

FORELÆSNING 6

ERVIND ERIKSEN

SEP 28 2016

MET1180

MATEMATIKK

Plan:

- ① Andre likninger (rasjonale, radikale)
- ② Ulikheter
- ③ Funksjoner og greter

Pensum:

[E] 2.7-28,
3.1-32

[E]: læreboken er i bokhandelen

MET11801: utleveres mandag.

Repetisjon: polynomlikninger $\begin{cases} \text{polynomdivisjon} \\ \text{faktorisering} \end{cases}$

Ex. (Opps. 2.6.5)

$$p(x) = x^3 + x^2 + 5x + 14 \quad \text{faktorisering} = ?$$

Ser på $x^3 + x^2 + 5x + 14 = 0 \rightarrow$ mulige heltallsløsninger:

$$x = -1: 9 \neq 0$$

$$x = \pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14$$

$$x = -2: 0 = 0 \quad \underline{x = -2 \text{ er løsn}} \rightarrow x - (-2) = \underline{x + 2} \text{ er en faktor i } p(x)$$

Polynomdivisjon:

$$(x^3 + x^2 + 5x + 14) : (x + 2) = ?$$

$$x^3 + x^2 + 5x + 14 = (x + 2) \cdot (x^2 - x + 7)$$

$$\begin{array}{l} (x^3 + x^2 + 5x + 14) : (x+2) = x^2 - x + 7 \\ - (x^3 + 2x^2) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -x^2 + 5x + 14 \\ - (-x^2 - 2x) \\ \hline 7x + 14 \\ - (7x + 14) \\ \hline 0 \end{array}$$

Husk:

$p(x) : (x-a)$ har rest

$$r = p(a)$$

Konklusjon: $x^3 + x^2 + 5x + 14 = (x+2) \cdot (x^2 - x + 7)$

→ kan $x^2 - x + 7$ faktoriseres?

$$x^2 - x + 7 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-28}}{2}$$

Ingen løsn.

→ $x^2 - x + 7$ kan ikke faktoriseres i lineære faktorer.

↑
irreducibelt kvadratisk uttrykk.

Algebraens fundamentalset

Et hvert polynom kan faktoriseres i lineære og irreducibile kvadratiske faktorer.

Ekse: $x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = (x-3) \cdot (x^2 - x - 1)$
faktorering

$$x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = 0$$

Helletallige mulige løsn.:

$$\pm 1, \pm 3$$

$x=1$: $2 \neq 0$

$x=3$: $0 = 0 \rightarrow \underline{x=3}$ er en løsn.

$$\begin{array}{r} (x^3 - 4x^2 + 2x + 3) : (x-3) = \underline{x^2 - x - 1} \\ - (x^3 - 3x^2) \\ \hline -x^2 + 2x + 3 \\ - (-x^2 + 3x) \\ \hline -x + 3 \\ - (-x + 3) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\underline{x^2 - x - 1 = 0:} \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ eller } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Konklusjon:

$$\underline{x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = (x-3) \cdot \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}$$

1 Andre likninger:

Rasjonale likninger:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = 0$$

($p(x), q(x)$ er polynom)

Ek:

$$\frac{x}{1+x} = \frac{1}{x}$$

$$x \neq 0, -1$$

$$\frac{x}{1+x} - \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{x \cdot x}{(1+x) \cdot x} - \frac{1 \cdot (x+1)}{x \cdot (x+1)} = 0$$

$$\frac{x^2 - x - 1}{x \cdot (1+x)} = 0$$

lesn: $x^2 - x - 1 = 0$
 $x(1+x) \neq 0$

$$\frac{x}{1+x} = \frac{1}{x} \quad \left| \cdot \begin{matrix} (x+1) \cdot x \\ " \\ (1+x) \cdot x \end{matrix} \right.$$

$$\frac{x}{1+x} \cdot x \cdot (1+x) = \frac{1}{x} \cdot x \cdot (1+x)$$

$$x^2 = x + 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Sjekk at
løn. av
polynomlikn.
er $\neq 0, -1$ (ok)

husk: Når vi multipliserer / dividerer
en likning med $u(x)$ på
begge sider, så bevares
løsningene len derom $u(x) \neq 0$

Radikale likninger:

"irrasjonelle likninger"

Likninger som inneholder røtter (med x)

Ex: $\sqrt{x} - 1 = x$

$$\sqrt{x} = 1 + x \quad | (\cdot)^2$$

$$(\sqrt{x})^2 = (1+x)^2$$

$$x = 1 + 2x + x^2$$

$$0 = x^2 + x + 1$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

Ingen løsn.

