

FORELESNING 3

EIVIND ERIKSEN

07 SEP 2016

MET1180

MATEMATIKK

BI

Plan:

- ① Annuiteter og annuitetslån
- ② Uendelige rekker og grenseverdier
- ③ Kontinuerlig forrentning og Eulers ~~Ball~~

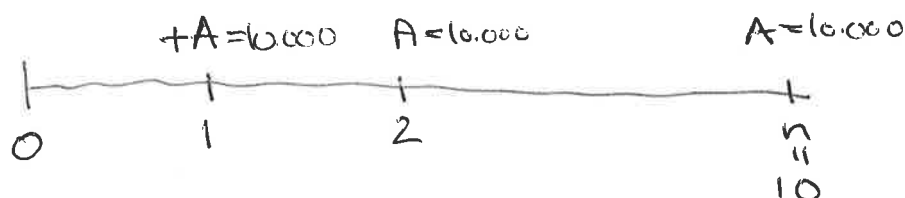
Pensum:

[E] 1.6-1.8

Gjennomgås
neste gang.
[E] 1.8

① Annuiteter

Efterskuddsannuitet: Anta at vi mottar $A=10000$ årlig, og første gang om ett år. Renten er $r=10\%$.



Totalt $n=10$ utbetalinger.

Nåverdi av kontantstrøm:

geometrisk rekke

$$k = \frac{1}{1,10} \quad q_i = \frac{10.000}{1,10}$$

$n=10$

$$\frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} + \dots + \frac{A}{(1+r)^n} = \frac{10000}{1,10} + \frac{10000}{1,10^2} + \dots + \frac{10000}{1,10^{10}}$$

$$= \frac{10.000}{1,10} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1,10}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{1,10}} = \frac{10.000 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{1,10}\right)^{10}\right) \cdot 1,10^{10}}{1,10 - 1 \cdot 1,10^{10}}$$

$$= \frac{10000 \cdot (1,10^{10} - 1)}{0,10 \cdot 1,10^{10}} = \frac{A \cdot ((1+r)^n - 1)}{r \cdot (1+r)^n}$$

$$\approx \underline{\underline{61.445,67}}$$

Nåverdi av etterskuddsannuitet:

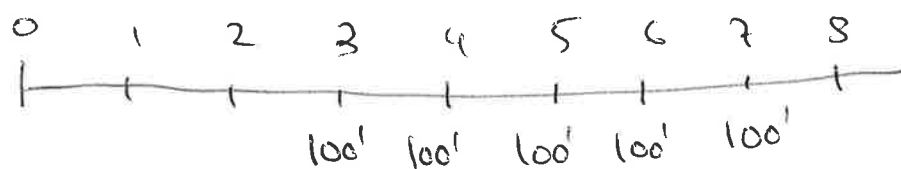
En årlig utbetaling A , første gang etter 1 år, med til sammen n utbetalinger gir en kontantstrøm (etterskuddsannuitet) med nåverdi

$$\frac{A \cdot ((1+r)^n - 1)}{r \cdot (1+r)^n}$$

når diskonteringsrenten er r .

Diskonteringsrente = renten vi bruker for å diskontere en kontantstrøm.

Eks: Vi mottar 100.000 kr årlig, første gang etter 3 år, i tillegg 5 år. Med diskonteringsrente 10%, er nåverdien til etterskuddsannuiteten:



Nåverdi: $\frac{100.000}{1,10^3} + \frac{100.000}{1,10^4} + \dots + \frac{100.000}{1,10^7}$

geometrisk

$$k = \frac{1}{1,10}$$

$$a_1 = \frac{100.000}{1,10^3}$$

$$n = 5$$

$$= \frac{100.000}{1,10^3} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{1,10})^5}{1 - \frac{1}{1,10}} = \frac{100.000 (1,10^5 - 1)}{(1,10^3) \cdot (1,10 - 1) \cdot 1,10^5}$$

