

FORELESNING 31

EIVIND ERIKSEN

APR 28, 2017

MET1180
MATEMATIKK

Plan:

- ① Lagrange multiplikatorer
- ② Kuhn-Tucker problem
- ③ Eksamen MET11803 12/2015, Oppg 5

Referanse:
[E] 7.6

Repetisjons forelesning: 23/05.

Konklusjon:

Ikke noe min ($f \rightarrow -\infty$)
Max: $f_{\max} = 4$

① Lagrange-multiplikatorer

Eks:

max/min $f(x,y) = xy$

der $x+y=4$

$$g(x,y) = x+y$$

$a=4$

i) Skriv ned L

$$L = xy - \lambda \cdot (x+y)$$

ii) Skriv ned FOC + C

$$\text{FOC: } \begin{cases} L'_x = y - \lambda \cdot 1 = 0 \\ L'_y = x - \lambda \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

iii) Løs FOC + C

$\rightarrow$ kandidat pkt.
(ord. kond. pkt.)

C:

$$x+y=4$$

$$(x,y;\lambda) = (2,2;2) \quad f=4$$

iv) Pkt. med degenerert 1. bet.

$$\left. \begin{matrix} g'_x = 1 = 0 \\ g'_y = 1 = 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{Umulig,} \\ \text{ingen pkt} \\ \text{med deg.} \\ \text{1. bet.} \end{matrix}$$

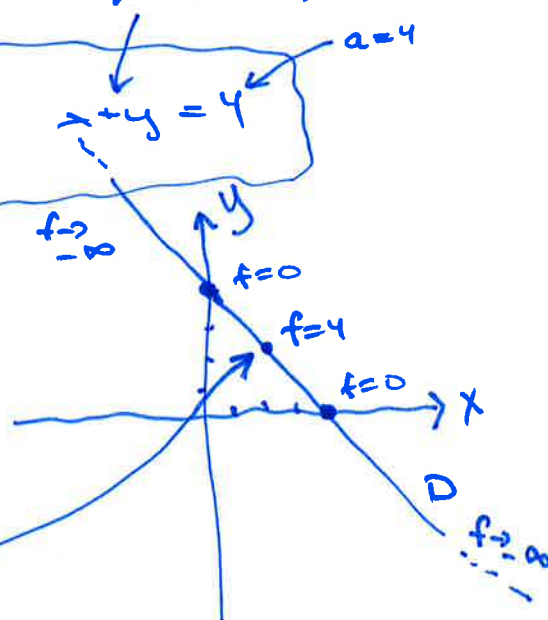
$$\begin{aligned} y &= \lambda = 2 \\ x &= \lambda = 2 \\ \lambda + \lambda &= 4 \\ 2\lambda &= 4 \\ \lambda &= 2 \end{aligned}$$

Tilføyle pkt. $x+y=4$

$$D = \{(x,y): x+y=4\}$$

$$y = 4 - x$$

Der ikke begrenset.



Alt: max/min $f = xy$ når

$$x+y=4$$

$\Leftrightarrow$

$$y=4-x$$

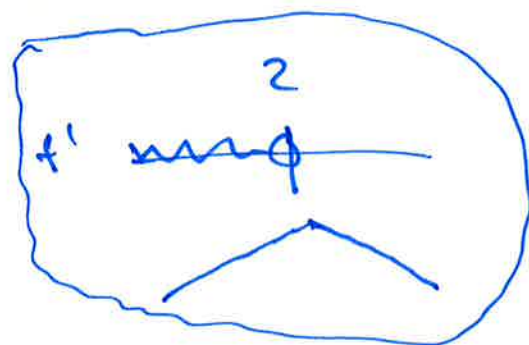
$\parallel$

$$x^2+y^2=4$$

↓
variabelregning

max/min $f = x \cdot (4-x)$ (ingen bet. i)

