

FORELESNING 30

EIVIND ERIKSEN

APR 25, 2017

MET1180
MATEMATIKK

Plan:

- ① Lagrange-problemer
- ② Degenerert bilbetrivelse
- ③ Eksistens av maksimum/minimum
- ④ Tolkning av Lagrange multiplikatorer

Perusum:

[E] 7.6

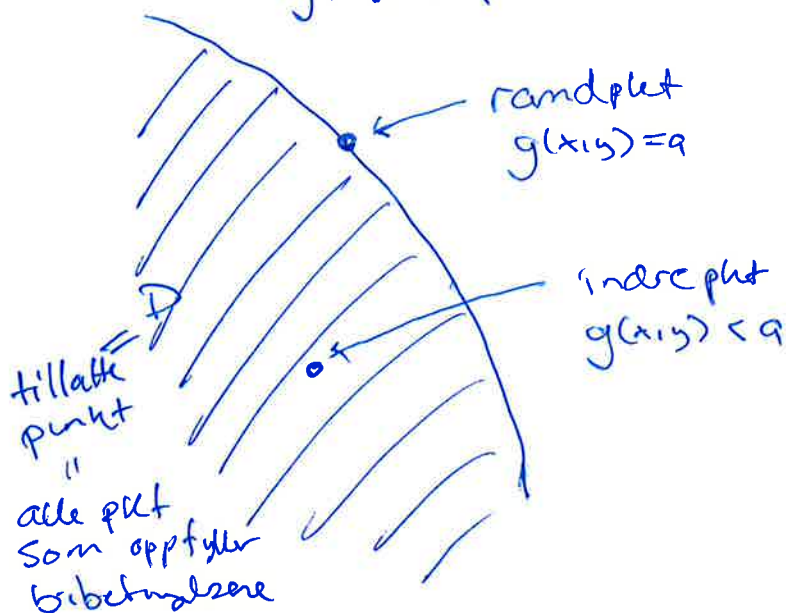
Repetisjonstordning? Finn tidspunkt.

Innleveringsoppgaver: Kap 6: Matriser

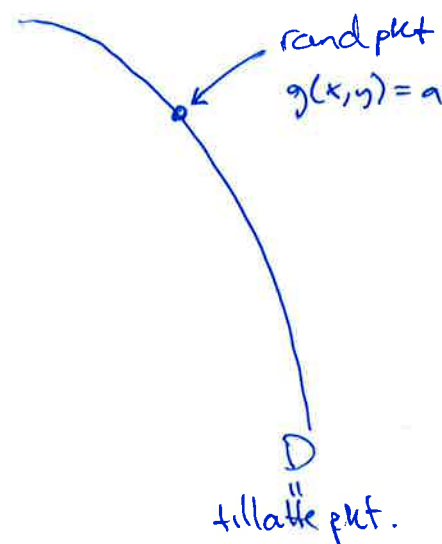
Ny: Kap 7 - Funksjoner i H. ver.

Repetisjon: Optimering med bilbetrivelse

$$g(x,y) \leq a$$



$$g(x,y) = a$$



① Lagrange-problem : Optimeringsproblem der
bibr betingelsen er en likning.

Ekso: max/min $f(x,y) = x^2 + y^2$ når $xy = 4$
objektivfunks. $g(x,y) = a$
bibr betingelse

Lagrange-problem:

max/min $f(x,y)$ når $g(x,y) = a$

$L = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y)$

$$\left. \begin{aligned} L'_x &= f'_x - \lambda \cdot g'_x = 0 \\ L'_y &= f'_y - \lambda \cdot g'_y = 0 \\ g(x,y) &= a \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Foc for Lagrange-pb.} \\ &\text{(førsteordensbet.)} \\ &\subseteq \text{(bibr bet.)} \end{aligned}$$

}

Lagrange-betingelse

Løsning av Foc + c

=> Kandidatpunkt for Lagrange-problemet
(ordinære)

Resultat:

(x^*, y^*) løsning av Lagrange-pb (max/min)

$\Downarrow$

i) $(x^*, y^*; \lambda)$ oppfyller Foc + c for en λ ← ordinære kandidatpunkt
 eller

ii) bibr betingelsen $g(x,y) = a$ er degenerert ← spesielle kandidatpunkt
 i (x^*, y^*)