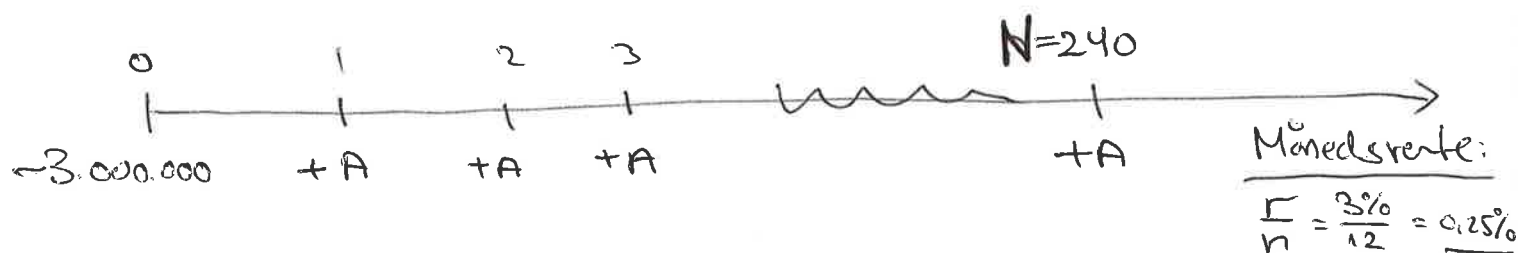
$$= \frac{1}{1,10^2}$$

$$\frac{100.000 (1,10^5 - 1)}{0,10 \cdot 1,10^5}$$

$$\approx \underline{\underline{313288 \text{ kr}}}$$

Annuitetslån:

Et lån på $L = 3.000.000$ skal tilbagebetales over 20 år, med rente $r = 3\%$ som kapitaliseres mnd.; med et fast beløb i mnd. A .



$$-3.000.000 + \frac{A}{1+r/n} + \frac{A}{(1+r/n)^2} + \dots + \frac{A}{(1+r/n)^N} = 0$$

nåverdi av hele
kontantstrømmen

$$\frac{A \cdot \left((1+r/n)^N - 1 \right)}{\frac{r}{n} \cdot (1+r/n)^N} = 3.000.000 = L$$

$$A = \frac{L \cdot (r/n) \cdot (1+r/n)^N}{(1+r/n)^N - 1}$$

$$= \frac{3.000.000 \cdot 0,0025 \cdot 1,0025^{240}}{1,0025^{240} - 1}$$

$$\approx \underline{\underline{16.637,93}}$$

formel for mnd.
betaling A når

L = lånebeløp

r = nominell (årlig) rente

$n = 12$ lånetermener per år

$N = 240$ totalt antall lånetermener

	A	rente	avdrag	Restlån
3.000.000	1 16.637,93	7.500	9.137,93	2.990.862,07
	2 16.637,93	:	:	:
	.	:	:	:
	:	:	:	:
	:	:	:	:
	240			0

Rente 1. mnd: $3.000.000 \cdot 0,25\% = 7.500$
 2. mnd: $2.990.862,07 \cdot 0,25\% = 7.477,16 < 7.500$

Annuitetslån:

Lånebeløp L , månedsrente r , mnd. kapitalisering, nedbetales over n år. Da blir mnd. betaling

$$A = \frac{L \cdot r \cdot (1+r)^{12 \cdot n}}{(1+r)^{12 \cdot n} - 1}$$

Om det nedbetales som annuitetslån.

Serielån: Fast avdrag per mnd.

Eks: $L = 3.000.000 \rightarrow$ Avdrag: $\frac{3.000.000}{20 \cdot 12} = 12.500$

		Avdrag	Rente	Sum	Restlån
$\frac{n=1}{n=2}$	3.000.000	12.500	7.500	20.000	2.987.500
		12.500	7.468,75	2	2.975.000
		:	:		:

Således renter: Aritmetisk rekke.

② Uendelige rekker og grenseverdier

Endelige rekker: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

Uendelige rekker: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

Ex: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$

harmonisk rekke
(ikke geometrisk)

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

geometrisk rekke

$\underbrace{1 + (-1)}_0 + \underbrace{1 + (-1)}_0 + \underbrace{1 + (-1)}_0 + \dots = 0$

$= 1 + \underbrace{(-1) + 1}_0 + \underbrace{(-1) + 1}_0 + \underbrace{(-1) + 1}_0 + \dots = 1$

Defn: $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$
delsum

(summen av de n første tallene i rekken)

Vi sier at rekken konvergerer mot S dersom $S_n \rightarrow S$ når $n \rightarrow \infty$.