Ans: Ser på $f(x) = 4x - x^2$
 $f'(x) = 4 - 2x = 0$
 $x = 2$



$$f_{\max} = 4 \cdot 2 - 2^2 = 4$$

$x=2$ max
(globalt max)

Lagrange multiplikator: λ

Ex: $f_{\max}/\min f(x,y) = xy$ når $x+y=a$

$$a=4: f_{\max}(a) = f_{\max}(4) = 4$$

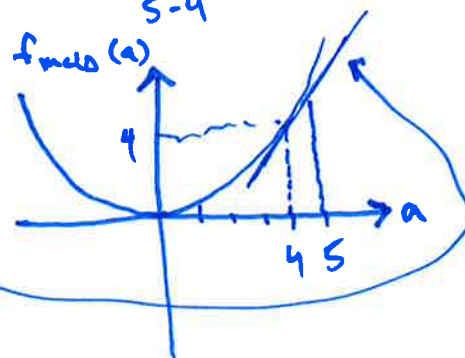
$$a=5: f_{\max}(a) = f_{\max}(5) \approx 4 + 1 \cdot \lambda = 4 + 1 \cdot 2 = 6$$

↑ ↑ ↑
 $f_{\max}(4)$ da λ for
"5-4" $a=4$

Tolkning av λ :

"Marginal økning i $f_{\max}/\min$ når vi øker a med en enhet"
Stignings-tallet til tangenten

$$\lambda = \frac{d}{da} f_{\max}(a)$$



Eles: max/min $f(x,y) = xy$ når $x+y = a$

$$L = xy - \lambda \cdot (x+y)$$

Foc: $L'_x = y - \lambda \cdot 1 = 0$
 $L'_y = x - \lambda \cdot 1 = 0$
c: $x + y = a$

$$y = \lambda = a/2$$

$$x = \lambda = a/2$$

$$\lambda + \lambda = a$$

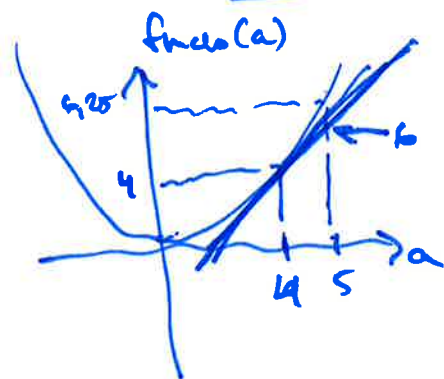
$$2\lambda = a$$

$$\lambda = a/2$$

Kandidatpkl: $(x,y;\lambda) = (a/2, a/2; a/2)$ $f = (a/2)^2 = \underline{\underline{a^2/4}}$

$$f_{\max}(a) = \underline{\underline{a^2/4}}$$

$$f_{\max}(5) = 5^2/4 = 25/4 = \underline{\underline{6,25}}$$



② Kuhn-Tucker problemer: (Gitt ud $\leq, \geq$)

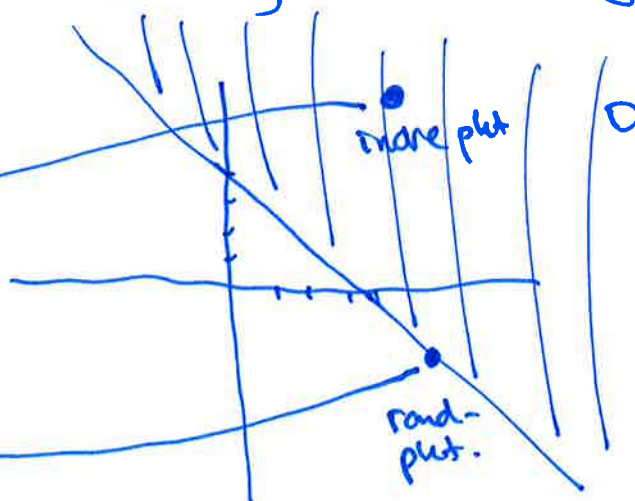
Eles: max/min $f(x,y) = xy$ når $x+y \geq 4$

$$x+y \geq 4$$

$\Uparrow$ (problem uten
kvikkevisjon)

a) $x+y > 4 \rightarrow y > 4-x$
eller

b) $x+y = 4 \rightarrow y = 4-x$
(Lagrangeproblem)



max/min $f(x,y) = xy$ når $x+y \geq 4$

a) $x+y > 4$: Indre pkt.

