

# FORELESNING 26

ELVIND ERIKSEN

MAR 14, 2017

MET1180  
MATEMATIKK

Plan:

- ① Partiellderivasjon og Hesse-matrisen
- ② Lokale maks/min i to variable

Pensum:

[E] 7.3-7.4

Husk:

- ① Kontrollprøve MET11801 Frst torsdes.
- ② Innleveringsoppgave Integrasjon.
- ③ Ny eksamensoppgave: Derivasjon (Kop. 4)

## ① Partiell-derivasjon og Hessematrisen

Exo:  $f(x,y) = xy$   $y \cdot (x)'_x$

$$f'_x(x,y) = f'_x = (xy)'_x = y \cdot 1 = y$$

$$f'_y = (xy)'_y = x \cdot 1 = x$$

~~$f'_x = y$~~

Exo:  $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

$$f'_x = 3x^2 - 3y \cdot 1 + 0 = 3x^2 - 3y$$

$$f'_y = 0 - 3x \cdot 1 + 3y^2 = -3x + 3y^2$$

Pkt: (1,1)

$$f'_x(1,1) = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = 0$$

$$f'_y(1,1) = -3 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 = 0$$

} Stigningstallene for  
funksjonen i (1,1) i  
x- og y-retning.

Defn: Et stasjonært punkt for  $f$  er et punkt

der  $f'_x = f'_y = 0$



Ekse:  $f(x,y) = xy$

$$\begin{aligned} f'_x &= y = 0 \\ f'_y &= x = 0 \end{aligned}$$

Førsteordens betingelse:

To likninger i to ubekjente.

Løsning:  $(x,y) = \underline{(0,0)}$  ← Eneste stasjonære pkt for  $f$ .

Resultat:

Et punkt  $(x^*, y^*)$  er et lokalt maks/min for  $f$

⇓ (under noen betingelser)

$(x^*, y^*)$  er stasjonært punkt.

Stasjonære pkt = kandidater for (lokalt) maks/min

Exo:  $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

Stasj.  
pkt. {

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ f'_y = -3x + 3y^2 = 0 \end{cases}$$

Førsteordensbetingelse

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ -3x + 3y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3y = 3x^2 \Rightarrow y = x^2$$

$$-3x + 3 \cdot (x^2)^2 = 0$$

$$-3x + 3x^4 = 0$$

$$3x \cdot (-1 + x^3) = 0$$

$$3x = 0 \quad \text{eller} \quad -1 + x^3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x=0 \\ y=0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x^3 = 1 \\ x = \sqrt[3]{1} = 1 \\ \begin{pmatrix} x=1 \\ y=1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Stasjonære pkt.:

$$(x,y) = (0,0), (1,1)$$

② Defn.  $(x^*, y^*)$  lokal maks for  $f(x, y)$  hvis

$$f(x^*, y^*) \geq f(x, y) \text{ for alle pnt } (x, y) \text{ i n\ae}rheten \text{ av } (x^*, y^*)$$

$(x^*, y^*)$  lokal min for  $f(x, y)$  hvis

$$f(x^*, y^*) \leq f(x, y) \text{ for alle pnt } (x, y) \text{ i n\ae}rheten \text{ av } (x^*, y^*)$$

Et stasjonært pnt som heller er lokal maks eller lokal min kalles et sadelpnt.

Hvordan klassifisere stasjonære pnt som  $\left\{ \begin{array}{l} \text{lokal maks} \\ \text{lokal min} \\ \text{sadelpnt} \end{array} \right.$

