

FORELESNING 4

EIVIND ERIKSEN

SEP 14 2016

METII 80

MATEMATIKK

Plan:

- ① Kontinuerlig forrentning og Eulers tall
- ② Lineære og kvadratiske likninger, faktorisering av kvadratiske uttrykk

Pensum:

[E] 1.8,
2.1-2.2

Oppg. 1.65

$L = 3.000.000$
20 år

4,25% rente

$$r = \frac{4,25\%}{12} = \frac{0,0425}{12}$$



$$-L + \frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} + \dots + \frac{A}{(1+r)^{240}} = 0$$

$$\frac{A}{1+r} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^{240}}{1 - \frac{1}{1+r}} = L$$

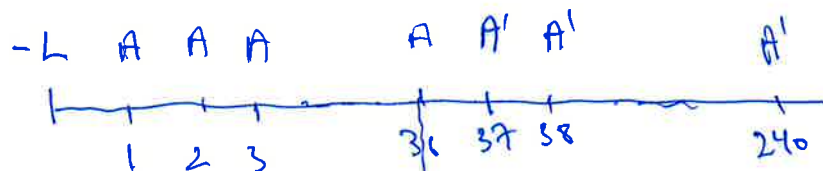
$$\frac{A \left((1+r)^{240} - 1 \right)}{r (1+r)^{240}} = L$$

$$A = \frac{L \cdot r \cdot (1+r)^{240}}{(1+r)^{240} - 1} \approx \underline{\underline{18.577,03}}$$

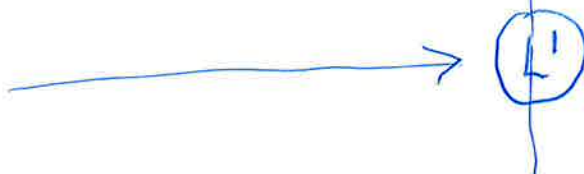
Etter 3 år = 36 terminer:

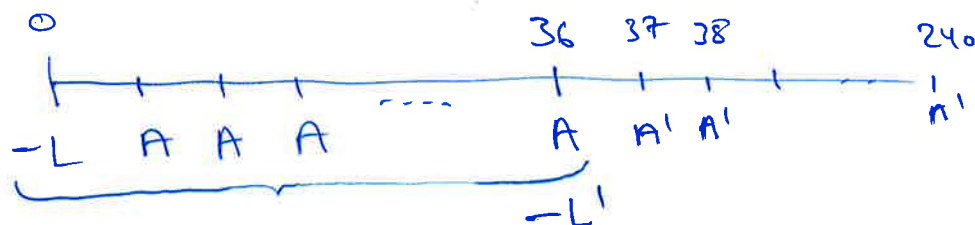
4,75% rente

$$r' = \frac{0,0475}{12}$$



Rentsaldo på lånet
etter 36 mnd.





$$-L + \frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} + \dots + \frac{A}{(1+r)^{36}} = \text{nåverdi av rent saldo } L'$$

$$L' = \text{nåverdi} \cdot (1+r)^{36} = \text{sluttverdi}$$

$$-L' = (1+r)^{36} \cdot \left(-L + \frac{A}{1+r} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^{36}}}{1 - \frac{1}{1+r}} \right)$$

$$= -L \cdot (1+r)^{36} + \frac{A \cdot ((1+r)^{36} - 1)}{r}$$

$$L = 3.000.000$$

$$r = 0,0425/12$$

$$A \approx 18.577,03$$

$$\approx -2.693.639,33 \Rightarrow L' \approx \underline{\underline{2.693.639,33}}$$

Nytt beløp per mnd: A'

$$-L' + \frac{A'}{1+r'} + \frac{A'}{(1+r')^2} + \dots + \frac{A'}{(1+r')^{204}} = 0$$

$$\frac{A'}{1+r'} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+r'}\right)^{204}}{1 - \frac{1}{1+r'}} = L'$$

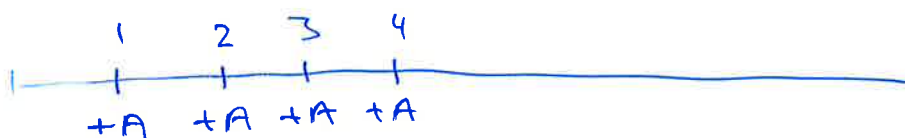
$$\frac{A' \cdot ((1+r')^{204} - 1)}{r' \cdot (1+r')^{204}} = L'$$

$$A' = \frac{L' \cdot r' \cdot (1+r')^{204}}{(1+r')^{204} - 1} \approx \underline{\underline{19.269,83 \text{ kr}}}$$

$$L' \uparrow$$

$$r' = 0,0475/12$$

Ekso: Uendelig etterskuddsannuitet.