Uten bibr betingelse:

max/min $f(x,y)$

$$\left. \begin{aligned} f'_x &= 0 \\ f'_y &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Foc} \\ &\text{(førsteordens-} \\ &\text{betingelser)} \end{aligned}$$

}

(stasjonære pkt)

Løsning av Foc

=> Kandidater for max/min

Resultat:

(x^*, y^*) er max/min

$\Downarrow$

(x^*, y^*) oppfyller Foc

$$\left. \begin{aligned} g'_x &= 0 \\ g'_y &= 0 \end{aligned} \right\} g(x,y) = a$$

Ex: max/min $f(x,y) = x^2 + y^2$ når $xy = 4$
" " $g(x,y) = 4$

$$L(x,y;\lambda) = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y)$$

$$= x^2 + y^2 - \lambda \cdot xy$$

Foc:

$$\begin{cases} L'_x = 2x - \lambda \cdot y = 0 \\ L'_y = 2y - \lambda \cdot x = 0 \end{cases}$$

C:

$$xy = 4$$

tre lign. med tre ubekj.

Løsn av Foc + C:

(Lagrange bet.)

$$2x - \lambda y = 0$$

$$2x = \lambda y$$

$$x = \frac{\lambda}{2} \cdot y$$

$$2y - \lambda y = 0$$

$$2y - \lambda \cdot \left(\frac{\lambda}{2} \cdot y\right) = 0$$

$$2y - \frac{\lambda^2}{2} y = 0 \quad | :2$$

$$4y - \lambda^2 y = 0$$

$$y \cdot (4 - \lambda^2) = 0$$

$$y = 0$$

eller $4 - \lambda^2 = 0$

a) $y = 0:$
 $x = 0$
 $0 \cdot 0 = 0 \neq 4$
ingen løsn.

b) $\lambda^2 = 4:$ $\lambda = 2$ eller $\lambda = -2$

$\lambda = 2:$ $x = y$
 $xy = 4$
 $x^2 = 4 \quad x = \pm 2$

$(2, 2; 2), (-2, -2; 2)$

$\lambda = -2:$ $x = -y$
 $xy = 4$

~~$x^2 = -4$~~
 $(-y)y = 4 \quad y^2 = -4$
ingen løsn.

Konklusjon: Løsm. av FOC+C (Lagrangebel.)
er:

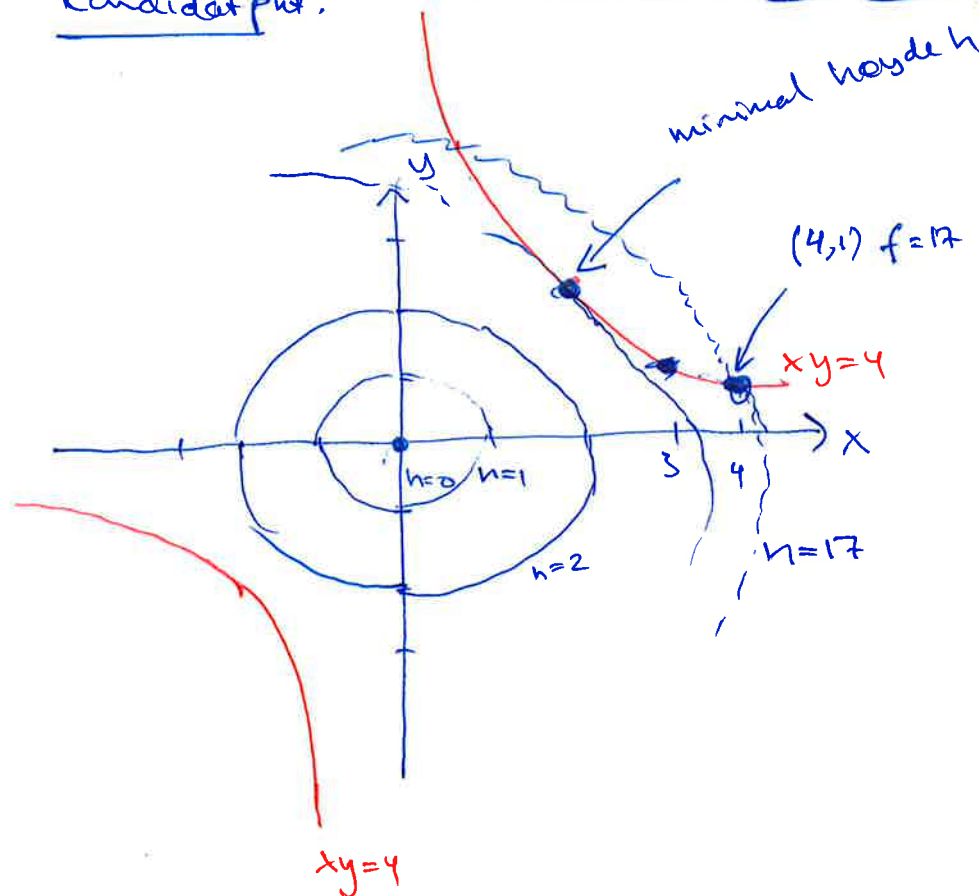
ordinære
kandidat pkt.