Ex: En variabel

$$f(x) = x^3 - 3x$$

$$f' = 3x^2 - 3 = 0$$

$$3x^2 = 3$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

$$x = 1$$

$$x = -1$$

Andrederivert-testen:

$$f'' = 6x$$

$$x = 1: f''(1) = 6 > 0 \quad \checkmark$$

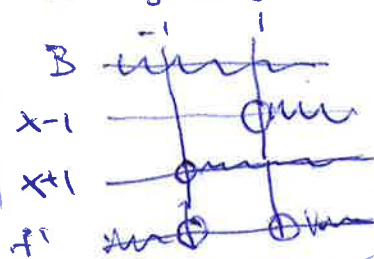
lokal min

$$x = -1: f''(-1) = -6 < 0 \quad \cap$$

lokal maks

kan generaliseres

Fortegnslinje for  $f' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$



kan ikke generaliseres

Andre ordens partiell deriverte

Ex:  $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

$f'_x = 3x^2 - 3y$

$f'_y = -3x + 3y^2$

$f''_{xx} = (3x^2 - 3y)'_x = 6x$

$f''_{xy} = (3x^2 - 3y)'_y = -3$

$f''_{yx} = (-3x + 3y^2)'_x = -3$

$f''_{yy} = (-3x + 3y^2)'_y = 6y$

Hesse-matrisen:

$$H(f) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

"  
H(f)(x,y)

Stasjonære pkt:  $(x,y) = (0,0), (1,1)$ 

1 (0,0):  $H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

1 (1,1):  $H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

Andrederivert-testen:  $f(x,y)$  funksjon i to var.

Anta at  $(x^*, y^*)$  er et stasjonært pkt for  $f$   
og at

$$H(f)(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x^*, y^*) & f''_{xy}(x^*, y^*) \\ f''_{yx}(x^*, y^*) & f''_{yy}(x^*, y^*) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

Da har vi:

i)  $\det H(f)(x^*, y^*) = AC - B^2 > 0$  og  $A > 0$

$\Rightarrow (x^*, y^*)$  lokalt min

ii)  $\det H(f)(x^*, y^*) = AC - B^2 > 0$  og  $A < 0$

$\Rightarrow (x^*, y^*)$  lokalt maks

iii)  $\det H(f)(x^*, y^*) = AC - B^2 < 0$

$\Rightarrow (x^*, y^*)$  sadelpkt.

I alle andre tilfeller er andrederivert-testen uten konklusjon



Ekso:  $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

$$f'_x = 3x^2 - 3y = 0$$

$$f'_y = -3x + 3y^2 = 0$$

$\Rightarrow$  Stasjonære pkt:

$$(x,y) = (0,0), (1,1)$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

$(x,y) = (0,0)$ :  $H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

$$A = 0 \quad B = -3$$

$$C = 0$$

$$\det = -9 < 0$$

$$AC - B^2 = -9$$

"

$(0,0)$  er et sadelpkt

$(x,y) = (1,1)$ :  $H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

$$\det = 36 - 9 = 27 > 0$$

$$A = 6 > 0$$

"

$(1,1)$  er et lokalt min

Konkl:  $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

Ingen maks

Punktet  $(1,1)$  er lokalt min og er kandidat for (globalt) min.

Merk: ① For alle "ventise" funksjoner så har vi at

$$f''_{xy} = f''_{yx}$$

⇐

$$H(f) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix}$$

$H(f)$  er symmetrisk

②

$$H(f)(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

$$\det = \frac{AC - B^2 > 0}{AC > B^2 \geq 0}$$

$$AC > 0$$

$$A > 0, C > 0$$

$$f''_{xx} > 0 \quad f''_{yy} > 0$$



lokalt min

$$A < 0, C < 0$$

$$f''_{xx} < 0 \quad f''_{yy} < 0$$



lokalt maks

$$\det = AC - B^2 < 0 \quad \text{satt}$$

inntrerker hvis  $A$  og  $C$  har motsatte fortegn  
→ sadelpkt.



③ Andrederverktøsten uten konklusjon

⇕

$$\det = AC - B^2 = 0$$

}

Må bruke andre metode.

