

FORELESNING 5

EIVIND ERIKSEN

SEP 21, 2016

MET1180
MATEMATIKK

Plan:

- ① Likninger med parametre
- ② Polynomer og polynomlikninger
- ③ Polynomdivisjon og faktorisering

Pensum:

[E] 2.3 - 2.6

① Likninger med parametre

Eko: Vi produserer og selger x enheter av en vare til pris $p = 5$ kr.

Inntektsfunksjon:

$$I(x) = p \cdot x = \underline{5x}$$

Vi antar at kostnadsfunksjon

$$K(x) = 500 + 4x - 0,04x^2$$

$$= 500 + x \cdot (4 - 0,04x)$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}$
faste
kostnader

$\underbrace{\hspace{1cm}}$
variable
kostnader
per enhet.

$I(x) = K(x)$: $5x = 500 + 4x - 0,04x^2$

$$0,04x^2 + x - 500 = 0$$

$x \geq 0$

$$\longrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 0,04(-500)}}{2 \cdot 0,04} = \frac{-1 \pm 9}{0,08}$$

$$x = \frac{-1+9}{0,08} = \frac{8}{0,08} = \underline{\underline{100}}$$

$$\pi(x) = I(x) - k(x) \quad \pi(100) = 0$$

(profitt-funksjon)

Med prisen p som parameter:

$$I(x) = px$$

$$K(x) = 500 + 4x - 0,04x^2$$

$$\pi(x) = I(x) - k(x) = px - (500 + 4x - 0,04x^2)$$

$$= 0,04x^2 + (p-4)x - 500 = 0 \quad \leftarrow$$

$$x = \frac{-(p-4) \pm \sqrt{(p-4)^2 - 4 \cdot 0,04 \cdot (-500)}}{2 \cdot 0,04}$$

$$= \frac{-(p-4) \pm \sqrt{(p-4)^2 + 80}}{0,08}$$

$$x(p) = x = \frac{-(p-4) + \sqrt{(p-4)^2 + 80}}{0,08}$$

Likning i x
med parameter
p



Vi løser
likninger for
x, og løsn.
vil avhenge
av p.

$$p=5: \quad x = 100$$

$$p=6: \quad x = \frac{-2 + \sqrt{84}}{0,08}$$

$$p=4: \quad x = \frac{\sqrt{80}}{0,08}$$

$$x(5) = 100$$

$$x(6) = \frac{-2 + \sqrt{84}}{0,08} \approx \underline{\underline{89,86}}$$

$$x(4) = \frac{\sqrt{80}}{0,08} \approx \underline{\underline{111,80}}$$

$$\sqrt{(p-4)^2 + 80} \geq \sqrt{(p-4)^2} = |p-4|$$

Ews: $x^2 - (t+7)x + 10(t-3) = 0$

(Løst med parameter t)

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \frac{(t+7) \pm \sqrt{(t+7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10(t-3)}}{2} \end{array} \right.$$

$$= \frac{(t+7) \pm \sqrt{t^2 + 14t + 49 - 40t + 120}}{2}$$

$$= \frac{(t+7) \pm \sqrt{t^2 - 26t + 169}}{2} \quad \leftarrow (t-13)^2$$

$$= \frac{t+7 \pm (t-13)}{2}$$

$$x(t) = \underline{t-3} \quad \text{eller} \quad x(t) = \underline{10}$$

Hvis x var parameter istedet for t :

$$x^2 - (t+7)x + 10(t-3) = 0$$

$$(-tx + 10t) + (x^2 - 7x - 30) = 0$$

$$(10-x)t + (x^2 - 7x - 30) = 0$$

$$t = \frac{-(x^2 - 7x - 30)}{10-x} = \underline{\underline{\frac{x^2 - 7x - 30}{x-10}}}$$

② Polynomer og polynomlikninger

Et monom i x av grad n :

$$a \cdot x^n$$

$a \neq 0$ tall, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Ex: $2x^3$
 $5x^1 = 5x$
 $-1 \cdot x^0 = -1$

Et polynom er en sum av monomer.

Ex: $2x^3 + 5x - 1$ (grad 3)

Grader- til et polynom er den største graden til monomene som inngår i polynomet.

En polynomlikning er en likning der begge sider er polynomer.

Ex: $x^2 - 1 = 3x + 4$

$x^2 - 3x - 5 = 0$

Alle polynomlikninger
kan skrives på standard
form

$$p(x) = 0$$

der $p(x)$ er et polynom.

Polynomlikningen $p(x) = 0$ har grad n dersom $p(x)$ er et polynom av grad n .