Setter prøve
på svarene:

Ex: $\sqrt{x} + 1 = x$

$$\sqrt{x} = x - 1 \quad | (\cdot)^2$$

$$x = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$0 = x^2 - 3x + 1$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2.618$$

$$\text{eller } x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.382$$

falsk løsning.

Når vi opphøyer en likning i andre, vil de opprinnelige løsningene bli bevart, men det kan i tillegg komme en falske løsninger

!!

Vi må sette prøve på svaret

Ex: $\sqrt{x-1} + 1 = \sqrt{x+1} \quad | (\cdot)^2$

$$(\sqrt{x-1} + 1)^2 = x+1$$

$$\cancel{x-1} + 2 \cdot \sqrt{x-1} + 1 = \cancel{x+1}$$

$$2 \cdot \sqrt{x-1} = 1$$

$$\sqrt{x-1} = 1/2 \quad | (\cdot)^2$$

$$x-1 = 1/4$$

$$x = 1/4 + 1 = \underline{\underline{5/4}} \quad \leftarrow \text{ok.}$$

Prøve: VS: $\sqrt{x-1} + 1 = \sqrt{5/4-1} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

HS: $\sqrt{x+1} = \sqrt{5/4+1} = \sqrt{9/4} = 3/2$

Ex: $\sqrt[3]{x} = 2 \quad | (\cdot)^3$

$$x = 2^3 = 8$$

(ikke strengt tatt nødvendig å sette prøve, 3 oddetall)

② Ulikheter

Ex: $3x - 1 \leq 4$ {lineær ulikhet}

$$\frac{3x}{3} \leq \frac{5}{3}$$

$$x \leq 5/3 \approx 1.67$$

Ulikhets tegn:

$<$: mindre enn

$\leq$: — | —
eller lek

$>$: større enn

$\geq$: — | —
eller lek

$\neq$: ulik

Vi løser lineære ulikheter
på tilsvarende måte som lineære
likninger.

Lovlige operasjoner:

- ① Legge til /trekke fra samme uttrykk på begge sider
- ② Multiplisere /dividere med et uttrykk med verdi $u(x) > 0$
 $u(x)$ på begge sider
- ③ Multiplisere /dividere med et uttrykk $u(x)$ på begge sider og snu ulikheten når $u(x) < 0$.

Ex: $1 - x \leq 2$

$$-x \leq 1 \quad | : (-1) \text{ og snu}$$

$$\frac{-x}{-1} \geq \frac{1}{-1}$$

$$\underline{\underline{x \geq -1}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - x \leq 2 \\ 1 \leq 2 + x \\ -1 \leq x \\ x \geq -1 \end{array} \right.$$

Merh: Svarene / løsninger av en ulikhet blir typisk intervaller.

$$x \geq -1 \text{ kan skrives } L = [-1, \infty)$$

$$= [-1, \rightarrow)$$

intervall-notasjon

$$x < 4 \iff L = (-\infty, 4) = (\leftarrow, +4)$$

$$= \langle \leftarrow, 4 \rangle = \langle \leftarrow, +4 \rangle$$

Dobbelt-ulikheter:

$$-7 \leq 1-3x \leq 7 \Leftrightarrow -7 \leq 1-3x \text{ og } 1-3x \leq 7$$

$$-7 \leq 1-3x \leq 7$$

$$1-1$$

$$-8 \leq -3x \leq 6$$

$$1: (-3)$$

og snu

||
finn x-verdier som
løser begge ulikheter.

$$\frac{-8}{-3} \geq \frac{-3x}{-3} \geq \frac{6}{-3}$$

$$8/3 \geq x \geq -2$$

$$\underline{\underline{-2 \leq x \leq 8/3 \approx 2,67}}$$

$$\underline{\underline{L = [-2, 8/3]}}$$

Ikke-lineære ulikheter:

Ex:

$$(x^2 - 3x + 2) \geq 0 \rightarrow \text{Metode:}$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0:$$

$$\underline{x=1}, \underline{x=2}$$

$$(x-1) \cdot (x-2) \geq 0$$

① Skriv på std. form
Slett at du har ene side
er et ikke-lineært
uttrykk og den andre
side er 0.

