Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo

Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500

www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

FORELESNING 27

MET 1180
MATEMATIKK

EIVIND ERIKSEN   MAR 21, 2017

Plan:

1. Gjennomgang: Innlevering Integrasjon
2. Maks/min-problemer
3. Linearisering
4. Tangenter til nivåkurver

} Rakk ikke dette i dag, kommer neste gang.

Innlevering: Lineære likn. system og matriser (Kap 6)
Frist: 4. april.

1. Innlevering integrasjon

4. c)

$$\int \frac{2}{e^x - e^{-x}}\, dx = \int \frac{2}{u - \frac{1}{u}} \cdot \frac{du}{e^x}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= e^x \\ du &= e^x\, dx \end{aligned}}$$

($\frac{1}{u} = e^{-x}$, $e^x = u$)

$$= \int \frac{2}{u^2 - 1}\, du$$

$$= \int \frac{-1}{u+1} + \frac{1}{u-1}\, du$$

$$= -\ln|u+1| + \ln|u-1| + C$$

$$= \underline{\ln|e^x - 1| - \ln|e^x + 1| + C}$$

$$\frac{2}{u^2-1} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u-1}$$

$$\boxed{2 = A\cdot(u-1) + B(u+1)}$$

$\underline{u=1}$: $2 = A \cdot 0 + B \cdot 2$
$\underline{B=1}$

$\underline{u=-1}$: $2 = A \cdot (-2) + B \cdot 0$
$\underline{A=-1}$

BI HANDELSHØYSKOLEN

Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo

Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500

www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

5. b) $\int_2^\infty \frac{1}{x^2+5x-6}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x^2+5x-6}\,dx$

$$\int_2^b \frac{1}{x^2+5x-6}\,dx = \int_2^b \frac{1/7}{x-1} + \frac{-1/7}{x+6}\,dx$$

$$= \left[\frac17 \cdot \ln|x-1| - \frac17 \cdot \ln|x+6| + C\right]_2^b$$

$$= \underbrace{\left(\frac17 \cdot \ln|b-1| - \frac17 \cdot \ln|b+6|\right)}_{\infty \quad\quad \infty} - \left(\frac17 \cdot \underbrace{\ln 1}_{=0} - \frac17 \cdot \ln 8\right)$$

$b \to \infty$

"$\infty - \infty$"

$\downarrow \frac17 \ln 8$

$\boxed{\ln a - \ln b = \ln(a/b)}$

$$= \frac17 \ln \frac{|b-1|}{|b+6|} \xrightarrow{\to 1} \frac17 \ln 1 = 0$$

$$\lim_{b\to\infty} \frac{b-1}{b+6} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{b\to\infty} \frac{(b-1)\cdot\frac1b}{(b+6)\cdot\frac1b} = \lim_{b\to\infty} \frac{1-\frac1b}{1+\frac6b}$$

$$= \frac17 \cdot \ln(8)$$

BI HANDELSHØYSKOLEN

Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo

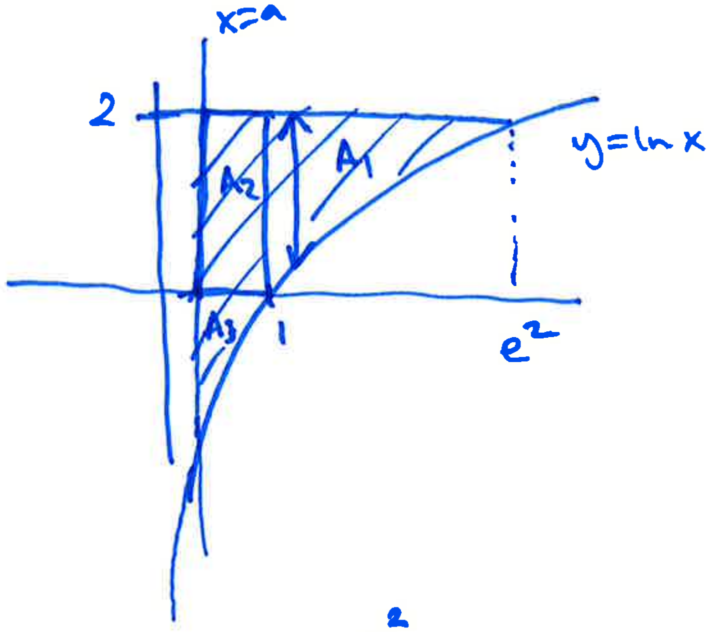
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500

www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

6. Området R: begrenset av $y = \ln x$

$y = 2$

$x = a$ $(0 < a < 1)$



$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx$$
$$= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$
$$= x \ln x - x + C$$

$$A = \int_a^{e^2} (2 - \ln x) \, dx = \Big[2x - (x \cdot \ln x - x) \Big]_a^{e^2}$$

$$\underset{3x - x\ln x}{\parallel}$$

$$= (3e^2 - e^2 \cdot \ln(e^2)) - (3a - a\ln a)$$
$$= \underline{e^2 - 3a + a\ln a}$$

b) $$\lim_{a\to 0^+} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{a} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ -\infty}}{\ln a} = \lim_{a \to 0^+} \frac{\ln a \nearrow -\infty}{1/a \searrow \infty}$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{a} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \infty}}{\frac{1}{a}} = 1$$

$$= \lim_{a\to 0^+} \frac{1/a \cdot a^2}{-1/a^2 \cdot a^2} = \lim_{a \to 0^+} \frac{a}{-1} = \frac{0}{-1} = \underline{\underline{0}}$$

c) $$\text{Areal} = \lim_{a \to 0^+} (\underset{\substack{\downarrow \\ e^2}}{e^2} - \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{3a} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{a\ln a}) = \underline{\underline{e^2}}$$

Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

2 Max/min-problem: max/min $f(x,y)$

Repetisjon: Metode for å finne stasjonære punkt og klassifisere dem.

1 Finn stasjonære punkt

Løs FOC: $f'_x = f'_y = 0$
(førsteordensbetingelser)

Eks: $f(x,y) = e^{xy}$

1 $f'_x = e^{xy} \cdot (xy)'_x$

$f'_y = e^{xy} \cdot (xy)'_y$

FOC:

$f'_x = \boxed{e^{xy} \cdot y = 0}$

$f'_y = \boxed{e^{xy} \cdot x = 0}$

$y=0, \ x=0$

$\Downarrow$

$(x,y) = \underline{(0,0)}$

2 Klassifiser hvert stasjonært punkt

Regn ut Hesse-matrisen

$$H(f) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix}$$

og sett inn $(x,y) = (x^*, y^*)$ for det stasjonære punkt.

$$H(f)(x^*,y^*) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

$A = f''_{xx}(x^*,y^*)$

$B = f''_{xy}(x^*,y^*)$

$C = f''_{yy}(x^*,y^*)$

Andre derivert-testen:

$\det H = AC - B^2 > 0$ og $A > 0 \Rightarrow (x^*,y^*)$ lokalt min

$\det H = AC - B^2 > 0$ " $A < 0$ " lokalt maks

$\det H = AC - B^2 < 0 \Rightarrow$ " sadelpunkt

$\det H = AC - B^2 = 0$ Testen kan ikke brukes

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

Eks: $f(x,y) = e^{xy}$

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = e^{xy} \cdot y = 0 \\ f'_y = e^{xy} \cdot x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Stasj. pkt. } (x,y) = \underline{(0,0)}$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} y^2 \cdot e^{xy} & (xy+1)\,e^{xy} \\ (xy+1)\,e^{xy} & x^2 \cdot e^{xy} \end{pmatrix} \Rightarrow H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f''_{xx} = (e^{xy} \cdot y)'_x = y \cdot e^{xy} \cdot y = y^2 \cdot e^{xy}$$

$$f''_{xy} = (e^{xy} \cdot y)'_y = (e^{xy} \cdot x) \cdot y + e^{xy} \cdot 1$$
$$= e^{xy} \cdot (xy+1)$$

$$f''_{yy} = (e^{xy} \cdot x)'_y = x \cdot e^{xy} \cdot x = x^2 e^{xy}$$

Andrederivert-testen:

$\det H = 0^2 - 1^2 = -1 < 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$ er et sadelpunkt.

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

Resultat:

Hvis (x^*, y^*) er et lokalt maks/min for $f(x,y)$, så er enten

1) et stasjonært pkt.
2) et annet kritisk pkt, dvs $\begin{cases} f'_x(x^*, y^*) \\ f'_y(x^*, y^*) \end{cases}$ ikke eks.
3) et randpkt.

Eks: $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{u}$, $u = x^2+y^2$ $\quad D_f = \mathbb{R}^2$ = alle pkt. (x,y)

$$f'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f'_y = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'_y = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2y = \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Stasj. pkt:

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \implies x = 0 \\ f'_y &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \implies y = 0 \end{aligned}\right\}$$

$(x,y) = (0,0)$ men ikke st. pkt. pga null i nevner.

Konkl:

$$\left.\begin{aligned} &f'_x(0,0) \text{ ikke def.} \\ &f'_y(0,0) \text{ — " —} \end{aligned}\right\} \implies$$

Ingen stasjonære pkt.

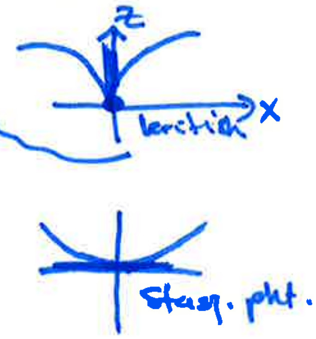
Pkt. $(0,0)$ er kritisk pkt.

Defn: Et kritisk pkt er et pkt (x^*, y^*) som er stasjonært eller slik at $\begin{cases} f'_x(x^*, y^*) \\ f'_y(x^*, y^*) \end{cases}$ ikke eksisterer

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$: $f(0,0) = \sqrt{0} = 0$

minimumspkt!



