

FORELESNING 2S

Eivind Eriksen

MAR 22, 2017

MET1180

MATEMATIKK

Plan:

- ① Linearisering i to variabler
- ② Tangenter til nivåkurver
- ③ Optimering med bibetning

Periode:

[E] 7.4-7.6

Husk: Inne forelesning neste uke men oppgaverregning.

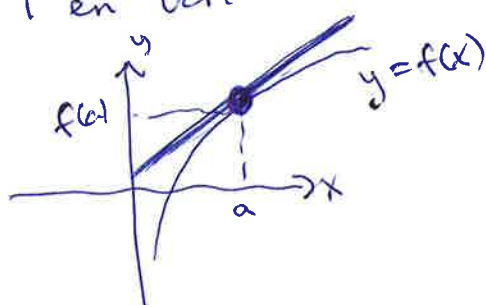
Seminargrupper denne uken: Innleveringsoppg. Kap 6

* Frist innlevering - Kap 6: Tirsdag 4. april (neste tirsdag)

Jeg er bortreist, dere kan levere på oppg. regning.
eller i boksen utenfor mitt
kontor (B4-032).

① Linearisering i to variable

I én variabel:



Linearisering (én variabel) i $x=a$
= tangenten til f i $x=a$

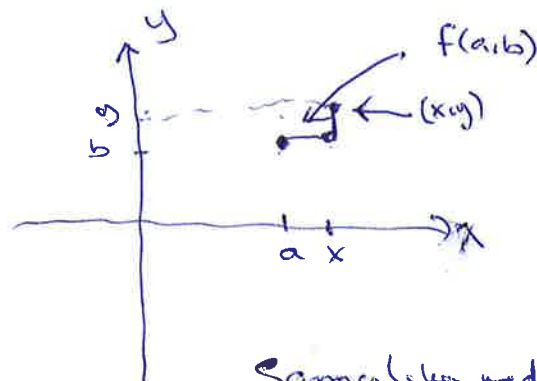
$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

$$y = \underline{f(a) + f'(a) \cdot (x - a) = L(x)}$$

Linearisering i to variable

$f(x,y)$: funksjon

$(x,y) = (a,b)$: punkt



Sammenlign med:

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$L(x,y) = f(a,b) + f'_x(a,b) \cdot (x-a) + f'_y(a,b) \cdot (y-b)$$

Ek: $f(x,y) = x^2y^3 - x^4 + 2y^2$, punkt (1,1)

$$f(1,1) = 1 - 1 + 2 = \underline{2}$$

$$f'_x = 2xy^3 - 4x^3 \Rightarrow f'_x(1,1) = 2 - 4 = \underline{-2}$$

$$f'_y = x^2 \cdot 3y^2 + 2 \cdot 2y = 3x^2y^2 + 4y \Rightarrow f'_y(1,1) = 3 + 4 = \underline{7}$$

$$L(x,y) = 2 + (-2) \cdot (x-1) + 7 \cdot (y-1)$$

$$= \underline{2 - 2(x-1) + 7(y-1)} \simeq f(x,y) \text{ n\aa}r$$

$$= 2 - 2x + 2 + 7y - 7$$

$$= \underline{-3 - 2x + 7y}$$

(x,y) er n\aa r (1,1)

$$f(1, 0.9) \simeq L(1, 0.9) = 2 - 2 \cdot 0.1 + 7 \cdot (-0.1) = \underline{\underline{1.1}}$$

② Tangenter til nivåkurver

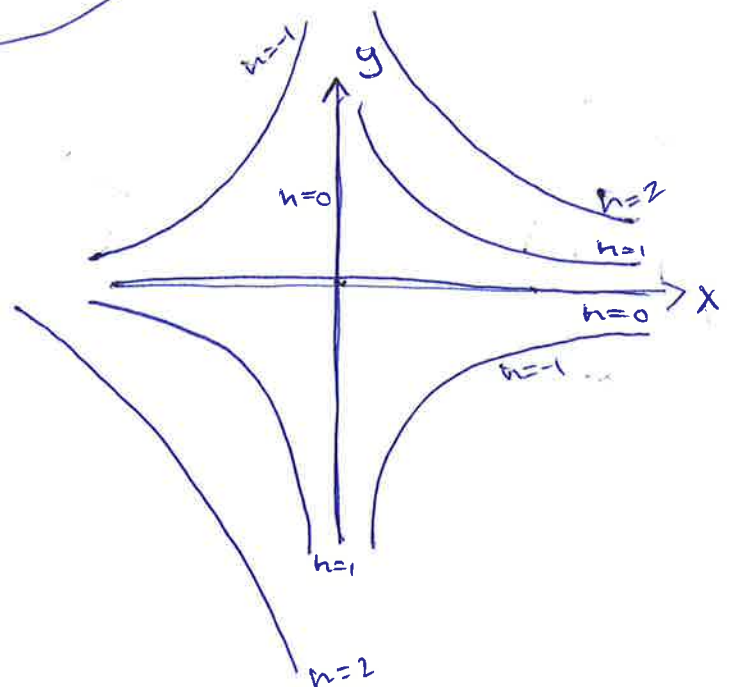
$f(x,y)$: funksjon i to $\leadsto$ $f(x,y) = \underline{h}$ nivåkurve til f i høyde $\underline{h}$
variablene