$\left\{ \begin{array}{l} \text{stopper} \\ \text{alari} \\ \text{opp} \end{array} \right.$

Nåverdi: $\frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} + \frac{A}{(1+r)^3} + \dots$

$$= \frac{A}{1+r} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+r}} = \underline{\underline{\frac{A}{r}}}$$

Uendelig geom. rekke

$$k = \frac{1}{1+r} < 1$$

(hvis $r > 0$)

Ex: $\left. \begin{array}{l} A = 100.000 \\ r = 10\% \end{array} \right\} \text{ nåverdi } \frac{A}{r} = \frac{100.000}{0,10} = \underline{\underline{1.000.000}}$

Husk: $a_1 + a_1 k + a_1 k^2 + \dots$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{konvergerer for } -1 < k < 1 \\ \text{divergerer ellers} \end{array} \right.$

Hvis $-1 < k < 1$, så er $a_1 + a_1 k + a_1 k^2 + \dots = \underline{\underline{\frac{a_1}{1-k}}}$

① Kontinuerlig forrentning og Eulers tall

Renten er r per år.

Hvis det er n terminer per år, blir terminrenten r/n . Da er årlig vekstfaktor: $(1+r/n)^n$

Kontinuerlig forrentning:

$$\text{Årlig vekstfaktor} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+r/n)^n$$

	$n=10$	$n=100$	$n=1000$
$r=3\%$:	$(1+0,03/10)^{10}$	$(1+0,03/100)^{100}$	$(1+0,03/1000)^{1000}$

$r=3\%$:	$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+r/n)^n \approx 1,03045$	← årlig vekstfaktor ved kontinuerlig forrentning med $r\%$
$r=5\%$:	$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+r/n)^n \approx 1,05127$	

Ved $r=100\%=1$:

Defn: Eulers tall $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+1/n)^n$

$$\approx 2,71828$$

Resultat:

Årlig vekstfaktor ved rente r og kontinuerlig forrentning:

$$e^r$$

Kalk: $\boxed{e^x}$

Ek: Vi setter 5000 kr på en bankkto. med 4% nominell rente. Hvis vi får kontinuerlig forrentning, er dette i løpet av 5 år vokst til:

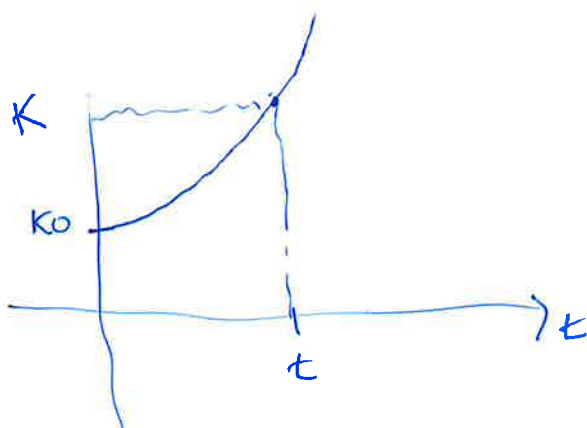
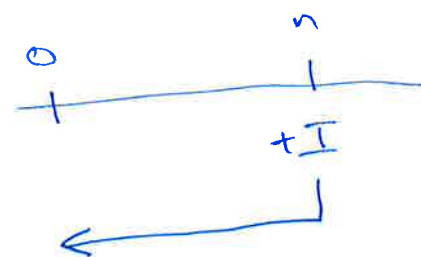
Kontinuerlig:	Årlig forrentning
$5000 \cdot (e^{0.04})^5$	$5000 \cdot (1 + 0.04)^5$
$= 5000 \cdot e^{0.04 \cdot 5}$	$= 5000 \cdot 1.04^5$
$= 5000 \cdot e^{0.20}$	

Ek: Investering og nåverdi

En innbetaling I etter n år, og vi bruker kontinuerlig diskontningsrate r , så er nåverdien

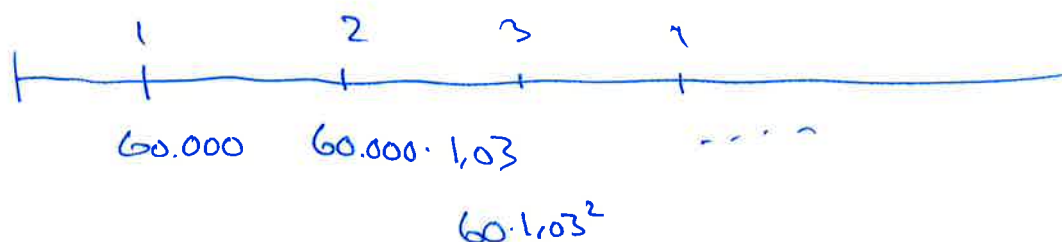
$$\frac{I}{(e^r)^n} = \frac{I}{e^{rn}}$$

$$= \underline{\underline{I \cdot e^{-rn}}}$$



måls $\frac{K}{e^{rt}}$

Ek: En investering gir tilbakebetaling
60.000 kr om et år, og dreier hvert år
med en aksis på 3% i året.