Ex: $1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$

$S_n = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n=2 \\ 1 & n=3 \end{cases} = \begin{cases} 1 & n \text{ odd} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$

Rekken divergerer: $1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots = \text{eks. ikke}$

Eks: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2}^{n-1} = 1 \cdot \frac{1 - (1/2)^n}{1 - (1/2)}$$

$\frac{1}{2}^0 \quad \frac{1}{2}^1 \quad \frac{1}{2}^2 \quad \frac{1}{2}^{n-1}$

$$= \frac{1 - (1/2)^n}{1/2} \cdot 2 = 2 - 2 \cdot (1/2)^n = 2 - 2 \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$= 2 - \frac{2}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$S_1 = \underline{1} \quad S_2 = \underline{\frac{3}{2}} \quad S_3 = 2 - \frac{1}{4} = \underline{\frac{7}{4}}$$

$$S_4 = 2 - \frac{1}{8} = \frac{15}{8} \quad \dots \quad S_{10} = 2 - \frac{1}{512} = \frac{1023}{512}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) = 2 - 0 = \underline{2}$$

Def: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Grenseverdier til } S_n \text{ når } n \rightarrow \infty \text{ er } S \\ \text{ betyr at vi kan få } S_n \text{ så nært } S \text{ vi vil ved å velge } n \text{ stor nok.} \end{array} \right.$

Konklusjon: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \underline{\underline{2}}$
konvergerer

Grenseverdi:

Dersom S_n nærmer seg en bestemt verdi S når n blir større og større, skriver vi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad \text{eller} \quad S_n \rightarrow S \quad \text{når } n \rightarrow \infty$$

Da er S grenseverdi til S_n når n går mot uendelig. Merk: $S =$ et tall (ikke $\pm\infty$)

Defn: Uendelige rekker

Rekken $a_1 + a_2 + \dots$ konvergerer hvis

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, og da skriver vi

$$a_1 + a_2 + \dots = S$$

Hvis grenseverdi ikke eksisterer, så sier vi at rekken divergerer.

Uendelige geometriske rekker

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

$$= a_1 + a_1 \cdot k + a_1 \cdot k^2 + \dots$$

Delsum:

$$S_n = a_1 + a_1 k + \dots + a_1 k^{n-1}$$

$$= a_1 \cdot \frac{1 - k^n}{1 - k} = \frac{a_1}{1 - k} \cdot (1 - k^n) \rightarrow ?$$

når $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1}{1 - k} \cdot (1 - k^n) = \frac{a_1}{1 - k} \quad \text{når } -1 < k < 1$$

$$k > 1: k^n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \text{ eksisterer ikke .}$$

$$k < -1: k^n \rightarrow ?$$

$$\text{eksisterer ikke .}$$

$$k = 1: a_1 + a_1 + a_1 + \dots$$

$$= \infty$$

$$k = -1: a_1 - a_1 + a_1 - a_1 + \dots$$

$$= \infty$$

Konklusjon:

Den uendelige geometriske rekken $a_1 + a_2 + a_3 + \dots =$
 $a_1 + a_1 k + a_1 k^2 + \dots$

Hvis $(-1 < k < 1)$: $a_1 + a_1 k + \dots$

I alle andre tilfeller: $a_1 + a_1 k + \dots$

$$\frac{a_1}{1 - k}$$

konverger
diverger

Eks:
$$\left. \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \\ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \end{array} \right\} \text{generelle uendelige} \\ \text{rekker}$$

Resultat:

Hvis $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ konvergerer, da gjelder:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Eks: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ divergerer : $a_n = n \rightarrow \infty$
 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ kan konvergere $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$

Alternierende rekker:

Den uendelige rekken $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + \dots$
 kalles alternierende hvis

- i) $a_1, a_2, a_3, \dots$ er positive tall
- ii) $a_{i+1} < a_i$ for alle i
- iii) $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$

Da er rekken konvergent.

Eks: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

$$a_1 = 1 \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad a_3 = \frac{1}{3} \quad a_4 = \frac{1}{4}$$

$\stackrel{?}{=}$

Alternierende
 i) - iii) er oppfylt.

$\Downarrow$

konvergerer