Ex: $f(x,y) = xy \leadsto \underline{xy = h}$

$h=1$: $xy=1$: $y=1/x$
 $h=0$: $xy=0$: $x=0$
eller $y=0$

$h=2$: $xy=2$: $y=2/x$

$h=-1$: $xy=-1$: $y=-1/x$

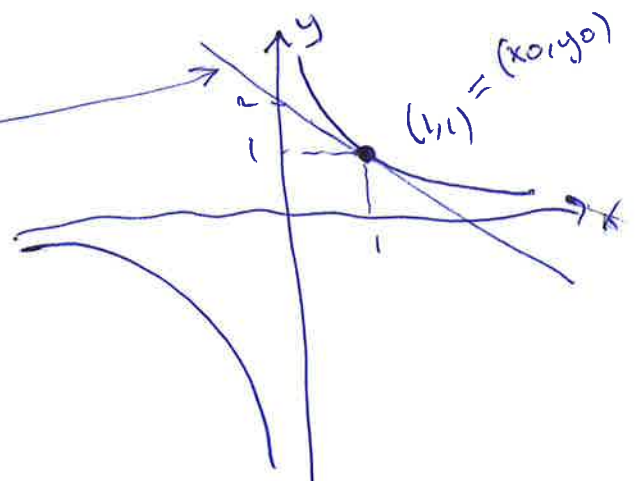


Ex: $f(x,y) = xy \leadsto$ Nivåkurven i høyde $h=1$

$xy=1 \Leftrightarrow y=1/x$

tangenter til
nivåkurver

$y - y_0 = y'(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)$



Hvordan finner vi y' ?

$$xy=1 \Rightarrow y=1/x \Rightarrow y' = (1/x)' = -x^{-2} = -1/x^2$$

$$y'(1,1) = -1/1^2 = -1$$

Tangent:

$$y-1 = -1 \cdot (x-1)$$

$$y = 1 - (x-1)$$

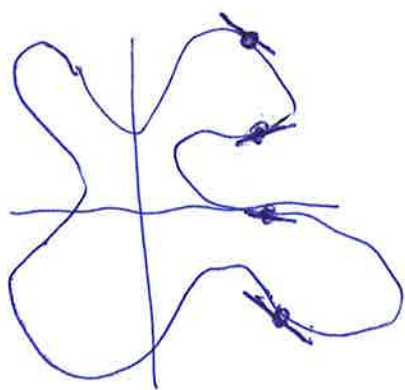
$$y = \underline{-x+2}$$

a) Hvis vi kan løse $f(x,y)=h$ for y , så kan vi finne tangenten som før.

b) Hva om vi ikke kan løse ligningen for y ?

Ex: $f(x,y) = x^2y^3 - x^4 + 2y^2 = h$ ← Vanskelig å løse for y .

Hvordan finne y' ? $y'(x_0, y_0)$ ← avhenger av både x og y !



Metode I: Implisitt derivasjon

$$(x^2y^3 - x^4 + 2y^2)'_x = (h)'$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x \cdot y^3 + x^2 \cdot 3y^2 \cdot y' \\ -4x^3 + 4y \cdot y' \end{array} \right\} = 0$$

$$y' = \frac{-(2xy^3 - 4x^3)}{3x^2y^2 + 4y} \Leftrightarrow \underbrace{(2xy^3 - 4x^3)}_{f'_x} + \underbrace{(3x^2y^2 + 4y)}_{f'_y} y' = 0$$