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$$

$$f = xy: \begin{cases} f'_x = y = 0 \\ f'_y = x = 0 \end{cases}$$

$$(x,y) = (0,0)$$

$$\text{tillatt? } \begin{matrix} x+y > 4 \\ 0+0 & 4 \end{matrix}$$

Ingen kandidat pkt. i a)

b) $x+y = 4$: Rand pkt.

Lagrangeproblem (som før):

Lagranges metode

$$L = xy - \lambda \cdot (x+y)$$

$$L'_x = y - \lambda \cdot 1 = 0$$

$$L'_y = x - \lambda \cdot 1 = 0$$

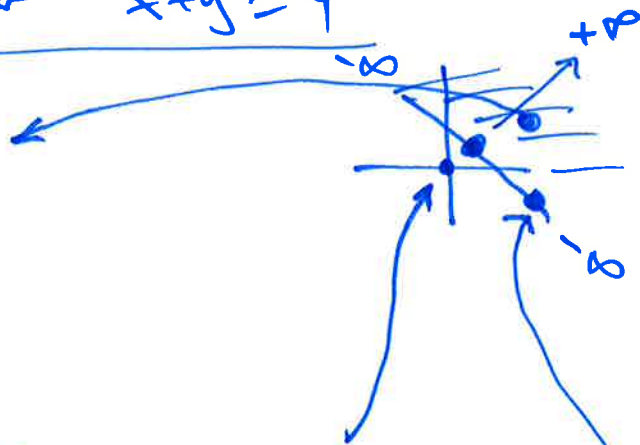
$$x+y = 4$$

Kandidat pkt: $(x,y;\lambda) = (2,2;2)$ $f=4$

Konklusjon: Eneste kandidat for max/min:

$$(x,y) = (2,2) \quad f=4$$

Hverken maks
eller min $(f \rightarrow \infty)$
 $(f \rightarrow -\infty)$



Eks 12/2015, oppg 5:

$$g(x,y) = x^3 + xy + y^2 = 0 \quad \underline{\text{nivåkurve}}$$

a) Finn pkt på nivåkurven med $x = -2$.
Betrakt tangentlinjen i disse pkt'ene.

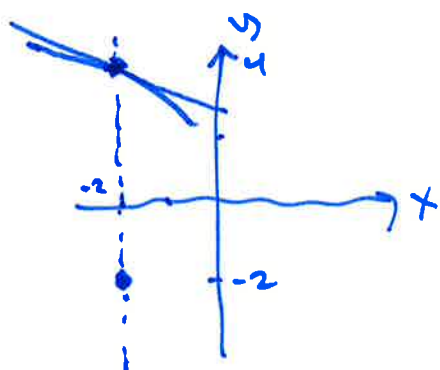
$$\underline{x = -2}; \quad x^3 + xy + y^2 = 0$$

$$(-2)^3 + (-2)y + y^2 = 0$$

$$y^2 - 2y - 8 = 0$$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-8)}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm 6}{2} = \underline{4}, \underline{-2}$$