$$(x, y, \lambda) = (2, 2; 2)$$

$$(-2, -2; 2)$$

$$f = x^2 + y^2 = \underline{8}$$

$$f = \underline{8}$$



Tillatte pkt:

$$xy = 4 \quad g(x, y) = a$$

$y = 4/x$ hyperbel.

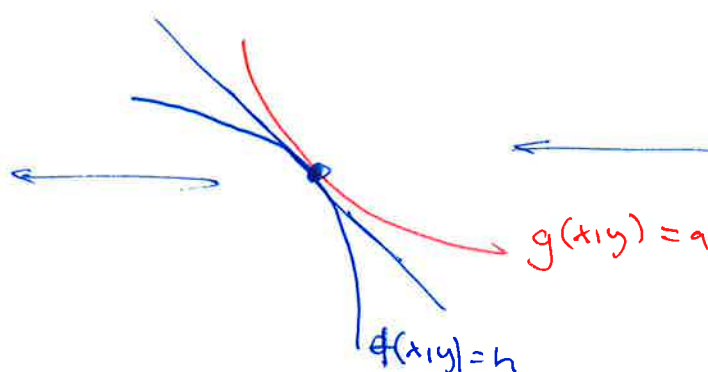
Nivåkurver:

$$f(x, y) = h$$

$$x^2 + y^2 = h$$

I et punkt der vi har min/max, vil nivåkurven
 $f(x, y) = h$ og kurven $g(x, y) = a$ ha samme
tangens.

$$\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{g'_x}{g'_y}$$



Samme tangent

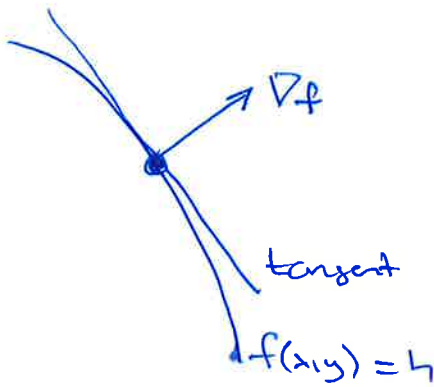
$\Leftrightarrow$

$$-\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{g'_x}{g'_y}$$

(samme stign. koll)

$\Leftrightarrow$

Samme gradient

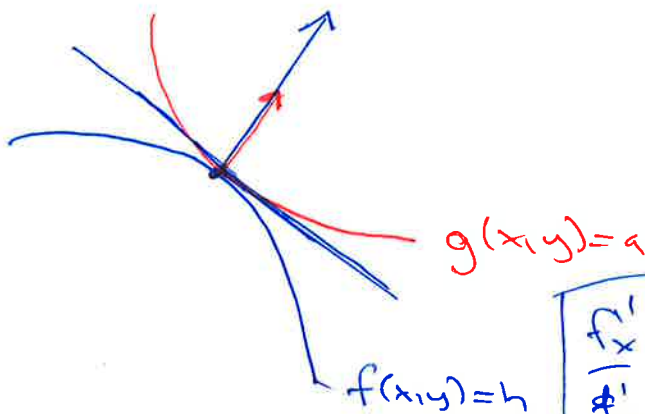


$$\nabla f = \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix} \quad \text{gradienten til } f$$