Eks.  $f(x,y) = xy$

$$\begin{aligned} f'_x &= y = 0 \\ f'_y &= x = 0 \end{aligned}$$

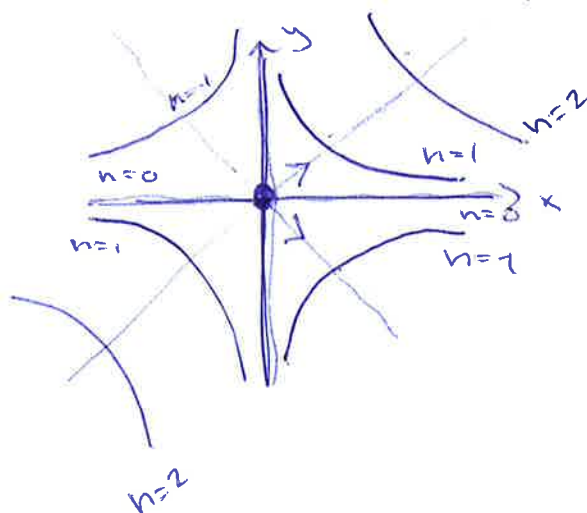
$= 0$  Stasjonære pkt.  
 $(x,y) = (0,0)$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det = -1 < 0$

Sadelpkt

Nivåkurver:



$$f(x,y) = xy = h$$

$h=0$   $xy=0$

$h=1$   $xy=1$   
 $y = 1/x$

$h=2$   $xy=2 \rightarrow y = 2/x$

$h=-1$   $xy=-1$   
 $\rightarrow y = -1/x$

Ingen maks eller min

Ex:  $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$

$$\begin{aligned} f'_x &= 4x^3 - 4y = 0 \\ f'_y &= -4x + 4y^3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x^3 &= 4y \Rightarrow y = x^3 \\ -4x + 4 \cdot (x^3)^3 &= 0 \\ -4x + 4x^9 &= 0 \\ 4x \cdot (-1 + x^8) &= 0 \end{aligned}$$

$$4x = 0 \text{ eller } x^8 = 1$$

$$\begin{array}{l|l} \underline{x=0} & x = \pm \sqrt[8]{1} \\ \underline{y=0} & x = \pm 1 \\ & \underline{y = \pm 1} \end{array}$$

Stasjonære pkt:

$(0,0), (1,1), (-1,-1) \leftarrow$

$(1,1), (-1,-1)$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

Klassifisering:

(0,0):  $H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$  saddelpkt  $(0,0)$   
 $\det = -16 < 0$

(1,1):  $H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow$  lokalt min  $(1,1)$   
 $\det = 144 - 16 = 128 > 0$   
 $A = 12 > 0$

(-1,-1):  $H(f)(-1,-1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow$  lokalt min  $(-1,-1)$

som over

Opp.  $f(x,y) = x^3 + y^3$

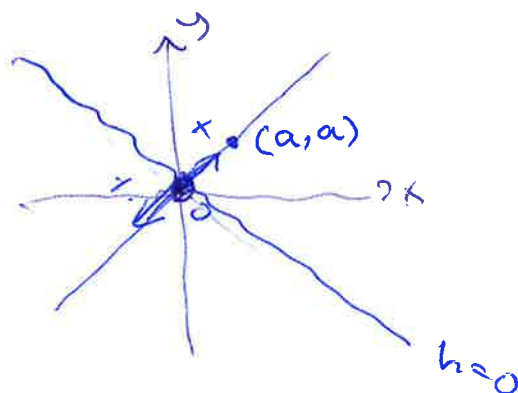
$$\begin{aligned} f'_x &= 3x^2 = 0 & \Rightarrow x &= 0 \\ f'_y &= 3y^2 = 0 & \Rightarrow y &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \text{Stasjon. pkt.: } (0,0)$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

(0,0):  $H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
det = 0

(0,0) kan ikke klassifisere u.h.a. andredrert-testen.

Nivåkurver:



$$f(0,0) = 0$$

$$\begin{aligned} h=0: \quad x^3 + y^3 &= 0 \\ y^3 &= -x^3 \\ y &= \sqrt[3]{-x^3} = -x \\ y &= -x \end{aligned}$$

Ser på (a,a):

$$\begin{aligned} f(a,a) &= a^3 + a^3 = 2a^3 \\ &\begin{array}{l} a > 0 \quad \quad \quad a < 0 \\ 2a^3 > 0 \quad \quad \quad 2a^3 < 0 \\ \oplus \quad \quad \quad \ominus \quad \quad \quad \oplus \end{array} \end{aligned}$$

(0,0) Sadelpkt.

(kan ikke være lokalt maks eller min)