

FORELESNING 29

EIVIND ERIKSEN, APR 18 2017

MET1180

MATEMATIKK

Plan:

- ① Optimering med bivilkårer
- ② Lagrange - problemer

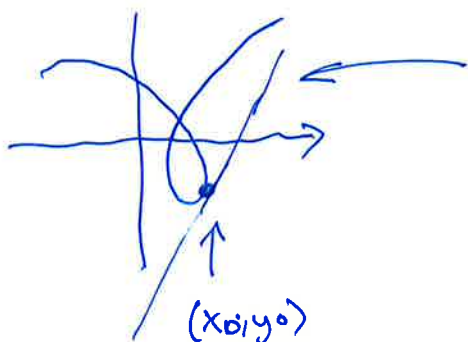
Pensum:

[E] 7.5-7.6

Repetisjon:

a) Tangent til nivåkurver:

$f(x,y) = h$ ← nivåkurven til f i høyde $z=h$



tangent linjen i (x_0, y_0) :

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0) \quad \text{der } a = y'(x_0, y_0)$$

$$y'(x_0, y_0) = - \frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}$$

$$\left(y' = - \frac{f'_x}{f'_y} \right)$$

Ex:

$$y^2 - x^3 = 1$$

A: $(-1, 0)$

B: $(0, 1)$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x,y) = y^2 - x^3, \quad h=1 \end{array} \right.$$

B: $y - 1 = a \cdot (x - 0)$

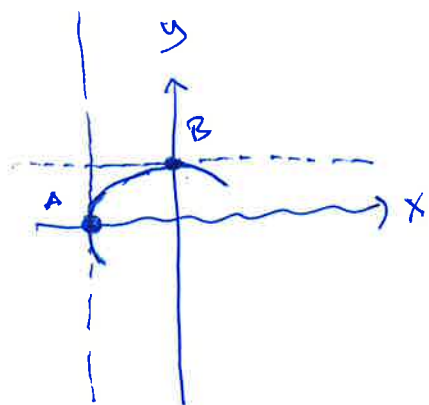
$$y - 1 = ax \Rightarrow y = ax + 1$$

B:
" (0,1)

$$y = ax + 1$$

$$a = \frac{3}{2} \cdot \frac{0^2}{1} = 0$$

$$\underline{\underline{y = 1}}$$



$$\underline{\underline{a = ?}}$$

$$f(x,y) = y^2 - x^2$$

$$f'_x = -2x$$

$$f'_y = 2y$$

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{(-2x)}{2y} = \frac{x}{y}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A:}} \quad y'(-1,0) &= \frac{3}{2} \cdot \frac{(-1)^2}{0} \\ " \quad (-1,0) &= \pm \infty \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{x = -1}} \quad \text{tangentlinjen}$$

b) Optimering med bibetingelser

Ekse: 1) max/min $f(x,y) = e^{xy}$ når $0 \leq x, y \leq 1$

Optimeringsproblemet
= den funksjon som skal maksimeres / minimeres

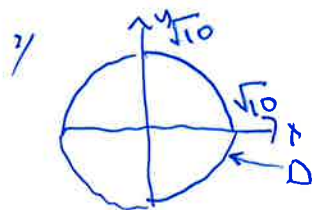
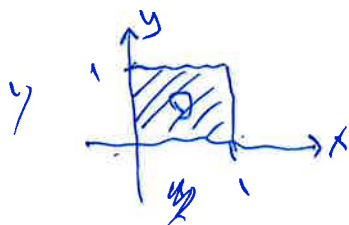
bibetingelser

$$\begin{aligned} x &\geq 0 & y &\geq 0 \\ x &\leq 1 & y &\leq 1 \end{aligned}$$

$D =$ mengden av tilatte punkter

(dvs oppfyller alle bibetingelsene)

2) max $f(x,y) = x + 3y$
når $x^2 + y^2 = 10$



① Defn: Lagrange problem = optimeringsproblem med
betingelser, der alle
betingelsene er likninger

Ex: $\max f(x,y) = x + 3y$ når $x^2 + y^2 = 10$

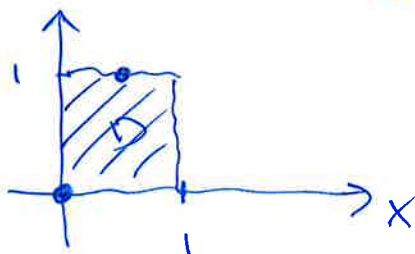
Kuhn-Tucker problem = optimeringsproblem med
betingelser, der alle
betingelsene er
lukkede ulikheter ($\leq, \geq$)