står alltid normalt
på tangenten

$$f = x^2 + y^2 \Rightarrow \nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\text{I pkt } (2,2): \nabla f(2,2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$



max/min

⇔
samme tangentlinje



Samme stign. tall

$$-\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{g'_x}{g'_y}$$



gradienter langs samme
rette linje

$$\begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} g'_x \\ g'_y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f = \lambda \cdot \nabla g$$

$$f'_x = \lambda \cdot g'_x$$

$$f'_y = \lambda \cdot g'_y$$



FOC:

$$\begin{cases} L'_x = f'_x - \lambda g'_x = 0 \\ L'_y = f'_y - \lambda g'_y = 0 \end{cases}$$

② Degenerert biketningelse

Defn: Biketningelse $g(x,y) = a$ er degenerert i (x^*, y^*) hvis $\nabla g(x^*, y^*) = \underline{0}$

$$\nabla g(x^*, y^*) = \underline{0}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} g'_x(x^*, y^*) \\ g'_y(x^*, y^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underline{g'_x(x^*, y^*) = g'_y(x^*, y^*) = 0}$$

Ek: $xy = 4$ $\left. \begin{matrix} g'_x = y = 0 \\ g'_y = x = 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} (x,y) = \\ (0,0) \end{matrix}$

$(0,0)$ oppfyller den biket. $xy = 4$

$\Rightarrow$ ingen pkt med degenerert biket.

Eks: $\max_y$ når $x^2 + y^3 = 0$
 $f(x,y)$ $g(x,y)$ "a"

$$L = y - \lambda \cdot (x^2 + y^3)$$

Foc: $\begin{cases} L'_x = -2\lambda x = 0 \\ L'_y = 1 - 3\lambda y^2 = 0 \\ C: x^2 + y^3 = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda = 0 \text{ eller } x = 0$

$\lambda = 0$:
 $1 - 0 \cdot 3y^2 = 0$
Ingen løsn.

$x \neq 0$:
 $0^2 + y^3 = 0$
 $y = 0$
 $1 - 3 \cdot 0^2 = 0$
Ingen løsn.

Konkl: Ingen løsn. av Foctc
(Lagrange betingelser)

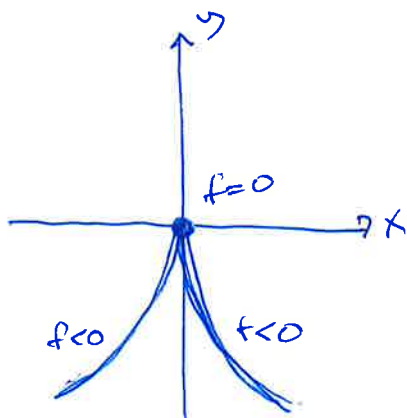
$\Rightarrow$ Ingen ordinære kandidat pkt.

Spesielle kandidat pkt: $(x,y) = (0,0)$ $f = 0$

$$g(x,y) = x^2 + y^3 = 0$$

$$\begin{cases} g'_x = 2x = 0 \\ g'_y = 3y^2 = 0 \end{cases} \rightarrow (x,y) = (0,0)$$

$g(0,0) = 0 \leftarrow$ passer i bet.



Tillatte pkt:

$$x^2 + y^3 = 0$$

$$y^3 = -x^2$$

$$y = \sqrt[3]{-x^2} = -\sqrt[3]{x^2} \leq 0 \text{ for alle } x$$

Konklusjon: Maks = 0 i (0,0)
 $\uparrow$ maks-verdi $\uparrow$ maks-pkt.

NDCQ: non-degenerate constraint qualification
= ingen tillatte pht med degenerert bilbet.
(ingen spesielle kandidat pht)

③ Elastisitet av maks/min

Repetisjon: Metode for å løse Lagrange-problem

Pb: maks/min $f(x,y)$ når $g(x,y) = a$

Metode: ① Skriv ned $L = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y)$
(Lagrange-funksjon)

② Skriv ned Foc + C = Lagrange-betingelser

Foc:
$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \end{cases}$$

C:
$$g(x,y) = a$$

③ Løs Foc + C $\leadsto$ ordinære kandidat pht

④ Finn evt. tillatte pht med degenerert bilbet.

$$\begin{cases} g'_x = 0 & g(x,y) = a \\ g'_y = 0 \end{cases}$$

}

Løsning = spesielle kandidat pht.