Stigningstallet til $g=0$: Pkt: $y=4$ $y=-2$

$$a = -g'_x / g'_y$$

$$= - \frac{3x^2 + y}{x + 2y}$$

Tangentlinje:

$$(x,y) = (-2,4): \quad y-4 = a \cdot (x-(-2))$$

$$y-4 = a(x+2)$$

$$y-4 = -\frac{8}{3}(x+2)$$

$$y = -\frac{8}{3}x - \frac{16}{3} + 4$$

$$y = -\frac{8}{3}x - \frac{4}{3}$$

$$a = - \frac{12+4}{-2+8}$$

$$= - \frac{16}{6} = -\frac{8}{3}$$

$$\underline{(x,y) = (-2,-2):}$$

$$y+2 = a \cdot (x+2)$$

$$y = \frac{5}{3}(x+2) - 2$$

$$y = \frac{5}{3}x + \frac{4}{3} //$$

$$a = - \frac{12-2}{-2-4} = \frac{10}{6}$$

$$= \underline{\underline{5/3}}$$

b) Løs: maks $f(x,y) = x$ når $g(x,y) = 0$

Lagranges metode:

$$L = x - \lambda \cdot (x^3 + xy + y^2)$$

Før: $L'_x = 1 - \lambda \cdot (3x^2 + y) = 0$
 $L'_y = -\lambda (x + 2y) = 0$
c: $x^3 + xy + y^2 = 0$

Før + C =
Lagrange bet.

Løs Lagrange bet.

$$-\lambda \cdot (x + 2y) = 0$$

$$\lambda = 0 \text{ eller } x + 2y = 0$$

$\lambda = 0$:

$$1 - 0 \cdot \lambda = 0$$

$$1 = 0$$

ingen løsn.

$x + 2y = 0$:

$$x = -2y$$

$$(3) \quad x^3 + xy + y^2 = 0$$

$$(-2y)^3 + (-2y)y + y^2 = 0$$

$$-8y^3 - 2y^2 + y^2 = 0$$

$$y^2(-8y - 1) = 0$$

$y^2 = 0$:

$$y = 0, x = 0$$

$$1 - \lambda \cdot 0 = 0$$

$$1 = 0$$

ingen løsn.

$-8y - 1 = 0$:

$$-8y = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{8}$$

$$x = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$1 - \lambda \cdot (3x^2 + y) = 0 \quad \lambda = \frac{16}{1}$$

$$1 - \lambda \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{8} \right) = 1 - \lambda \cdot \frac{1}{16} = 0$$

Ordinære kand.dat pkt:

$$(x, y; \lambda) = (1/4, -1/8; 16) \quad f = 1/4$$

Kunne
gjort at om
det er
spesielle
kand.pkt
med degre
di bet

(Ikke nødvendigvis: Viser nedover at $f=1/4$ er maks.)

Husk:

$$\max f(x, y) = x \quad \text{når} \quad g = x^3 + xy + y^2 = 0$$

pkt med $x=1$ på nivåkurven:

$$x^3 + xy + y^2 = 0$$

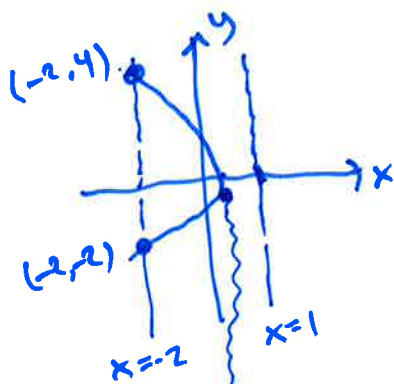
$$1^3 + 1 \cdot y + y^2 = 0$$

$$y^2 + y + 1 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1}}{2}$$

ingen løsn.

tyder på at $(x, y) = (1/4, -1/8)$
kan være maks.



$a = 1/4$

$(x, y) = (1/4, -1/8)$
er maks.

vi får løsn
når $a \leq 1/4$

pkt med $x=a$ på nivåkurven:

$$x^3 + xy + y^2 = 0$$

$$a^3 + ay + y^2 = 0$$

$$y^2 + ay + a^3 = 0 \rightarrow y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4a^3}}{2}$$

vi har løsn

$$a^2 - 4a^3 \geq 0$$

$$a^2(1 - 4a) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 1/4$$

$$a^2 \quad 0 \quad 1/4$$

$$1 - 4a$$

$$a^2(1 - 4a)$$

Konkl:

$$f_{\max} = 1/4$$