Ex: $\max/\min f(x,y) = e^{xy}$ når $0 \leq x, y \leq 1$

Ex: Løsningsmetode når betingelsen er enkle
(for eksempel rett ved rette linjer)

$$\max/\min f(x,y) = e^{xy} \quad \text{når} \quad 0 \leq x, y \leq 1$$

obj. funkt. betingelsene



Typar av max/min-plt:

- i) Stasjonære plt
- ii) andre kritiske plt
- iii) rand plt.

$$\begin{aligned} f'_x &= (e^{xy})'_x = e^{xy} \cdot y = 0 \\ f'_y &= (e^{xy})'_y = e^{xy} \cdot x = 0 \end{aligned}$$

1) Stasjonære plt: $(x,y) = (0,0)$
2) Andre kritiske plt: ingen

Randplt: Et punkt som har
punkter i D og punkter
utenfor D uendelig nært.

3) Randplt:

I praksis: Se på løsningene.

$$\begin{aligned} x \geq 0 \quad y \geq 0 &\leadsto \\ x \leq 1 \quad y \leq 1 &\leadsto \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x=0 \quad y=0 \\ x=1 \quad y=1 \end{aligned}$$

Kandidatoppgave:

a) $y=0, 0 \leq x \leq 1$

$$f(x,0) = e^0 = \underline{1}$$

b) $x=0, 0 \leq y \leq 1$

$$f(0,y) = e^0 = \underline{1}$$

c) $x=1, 0 \leq y \leq 1$

$$f(1,y) = e^{1 \cdot y} = \underline{e^y}$$

$$(e^y)'_y = e^y > 0 \quad f \text{ vokser på } (c)$$

min: $f(1,0) = e^0 = 1$

max: $f(1,1) = e^1 = e \approx 2,72$

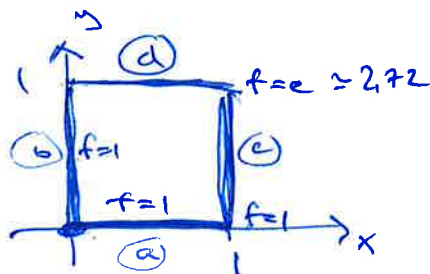
d) $y=1, 0 \leq x \leq 1$

$$f(x,1) = e^{x \cdot 1} = e^x$$

$$(e^x)'_x = e^x > 0 \quad f \text{ vokser på } (d)$$

min: $f(0,1) = e^0 = 1$

max: $f(1,1) = e^1 = e \approx 2,72$

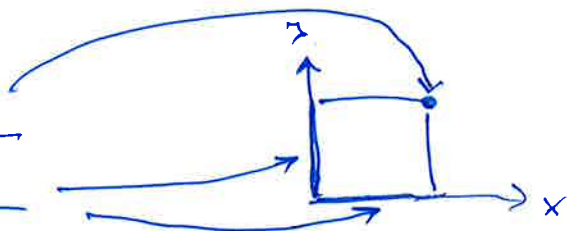
Objektivfunksjon:

$$f(x,y) = e^{xy}$$

Konkl:

$$\max = f(1,1) = \underline{e}$$

$$\min = f(0,0) = \underline{1}$$



② Lagranges metode

Vi ser på et Lagrange-problem:

Std.
form:

$$\begin{array}{llll} \max/\min & \underbrace{f(x,y)}_{\text{obj. funksjon } f} & \text{når} & \underbrace{g(x,y)=a}_{\substack{\text{bibrutvise} \\ g(x,y): \text{ funksjon} \\ a: \text{ konstant}}} \end{array}$$

Ek: $\max f(x,y) = x + 3y$ når $\underline{x^2 + y^2 = 10}$

$f(x,y) = x + 3y$ obj. funksjon

$x^2 + y^2 = 10 \rightarrow$ kan velge:

$$\begin{cases} g(x,y) = x^2 + y^2 \\ a = 10 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 - 10 = 0$

—||—

$$\begin{cases} g(x,y) = x^2 + y^2 - 10 \\ a = 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{array}{llll} \max & \underbrace{f(x,y) = x + 3y}_{\text{obj. funksjon}} & \text{når} & \underbrace{x^2 + y^2 = 10}_{\substack{\uparrow \\ g(x,y)}} \quad \underbrace{\quad}_{\substack{\uparrow \\ a}} \end{array}$$

Lagrange's metode:

Lagrange-multiplikatoren

$$\begin{aligned} L(x,y;\lambda) &= f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y) \\ &= x + 3y - \lambda \cdot (x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Førsteordens betingelsene (Foc)

$$L'_x = f'_x - \lambda \cdot g'_x = 0$$

$$L'_y = f'_y - \lambda \cdot g'_y = 0$$

Uten bibetingelse:

$$f'_x = 0$$

$$f'_y = 0$$

Med bibetingelse:

$$L = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y)$$

Ex: $L = x + 3y - \lambda(x^2 + y^2)$ ←

$\max f = x + 3y \text{ når } x^2 + y^2 = 10$

Foc:

$$L'_x = 1 - \lambda \cdot 2x = 0$$

$$L'_y = 3 - \lambda \cdot 2y = 0$$

C:

$$x^2 + y^2 = 10$$

Foc + C = førsteordens-
betingelser + bibetingelser
→ tre likninger i tre
ulbante

Løsning av Foc + C

↓

Kandidater for max

$$\begin{aligned} (1) \quad & 1 - \lambda \cdot 2x = 0 \\ (2) \quad & 3 - \lambda \cdot 2y = 0 \\ (3) \quad & x^2 + y^2 = 10 \end{aligned}$$

||

$$\begin{aligned} (1) \quad & 1 = 2\lambda x \\ \Rightarrow & x = \frac{1}{2\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & 3 = 2\lambda y \\ \Rightarrow & y = \frac{3}{2\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & x^2 + y^2 = 10 \\ \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 &= 10 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(2\lambda)^2} + \frac{9}{(2\lambda)^2} = 10$$

$$\frac{10}{(2\lambda)^2} = 10$$

$$(2\lambda)^2 = 1$$

$$2\lambda = \pm \sqrt{1} = \pm 1$$

$$\lambda = \pm \frac{1}{2}$$

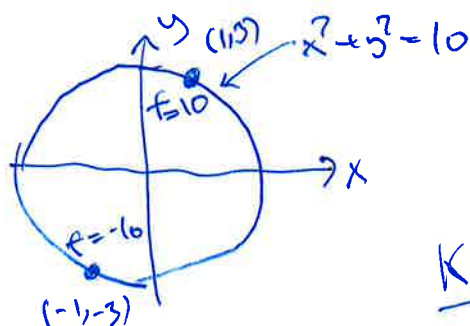
Løsninger: $f(0,0)$

$$\lambda = 1/2: x = 1, y = 3$$

$$\lambda = -1/2: x = -1, y = -3$$

Dus: $(1, 3; 1/2) = (x, y; \lambda)$
 $(-1, -3; -1/2) = (x, y; \lambda)$

← Kandidatpunkter for maksimum



Problem: $\max f = x + 3y$ når $x^2 + y^2 = 10$

Kandidat: $(x, y; \lambda) = (1, 3; 1/2) \quad f = 10$
 ~~$(-1, -3; -1/2) \quad f = -10$~~

Konklusjon: Pga. ekstremverdisetningen er $f = 10$ max.

Ekstremverdisetningen:

Hvis f er en kontinuerlig funksjon definert på en mengde D som er lukket og begrenset, så har f et maksimum- og minimumverdi på D .

Ex: $\max f(x,y) = x+3y$ når $x^2+y^2=10$

f kont
 D lukket
begrenset

|| E.V.T.

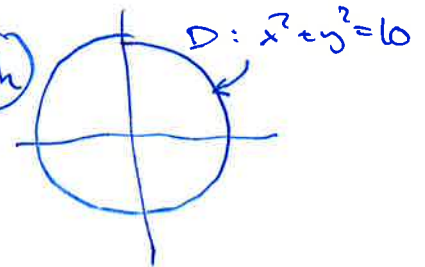
f er kontinuerlig

$D =$ tillatte punkt
 $=$ alle (x,y) slik
at $x^2+y^2=10$

vi har et
maksimum

Der lukket: alle randpkt
er med i D : (ok)

(alle mengder definert
ved $=, \leq, \geq$ er
lukket)



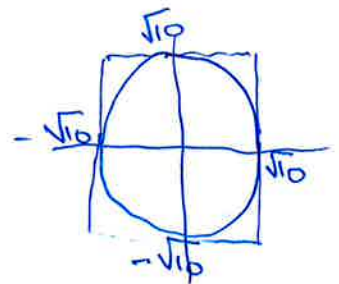
D er begrenset: (ok)

betyr at alle pkt (x,y) i D
er inneholdt i et rektangel

$$a \leq x \leq b$$

$$c \leq y \leq d$$

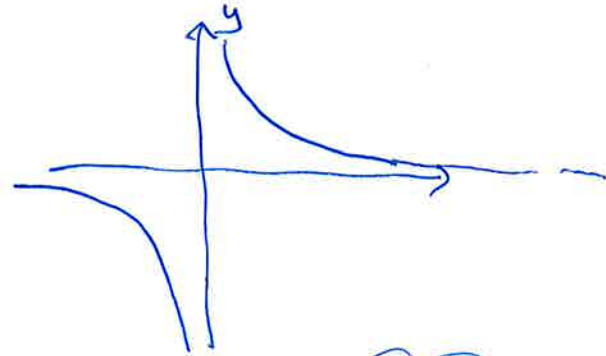
med endelige a, b, c, d .