Grad 2: Annengradslikning = kvadratisk likning

Grad 1: Førstegradslikning = linear likning

Exo:

$$x^3 - 4x^2 + 3x = 0$$

$$x(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$\underline{x=0} \text{ eller } x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\underline{x=1}, \underline{x=3}$$

$$\underline{\underline{x=0, x=1, x=3}}$$

(tredjegrads-løsing)

Paktorisering

Exo:

$$x^6 - 4x^3 + 4 = 0$$

$$u^2 - 4u + 4 = 0$$

$$u = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4}}{2}$$

$$u_1 = \underline{2}, u_2 = \underline{2}$$

$$x^3 = 2$$

$$\underline{\underline{x_1 = \sqrt[3]{2}}}, \underline{\underline{x_2 = \sqrt[3]{2}}}$$

(sjettegrads-løsing)

$$x^6, x^3, x^0$$

$$(x^3)^2, (x^3), (x^3)^0$$

$$u = x^3$$

variabelskifte

Generelt:

Polynomlikning av grad n :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

der $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ er tall og $a_n \neq 0$.

Der kan ha n løsninger eller færre enn n løsninger.

Resultat: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
($a_n \neq 0$)

$$p(x) = 0$$

- ① Hvis det finnes en løsning av $p(x) = 0$ som er et heltall og $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ er heltall, så vil heltallsløsningen x dele a_0

Eks: $x^3 - 3x + 2 = 0 \rightarrow$ Mulige heltallsloesn. er $\pm 1, \pm 2$.

$x=1$: ok $0=0$

$x=-2$: ok $0=0$

- ② Hvis $x=c$ er løsning av $p(x)=0$, så kan løsningen skrives

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow (x-c) \cdot q(x) = 0$$

For å finne $q(x)$ må vi bruke polynomdivisjon.

$$p(x) = (x-c) \cdot q(x) \Rightarrow q(x) = \frac{p(x)}{x-c}$$

(polynomdivisjon)

③ Polynomdivisjon og faktorisering.

Eksempel:
$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = (x^2 - 4x + 3) : (x - 1)$$

Algoritmen:
$$\begin{array}{r} (x^2 - 4x + 3) : (x - 1) = x - 3 \\ - (x^2 - x) \end{array}$$

Følgelig rest $\rightarrow$
$$\begin{array}{r} -3x + 3 \\ - (-3x + 3) \\ \hline 0 \end{array}$$

Rest $\rightarrow$

Vi fortsetter helt til resten har mindre grad enn $x - 1$, dvs en konstant.

Resultat:
$$(x^2 - 4x + 3) : (x - 1) = \underline{\underline{x - 3}}$$

Resultat: Polynomdivisjonsalgoritmen

Dersom $p(x)$, $d(x)$ er polynomer, fins det et polynom $q(x)$ og et polynom $r(x)$ med grad mindre enn $d(x)$ slik at

$$p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x) \Leftrightarrow \frac{p(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$$

Dersuten er $q(x)$ og $r(x)$ entydige.

Konsekvens:

Vi skal utføre: $p(x) : d(x) = \frac{q(x) \cdot d(x) + r(x)}{d(x)}$

Altså: $\frac{p(x)}{d(x)} = \frac{q(x) \cdot d(x) + r(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$

For å sjekke om divisjonen $p(x) : (x-c)$ går opp, kan vi undersøke om $p(c)=0$.

$p(x) : (x-c) \text{ går opp} \iff p(c)=0$

Hvorfor:
$$\begin{aligned} p(x) &= q(x) \cdot (x-c) + r(x) \\ &= q(x) \cdot (x-c) + r \end{aligned}$$

$$p(c) = q(c) \cdot 0 + r = r$$

$p(c) = r$

$$r=0 \iff p(c)=0$$

Oppsummering: Polynomdivisjon

i) Vi har en algoritme for å dividere et polynom $p(x)$ på et annet polynom $d(x)$. Når vi bruker algoritmen, finner vi en kvotient $q(x)$ og en rest $r(x)$.

Dette er polynomer med

$$\text{grad } q(x) = \text{grad } p(x) - \text{grad } d(x)$$

$$\text{grad } r(x) < \text{grad } d(x)$$

og de er entydig bestemt av $p(x)$, $d(x)$

Slik at de oppfylles

$$\frac{p(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)} \iff p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x)$$

ii) Spesialtilfellet $d(x) = x - c$, c et tall:

I dette tilfellet er $r(x) = r$ en konstant (grad 0)

og vi har at $r = p(c)$, verdien av polynomet $p(x)$ med $x = c$. Spesielt har vi:

$$p(x) : (x - c) \text{ går opp} \iff p(c) = 0$$

Dvs:

Vi har en faktorisering $p(x) = (x - c) \cdot q(x)$



$x = c$ er en løsning av $p(x) = 0$.