Nåverdi: Diskonteringsrente 10%

$$\frac{60.000}{1,10} + \frac{60.000 \cdot 1,03}{1,10^2} + \frac{60.000 \cdot 1,03^2}{1,10^3} + \dots$$

$$= \frac{60.000}{1,10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1,03}{1,10}} = \frac{60.000}{1,10 - 1,03}$$

$$= \frac{60.000}{0,07} \approx \underline{\underline{857.142,86}}$$

↑ uendelig
geometrisk
 $k = \frac{1,03}{1,10} < 1$
 $3\% < 10\%$

② Lineære og kvadratiske likninger

Et lineært uttrykk har formen $ax+b$,
der a, b er gitte tall.

Ex: $2x+3$, $x-\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$

Linear likning: Begge sider er lineare uttrykk

Ex: $2x+3 = x-5$
 $x = -8$

Et kvadratisk uttrykk har formen ax^2+bx+c ,
der a, b, c er gitte tall og $a \neq 0$.

En kvadratisk likning: Begge sider er kvadratiske
uttrykk, eller en side
kvadratisk og en side lineær.

Ex: $x^2-1 = x+3 \rightarrow x^2-x-4=0$
 $x^2+x-1 = 2x^2-3x+2 \rightarrow -x^2+4x-3=0$

Kvadratiske likninger kan skrives: $ax^2+bx+c=0$

Løsning av kvadratiske likninger

a) $x^2 = k$



Ex: $x^2 = 10$
 $x = \pm \sqrt{10}$

$x = \sqrt{10}$ eller ~~$x = \sqrt{10}$~~ $x = -\sqrt{10}$

$x = \pm \sqrt{k}$, hvis $k \geq 0$
ingen løsn., hvis $k < 0$

b) $u(x) \cdot v(x) = 0$

$u(x) = 0$ eller $v(x) = 0$

Ex:

$x \cdot (x-1) = 0$

Kvadr. likn. ($x^2 - x = 0$)
på faktorisert form.

$x = 0$ eller $x - 1 = 0$
 $x = 0$ $x = 1$

Ex:

$x^2 + 4x + 3 = 0$

$x^2 + 4x + 4 = -3 + 4$

$(x+2)^2 = 1$

$x+2 = \pm \sqrt{1} = \pm 1$

$x+2 = 1$ eller $x+2 = -1$

$x = -1$

$x = -3$

$x^2 + px + \frac{p^2}{4}$
 $(x + \frac{p}{2})^2$

"halvere,
kvadrere,
addere"

abc-formelen:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad | :a \quad (a \neq 0)$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{-c \cdot 4a + b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{abc-formelen}$$

Ex:

$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$a = -1 \quad b = 4 \quad c = -3$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{-2} = \frac{-4 \pm 2}{-2} = 2 \pm 1$$

$$x = \frac{-4 + 2}{-2} = 1 \quad \text{eller} \quad x = \frac{-4 - 2}{-2} = 3$$

Ex:

$$x^2 + 4x + 7 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 28}}{2}$$

ingen
løsninger

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

diskriminant

$\Delta > 0$: To løsninger

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Delta = 0$: En dobbeltrot

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

$\Delta < 0$: Ingen løsninger.

Viètes formel: $x^2 - px + q = 0$ har løsninger x_1 og x_2



$$\begin{cases} x_1 + x_2 = p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$$

Ex:

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x_1 = 3, x_2 = 4$$

$$\begin{aligned} x^2 - 7x + 12 &= (x-3) \cdot (x-4) = x^2 - 3 \cdot x + x \cdot (-4) + (-3) \cdot (-4) \\ &= x^2 - (3+4)x + 3 \cdot 4 \\ &= x^2 - 7x + 12 \end{aligned}$$

Faktorisering av andre grads uttrykk

$$ax^2 + bx + c = \cancel{(x-u)} \cdot \cancel{(x-v)} \\ a \cdot (x-u) \cdot (x-v)$$

$$\left. \begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a \cdot (x-u) \cdot (x-v) &= 0 \\ x-u &= 0 \quad \text{eller} \quad x-v=0 \\ \underline{x=u} \quad &\text{eller} \quad \underline{x=v} \end{aligned}$$

Ex: $x^2 - 4x + 3 = ?$ $x^2 - 4x + 3 = \underline{\underline{(x-1)(x-3)}}$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\underline{x=1}, \underline{x=3}$$

Faktorisering av $ax^2 + bx + c$:

Hvis $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, så har $ax^2 + bx + c = 0$ to løsninger $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ og faktorisering

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Hvis $\Delta < 0$: Inger faktorisering i lineære faktorer.

Eks: $2x^2 + 8x + 14 = 2 \cdot (x^2 + 4x + 7)$

$$2x^2 + 8x + 14 = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 92}}{4}$$

$\Delta = 64 - 92 < 0 \rightarrow$ Ingen faktorisering i lineære uttrykk.

Ex: $-x^2 + 6x - 9 = -\underline{(x-3)^2}$

$$-x^2 + 6x - 9 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{-2}$$

$$x_1 = x_2 = \underline{3}$$

Polynom: $ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$
polynom av grad n : $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ er
 gitte tall,
 $a_n \neq 0$

$n=2$: Kvadratiske uttrykk

$n \leq 1$: Lineare uttrykk.