⑤ Alle kandidat pht = ordinære + spesielle
③ ④

Må finne ut hvordan vi kan konkludere om noen av disse pkt. faktisk er maks/min.

- Få oversikt ved å regne ut $f(x,y)$ for hvert kandidatpkt.

- Bruk ekstremverdisetningen (hus vi kan)

Hvis $g(x,y) = a$ gir en begrenset mengde,
Så fins både maks/min

$\Rightarrow$ både maks/min er blant kandidatpkt i ⑤.

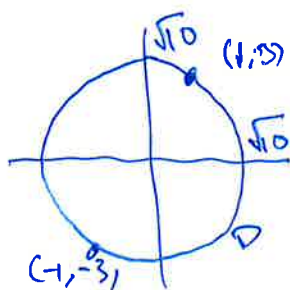
Eks: max/min $f(x,y) = x + 3y$ når $x^2 + y^2 = 10$

①-⑤ : $(x,y;\lambda) = (1,3; 1/2)$ $f=10$

$(-1,-3; -1/2)$ $f=-10$

alle kandidatpkt
(her ordinære)

Evs: Tillatte pkt: $x^2 + y^2 = 10$
Begrenset?



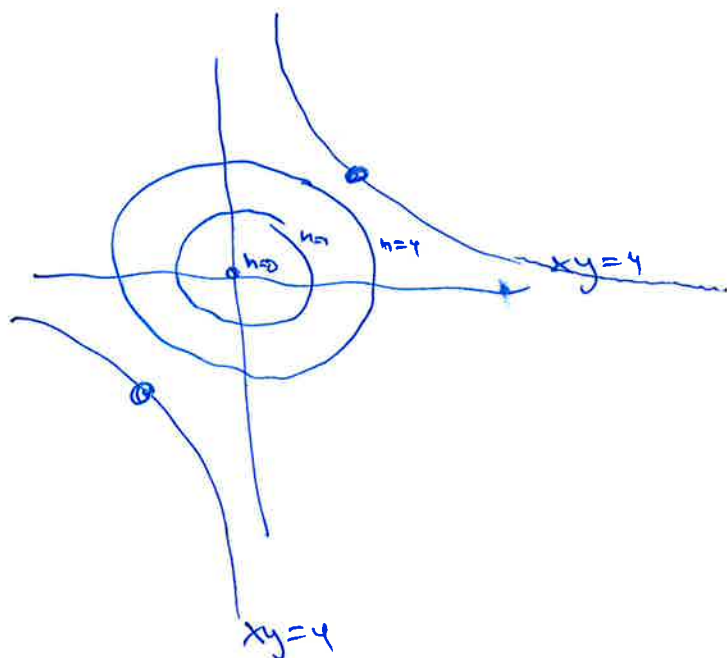
Maks: $f=10$ i $(1,3)$

Min: $f=-10$ i $(-1,-3)$

Sirkelen er begrenset.

Evs $\Rightarrow$ det fins maks/min

Ex: $\min x^2 + y^2$ når $xy = 4$



Kandidat pkt:

$$(x, y; \lambda) = (2, 2; 2) \quad f=8$$

$$(-2, -2; 2) \quad f=8$$

(kan ordne)

Exs: Er $xy=4$ begrenset? Nei.

Geometrisk uha nivå kurver $f=8$ er min
ikke noe maks.

Alternativ: $xy=4 \Rightarrow y=4/x$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = x^2 + \left(\frac{4}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{16}{x^2}$$



Finn min av en f .
i en var x ($x \neq 0$)
på vanlig måte.

Løsn: $f = x^2 + \frac{16}{x^2}, x \neq 0$

$$f' = 2x + 16 \cdot (-2)x^{-3}$$

$$= 2x - \frac{32}{x^3} = \frac{2x^4 - 32}{x^3}$$

$$= \frac{2(x^4 - 16)}{x^3} = \frac{2(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{x^3}$$

$$= \frac{2(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x^3}$$

$x=2, x=-2$
gir $f=8$
Ser fra fortegnsskema at det er globale min.

