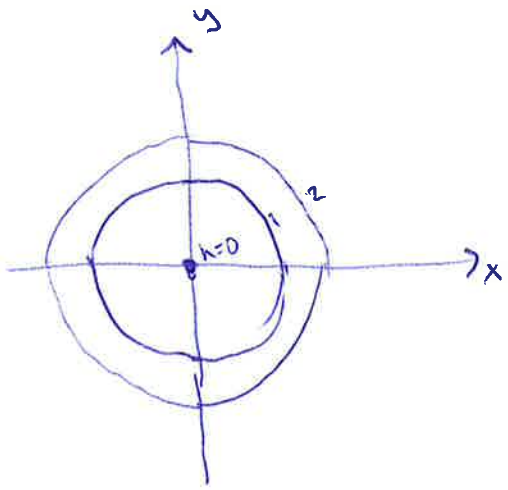
Nivåkurver:

$z=0$: $x^2+y^2=0$
$\Rightarrow (x,y)=(0,0)$

$z=1$: $x^2+y^2=1$
$\Rightarrow$ sirkel m/ rad $=1$

$z=2$: $x^2+y^2=2$
$\Rightarrow$ sirkel med $r=\sqrt{2}$





$z=-1$: $x^2+y^2=-1$
ingen pkt.

$$\underline{f(x,y)} = x^2 + y^2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f = x^2 \\ f' = 2x \\ \quad \parallel \\ f'(x) \\ \dfrac{df}{dx} = 2x \end{array}}$$

<u>Partiell derivasjon m.h.t. x:</u>

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\parallel \qquad\qquad \parallel$$

$$f'_x(x,y) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

Hvis vi tenker på y som en konstant, for eksempel $y=1$:

$$\left.\begin{array}{lll} \underline{y=1}: & f(x,1) = x^2+1 & \rightsquigarrow \text{derivert} = 2x \\ \underline{y=2}: & f(x,2) = x^2+4 & \qquad " \quad 2x \\ \underline{y=a}: & f(x,a) = x^2+a^2 & \qquad " \quad 2x \end{array}\right\} \quad f'_x = 2x$$

partiell-derivert m.h.t. x

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{Formell definisjon:}} \\ f'_x(x,y) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \\ f'_y(x,y) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} \end{array}}$$

<u>Eks:</u> $f(x,y) = x^2 + y^2$, pkt. $(1,1)$

$$f'_x = \underline{2x}$$

$$f'_y = 2y$$

$$f'_x = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^2 + \cancel{y^2}] - [x^2 + \cancel{y^2}]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} (2x+h) = \underline{\underline{2x}}$$

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

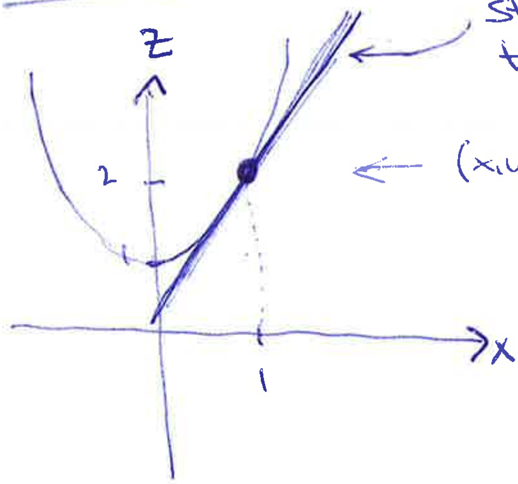
$f(x,y) = x^2+y^2 \Longrightarrow \underline{f'_x = 2x} \quad \underline{f'_y = 2y}$

I $\underline{(x,y)=(1,1)}$: $f(1,1)=2$

$f'_x(1,1)=\underline{2}$

$f'_y(1,1)=\underline{2}$

Skjæring mellom grafen og $y=1$:



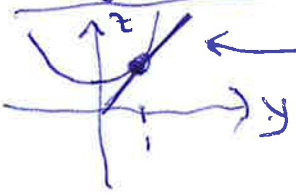
stigningstallet til tangenten $= \underline{f'_x(1,1)=2}$

← $(x,y,z)=(1,1,2)$

$z = x^2+y^2$

$z = x^2+1 \rightarrow z' = 2x$

Skjæring mellom grafen og $x=1$:



stigningstallet til tangent $= \underline{f'_y(1,1)=2}$

$z = x^2+y^2$

$z = 1+y^2$

Utregning av partiell derivete vha derivasjonsreglene

Eks: $f(x,y) = 2x+3y$

$f'_x = \underline{2}$ ← x varierer, y konstant

$f'_y = \underline{3}$ y varierer, x konstant

Eks: $f(x,y) = x^5 - y^3$

$f'_x = \underline{5x^4}$ $\qquad f'_y = \underline{-3y^2}$ ⇒ $f'_x(1,1) = 5$, $f'_y(1,1) = \underline{\underline{-3}}$

$\quad \| \qquad\qquad\qquad \|$

$f'_x(x,y) \qquad f'_y(x,y)$

Eks $f(x,y) = x^5 - xy + y^3$ $\qquad (xy)'_x = y\cdot(x)'_x = y\cdot 1$

$$f'_x = 5x^4 - (xy)'_x + 0$$
$$= 5x^4 - [(x)'_x \cdot y + x\cdot(y)'_x] + 0$$
$$= 5x^4 - (1\cdot y + x\cdot 0)$$
$$= \underline{\underline{5x^4 - y}}$$

$$f'_y = 0 - (xy)'_y + 3y^2$$
$$= -x\cdot 1 + 3y^2 = \underline{\underline{-x + 3y^2}}$$

BI HANDELSHØYSKOLEN

Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo

Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500

www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

Eks: $f(x,y) = \ln(xy - x - y) = \ln(u)$, der $u = xy - x - y$

$$f'_x = \frac{1}{u} \cdot u'_x = \frac{1}{u} \cdot (y \cdot 1 - 1) = \frac{y-1}{xy-x-y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$f'_y = \frac{1}{u} \cdot u'_y = \frac{1}{u} \cdot (x \cdot 1 - 1) = \frac{x-1}{xy-x-y}$$