$$-\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$$

$$-\sqrt{10} \leq y \leq \sqrt{10}$$

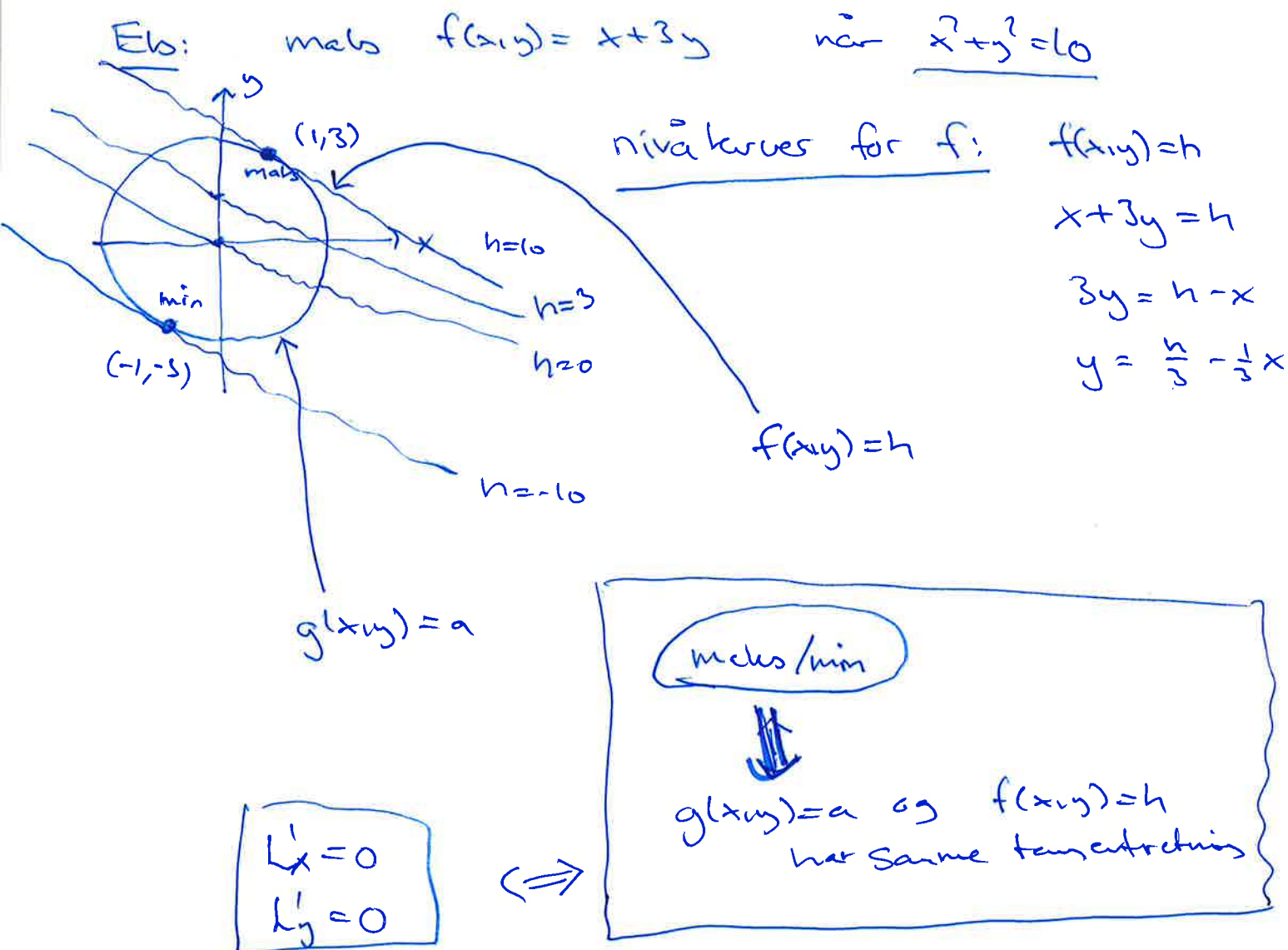
Ees: max/min $x^2 + y^2$ nær $xy = 1$
" $f(x,y)$ " bibetngelsen



$$xy = 1$$

$$y = 1/x$$

ikke
begrenset



Dette forklarer hvorfor FOC må gjelde
i punkter med maks/min, kommer tilbake
til dette neste gang.