Randpkt:

Eks: $f(x,y) = \sqrt{x+y} = \sqrt{u}$, $u = x+y$

$f'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}$

$f'_y = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}$

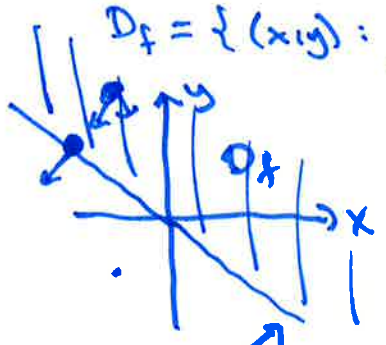
1) Stasj. pkt.: Ingen

2) Andre kritiske pkt: $x+y=0$

~~$x+y<0$~~

D_f: $f(x,y) = \sqrt{x+y}$

$D_f = \{(x,y) : x+y \geq 0\}$



$x+y=0 \Rightarrow y=-x$

Eks:

$f(x) = x^3+x-1$,

$D_f = [0,1]$

$f' = 3x^2+1 = 0$

$3x^2 = -1$

$x^2 = -1/3$

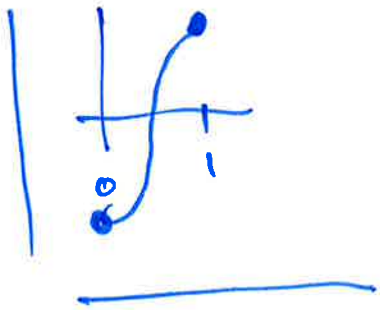
ingen stasj. pkt.

ingen kritiske pkt.

Randpkt:

Min $\rightarrow x=0 : f(0) = -1$

Max $\rightarrow x=1 : f(1) = 1$



3) Randpkt. $\{(x,y) : x+y=0\}$

Defn: (x^*,y^*) er randpkt for $f(x,y)$

hvis i) (x^*,y^*) er i D_f

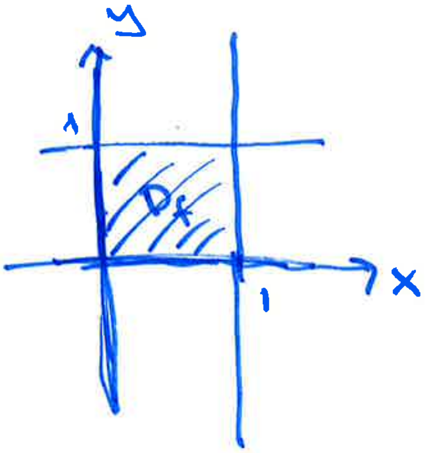
ii) Det fins pkt vilkårlig nært (x^*,y^*) som er utenfor D_f.

Konkl: Kandidater for max/min = Alle (x,y) s.a. $x+y=0$ (linjen)

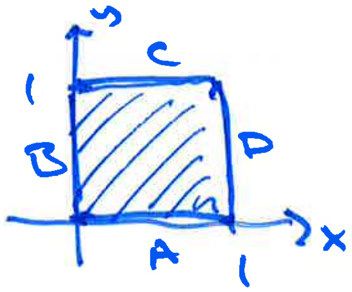
Min: Alle (x,y) med $x+y=0$ $f(x,y)=0$

Eks: $f(x,y) = e^{x+y} = e^u,\ u = x+y$, $D_f:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= e^{x+y}\cdot 1 = e^{x+y} = 0 \\ f'_y &= e^{x+y}\cdot 1 = e^{x+y} = 0 \end{aligned}\right\}\ \text{FOC}$$



1. Ingen stasjonære pkt.
2. Ingen kritiske pkt.
3. Randpkt: A, B, C, D



A: $y=0$, $0 \le x \le 1$ $\Big\}$ $f(x,y) = e^{x+\overset{\shortparallel}{0}} = e^x$

$(e^x)' = e^x > 0$

$\boxed{\begin{aligned} &\text{Min: } f(0,0) = 1 \\ &\text{Max: } f(1,0) = e \approx 2{,}7 \end{aligned}}$

B: $x=0$, $0 \le y \le 1$ $\Big\}$ $f = e^{0+y} = e^y$

$(e^y)' = e^y > 0$

$\boxed{\begin{aligned} &\text{Min: } f(0,0) = 1 \\ &\text{Max: } f(0,1) = e \end{aligned}}$

C: $y=1$, $0 \le x \le 1$ $\Big\}$ $f = e^{x+1}$

$(e^{x+1})' = e^{x+1} > 0$

$\boxed{\begin{aligned} &\text{Min: } f(1,0) = e \\ &\text{Max: } f(1,1) = e^2 \end{aligned}}$

D: $x=1$, $0 \le y \le 1$ $\quad f = e^{1+y}$

$(e^{1+y})' = e^{1+y} > 0$

$\boxed{\begin{aligned} &\text{Min: } f(1,0) = e \\ &\text{Max: } f(1,1) = e^2 \end{aligned}}$

Blant pkt på randen A+B+C+D:

Max: $f(1,1) = e^2$

Min: $f(0,0) = 1$