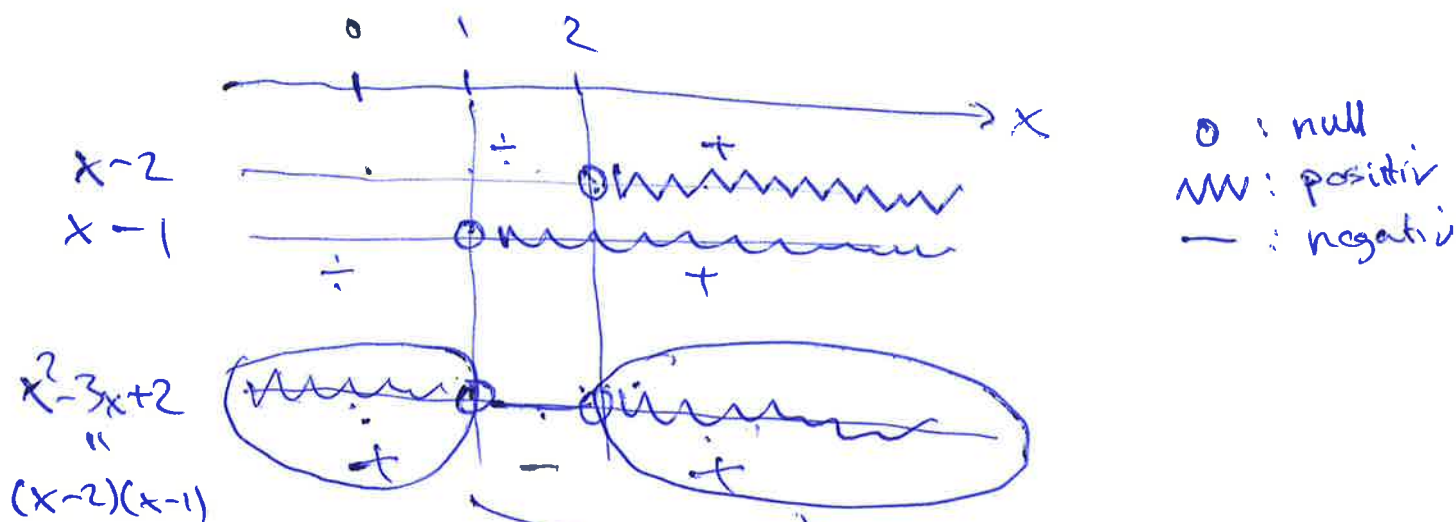
② Faktorisér dette uttrykket
og sett opp fortegnstegnet.

③ Les av løsn.

Fortegns diagram
(-størrelse / -ligning)

for

$$x^2 - 3x + 2 = (x-2) \cdot (x-1)$$



Ulikhet: $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

løsninger

$x \leq 1$ eller $x \geq 2$

$L = (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$

$\cup$: union

Eks:

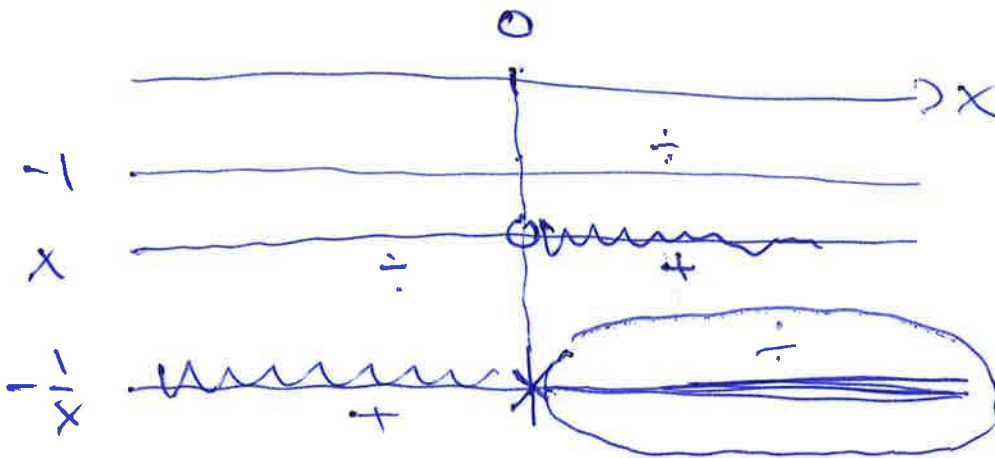
$$\frac{x-1}{x} \leq 1$$

$$\left(\frac{x-1}{x} - 1 \right) \leq 0$$

$$\frac{\cancel{x-1} - \cancel{x}}{x} \leq 0$$

$$-\frac{1}{x} \leq 0$$

$$\left(-\frac{1}{x} \right) \leq 0$$



x : ikke definert

Losn:

$$\underline{\underline{x > 0}}$$

$$\underline{\underline{L = (0, \infty) = (0, \rightarrow)}}$$

③ Funksjoner og greter

Ex: $f(x) = x^2 + x - 6$
funksjon i én variabel

$x=1$: $f(1) = 1^2 + 1 - 6 = -4$

$x=2$: $f(2) = 2^2 + 2 - 6 = 0$



betyr at vi setter inn $x=2$
i funksjonen f .

Funksjon:

f : en regel som til
enhver verdi av
 x tilordner et
entydig bestemt
tall



$f(x)$: funksjonsuttrykket

Definisjonsområde: (definisjonsmengde)

D_f = mengden av alle x -verdi
som kan settes inn i funksjonen

Ex: $f(x) = x^2 + x - 6$ uoverforstått: $D_f = \mathbb{R}$
= alle reelle tall
= alle x -verdier

Ex: $f(x) = \sqrt{x-1}$ —||— $D_f = [1, \rightarrow)$

Ex: $k(x) = x^2 + 3x + 100, x \geq 0$ $D_k = [0, \rightarrow)$

Verdionråde: $\mathbb{R} \leftarrow$ funksjonsverdiene $f(x)$ er ned
i verdionrådet $\mathbb{R}$.

Verdimengde: V_f = mengden av alle funksjonsverdier $f(x)$
vi kan få når $x \in D_f$.

Grafen til en funksjon:

f er en funksjon med
definisjonsmengde D_f

||

Grafen til f = mengden
av alle tallpar $(x, f(x))$
med $x \in D_f$.

$$\{(x, y) : y = f(x), x \in D_f\}$$

Ex: $f(x) = x^2 + x - 6$, $D_f = \mathbb{R}$

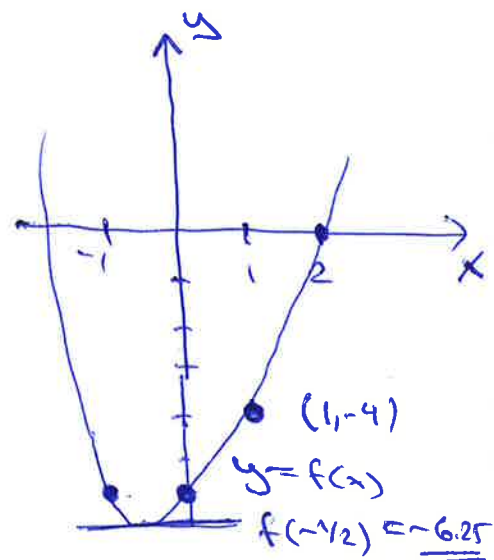
$x=1$: $f(1) = -4 \rightarrow (1, -4)$

$x=2$: $f(2) = 0 \rightarrow (2, 0)$

$x=0$: $f(0) = -6 \rightarrow (0, -6)$

$x=-1$: $f(-1) =$

Koordinatsystem



grafen til
 $f(x) = x^2 + x - 6$

$V_f = [-6.25, \rightarrow)$

Alternativ metode: Finne V_f ved regning.

$f(x) = x^2 + x - 6 = h$

$x^2 + x + (-6-h) = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-6-h)}}{2}$

h er med i V_f
||
denne lign. har løsninger

← Løsninger
||

$\Delta = 1 - 4(-6-h) \geq 0$

$25 + 4h \geq 0 \quad h \geq -\frac{25}{4} = -6.25$