Når $f(x,y)=h$ er en nivåkurve for f i høyde h ,

er

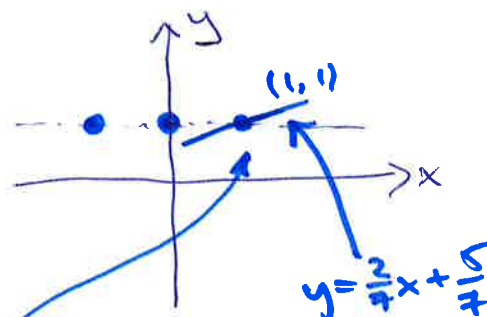
$$y' = - \frac{f'_x}{f'_y}$$

Eksp. $f(x,y)$
 $x \cdot y = 1 \rightarrow y = 1/x \rightarrow y' = -\frac{1}{x^2}$

$$y' = - \frac{y}{x} = - \frac{1/x \cdot x}{x \cdot x} = - \frac{1}{x^2}$$

Eksp. $x^2 y^3 - x^4 + 2y^2 = 2 \rightarrow ?$
 $f(x,y)$

$$y' = - \frac{2xy^3 - 4x^3}{3x^2y^2 + 4y}$$



Finn pkt med $y=1$:

$$x^2 - x^4 + 2 = 2$$

$$x^2 - x^4 = 0$$

$$x^2(1 - x^2) = 0$$

$$x=0 \text{ eller } x^2=1$$

$$x=\pm 1$$

Tangent i $(1,0)$:

$$y'(1,0) = \frac{0-4}{0+0} = \frac{0}{0}$$

~~divergent med snitt~~

$$y'(1,1) = - \frac{-2}{7} = \underline{\underline{2/7}}$$

Tangenten:

$$y-1 = \frac{2}{7} \cdot (x-1)$$

$$y = \frac{2}{7}x - \frac{2}{7} + 1$$

$$\boxed{y = \frac{2}{7}x + \frac{5}{7}}$$

Huener:

$$f(x,y) = h$$

$$f'_x + f'_y \cdot y' = 0$$

$$f'_y \cdot y' = -f'_x$$

Formel for y'
på nivåkurven
 $f(x,y) = h$:

$$\underline{\underline{y' = -f'_x / f'_y}}$$

I økonomi-
litteraturen:
 f'_x / f'_y kalles
marginal
Substitusjons-
rate

Totalderivert:

Sammenheng mellom partiel derivasjon
og implisitt derivasjon.

Ex: $xy = 1$:

$$f(x,y) = xy$$

Partiell derivasjon:

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 1 \cdot y = y$$

$$f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot 1 = x$$

endrer x
holder y konst.

x og y ligger på
en nivåkurve

Totalderivert:

Når ~~$xy = 1$~~
($xy = 1$)

vil en endring i x gi en endring i y .

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'$$

total
derivert

direkte
endring
pga
 Δx

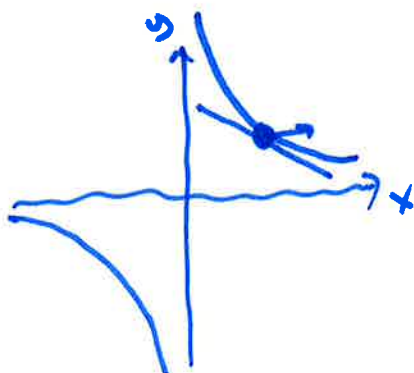
indirekte
endring
pga
 $\Delta x \rightarrow \Delta y$

$$(x_0, y_0) = (1, 1)$$

$$x = 1, 1; \Delta x = 0,1$$

$$\Delta y \approx y' \cdot \Delta x$$

$$= -1 \cdot 0,1 = -0,1$$



③ Optimering : max/min - problemer

- (a) Optimering uten bivilkår : $\max/\min f(x,y) = 2x - x^2 - x^3y^2$
- (b) Optimering med bivilkår : $\max/\min f(x,y) = 2x - x^2 - x^3y^2$
når $2x + 3y = 10$

(a) $\max/\min f(x,y)$: uten bivilkår

Metode:

Kandidatpunkter for max/min:

a) stasjonære pkt : $f'_x = f'_y = 0$

førsteordensbet.