Ekse: $(x^3 - x + 1) : (x - 3) = x^2 + 3x + 8$

$$-(x^3 - 3x^2)$$

$$3x^2 - x + 1$$

$$-(3x^2 - 9x)$$

$$8x + 1$$

$$-(8x - 24)$$

$$25$$

$$q(x) = x^2 + 3x + 8$$

$$r(x) = 25$$

$$\frac{x^3 - x + 1}{x - 3} = x^2 + 3x + 8 + \frac{25}{x - 3}$$

Ekse: $(x^3 + x^2 + x - 1) : (x^2 - 4) = x + 1$

$$-(x^3 - 4x)$$

$$x^2 + 5x - 1$$

$$-(x^2 - 4)$$

$$5x + 3$$

$$q(x) = x + 1$$

$$r(x) = 5x + 3$$

$$\frac{x^3 + x^2 + x - 1}{x^2 - 4} = x + 1 + \frac{5x + 3}{x^2 - 4}$$

Es: $x^3 - 3x + 2 = 0$
 $(x-1) \cdot q(x) = 0$
 $P(x)$

Mulige heltallstam:

$\pm 1, \pm 2$

$x=1$ er en løsning

$p(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 - 3x + 2}{x-1}$
 går opp.

$$q(x) = (x^3 - 3x + 2) : (x-1) = x^2 + x - 2$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x + 2 \\ - (x^3 - x^2) \\ \hline x^2 - 3x + 2 \\ - (x^2 - x) \\ \hline -2x + 2 \\ - (-2x + 2) \\ \hline 0 \end{array}$$

$(x-1) \cdot (x^2 + x - 2) = 0$

$x-1=0$ eller $x^2 + x - 2 = 0$

$x=1$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$

$x=1$, $x=-2$

vet

Hvis vi ~~viser~~ at $x=1$ og $x=-2$ er løsninger:

$x^3 - 3x + 2 = \underbrace{(x-1) \cdot (x+2)}_{x^2 + x - 2} \cdot q(x)$

$q(x) = x-1$ (ved polynomdiv)

Faktorisering:

$$p(x) = \underbrace{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}_{= 0} = 0$$

Hvis $\left\{ x=x_1, x=x_2, \dots, x=x_n \right\}$ da har vi
er løsninger av $p(x)=0$

en faktorisering:

$$p(x) = a_n (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n)$$

Algebraens fundamentalsete:

Ethvert polynom kan faktoriseres i lineære
og kvadratiske faktorer.
irreducibile

Ex: ~~Ex:~~ $p(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = 0$

Heltallige: ± 1
 $x=1$ er løsn.

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1) \cdot (\dots)$$

$$= (x-1)(x^2 + 2x + 1) = \underline{(x-1)(x+1)^2}$$

$$x^3 + x^2 - x - 1 : x-1 = x^2 + 2x + 1$$

$$\underline{x^3 - x^2}$$

$$2x^2 - x - 1$$

$$\underline{2x^2 - 2x}$$

$$x - 1$$

$= (x-1)(x+1)(x+1)$
tre lineære fakt.

Els: $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1$
 $= (x-1)(x^2+1)$

$$x^2+1=0$$

$$x^2=-1$$

Ingen løsning

± 1 heltallse:

$x=1$ er en løsn.

x^2+1 kalles irreduksibel
kvadratisk faktor

Irreduksibel kvadratisk faktor:

En kvadratisk faktor ax^2+bx+c slik at

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \iff ax^2+bx+c=0 \iff ax^2+bx+c$$

har ingen løsn.

kan ikke

faktoriseres i
 lineære faktorer

Eq: $x^3 - x + 1 = 0$

$x = u + v$: Cardanos trick

$$(u+v)^3 - (u+v) + 1 = 0$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - (u+v) + 1 = 0$$

$$(u^3 + v^3 + 1) + (u+v)(\cancel{3u^2v} + \cancel{3uv^2} - 1) = 0$$

$$u^3 + v^3 + 1 = 0 \quad \text{og} \quad \cancel{3u^2v} + \cancel{3uv^2} - 1 = 0$$

Mulige heltallige løsn:

± 1 : $x = 1$ ikke løsn.
 $x = -1$ ikke løsn

ingen heltallsløsninger

Løsn: $3uv = 1 \Rightarrow v = \frac{1}{3u}$

$$u^3 + v^3 = -1 \Rightarrow u^3 + \left(\frac{1}{3u}\right)^3 = -1$$

$$u^3 + \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{u^3} = -1 \quad | \cdot u^3$$

$$u^6 + \frac{1}{27} = -u^3$$

$$u^6 + u^3 + \frac{1}{27} = 0$$

$$u^3 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4/27}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4 - 1/27}$$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4 - 1/27}}$$

$$v^3 = -1 - u^3$$

$$= -\frac{1}{2} \mp \sqrt{1/4 - 1/27} \Rightarrow v = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} \mp \sqrt{1/4 - 1/27}}$$

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{1/4 - 1/27}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \sqrt{1/4 - 1/27}} \approx -1,3247$$

Likninger $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ ($a_n \neq 0$)
kan løses ved en formel (algebraisk uttrykk) i
koeff. $a_n, \dots, a_1, a_0$ for $n=3$ (Cardanos formel)
og $n=4$. Formlene er tilsvarende abe-formelen,
men mye mer komplisert (se vi ser fra els. på
første side).

For $n \geq 5$, har den norske matematikeren Abel
bevist at det ikke finnes noen slik formel.