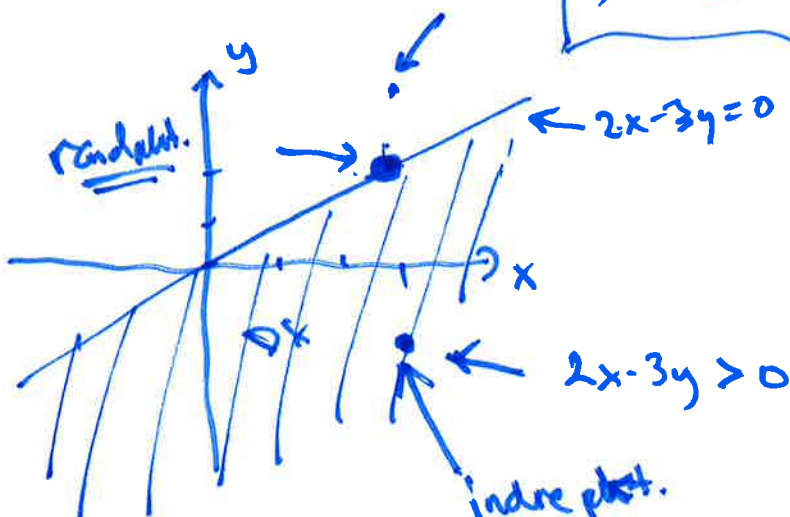
b) andre kritiske pkt : f'_x eller f'_y eksisterer ikke

$D_f: 2x - 3y \geq 0$

$2x - 3y < 0$

c) randpkt :

pkt : D_f nær slik at pkt utenfor D_f ligger 'endelig' nært



Ek: $f(x,y) = \sqrt{2x - 3y}$

$D_f: 2x - 3y \geq 0$



Klassifisering av stasjonære pkt

Kandidat:

- a) stasjonære pkt
- b) kritiske pkt
- c) randpkt

Andrederivert-testen

$$H(f)(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

$$\det H(f)(x^*, y^*)$$

$$= AC - B^2$$

$$AC - B^2 > 0, A > 0: \text{lok. min}$$

$$AC - B^2 > 0, A < 0: \text{lok. maks.}$$

$$AC - B^2 < 0: \text{Sadelpkt.}$$

$$AC - B^2 = 0: \text{ingen konklusjon}$$

Viktig merke:

tillatte pkt.

Både funksjonen f og D_f er viktige når vi skal løse optimeringsproblemer.

Ekstremverdisetningen:

Vi ser på et maks/min-problem, der $f(x, y)$ er funksjonen vi skal maksimere/minimere, og D er mengden av punkter vi kan bruke.

tillatte punkter.

Hvis f er kontinuerlig og D er lukket og begrenset, så har problemet både et maks. og et min.

Ekse: $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$ Finn max/min $f(x,y)$

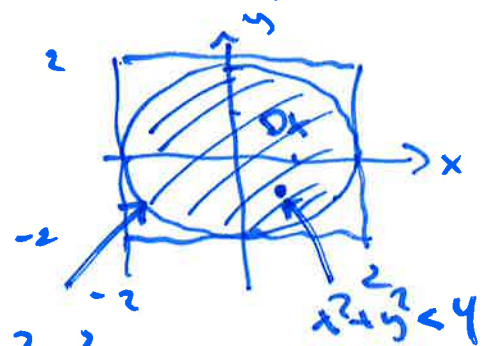
D = mengden av tillatte pkt = D_f

D_f : $\boxed{4-x^2-y^2 \geq 0} \Leftrightarrow 4 \geq x^2+y^2$
 $x^2+y^2 \leq 4$

$\rightarrow 4-x^2-y^2=0$
 $4 = x^2+y^2$

Sirkel: sentr: $(0,0)$
 $r=2$

$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$



randpkt.

$D = D_f$ = tillatte pkt: punkter på sirkelen
indre pkt. $\rightarrow$ punkter innenfor sirkelen

D lukket: Alle randpkt for D er med i D .
 $x^2+y^2 \leq 4$ er lukket (ok)

$\leq, \geq, =$ gir lukkede mengder

D begrenset: D ligger innenfor et begrenset (endelig område)

$x^2+y^2 \leq 4$
begrenset (ok)

Alle (x,y) i D er slik at $a \leq x \leq A$
 $b \leq y \leq B$
for endelige tall a, b, A, B .

$-2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2$

Undersøk om $D = D_f$ er begrenset:

Finn det en største/minste verdi av x for pkt. $(x,y) \in D$?
verdi av y ———

Det er altså en fordel $\vec{a}$ ha en skisse av D i xy -koordinat systemet.

Ex: $D: xy \geq 1$

Tillatte pkt i
max/min $\sqrt{xy-1}$
siden $D_f \equiv xy-1 \geq 0$

Er D ubegrenset? Ja, siden sitt verd ≥ 1

Er D begrenset? Nei, siden $x \rightarrow \infty$ innunder D_f .

Inn største verdi av x .

F.eks: $x=a, y=1$ er med i D_f for alle $a \geq 1$ (dvs $a \rightarrow \infty$)

