

# FORELESNING 7

FIVIND ERIKSEN

OCT 5, 2016

**MET1180**

MATEMATIKK

Plan:

- ① Lineære funksjoner og rette linjer
- ② Kvadratiske funksjoner og parabler
- ③ Inntekts- og kostnadsfunksjoner
- ④ Voksende og avtagende funksjoner

MET11801: Kontrollleksjonen

Frist: 17/10 kl 12

Repetisjon:

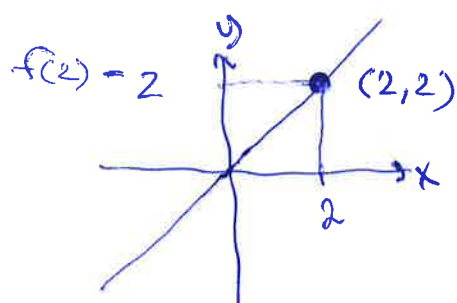
Funksjonen  $f$  gitt ved et funksjonsuttrykk  $f(x)$

Ex:  $f(x) = x$

$f(x) = x^2$

$f(x) = x^2 + x - 6$

Grafen til  $f$ : Løsningene av  $y = f(x)$



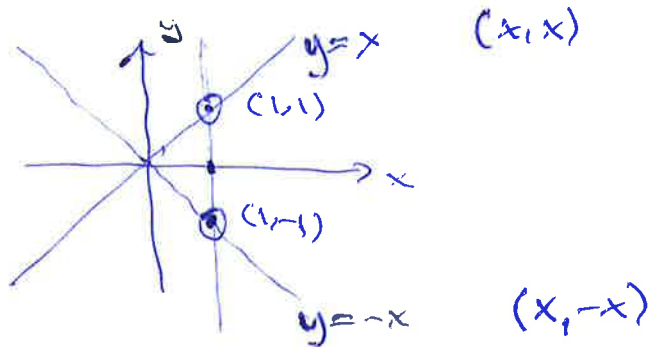
$y = x$

$(x, f(x)) = (x, x)$

Grafen til  $f$  = Samlingen av  
alle punkter  $(x, f(x))$  slik  
at  $x$  er i  $D_f$  = definisjonsmengden  
til  $f$ .

Eksem: Løsning i to variable

$$x^2 = y^2 \Rightarrow y = \pm x \Rightarrow y = x \text{ eller } y = -x$$

kurve

Dette er kurve grafen til en funksjon.

Grafen til en funksjon  $f$  kan skrives  $y=f(x)$ .

## ① Lineære funksjoner og rette linjer

Defn: En funksjon  $f$  er linear hvis den har formen (førstegradsfunksjon)

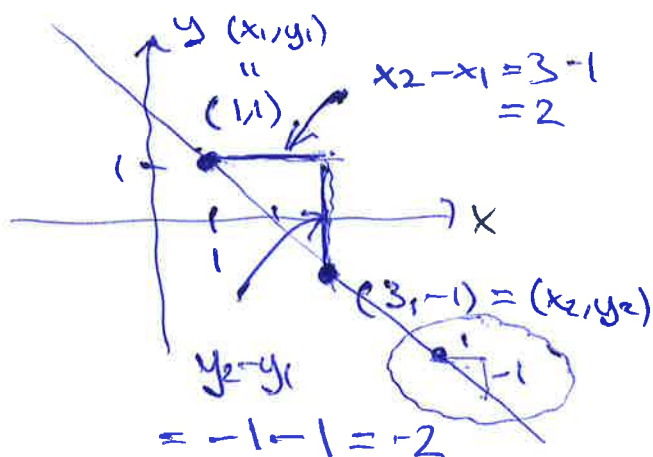
$$f(x) = ax + b$$

der  $a, b$  er gitte tall.

Ex:  $f(x) = x$  ,  $g(x) = 2x - 3$  ,  $h(x) = 4$

Grafen til en linear funksjon er en rett linje, og det er de eneste funksjonene som har rette linjer som graf.

## Stigningstall:



Stigningstall:  $\frac{-2}{2} = -1$

### Tolkning:

Dersom vi starter på linjen og beveger oss 1 enhet i x-retning, må vi bevege oss -1 enhet i y-retning for å treffe linjen

Grafen til  $f(x) = ax + b$  har  
stigningstall  $a$

Retten linje gjennom  
punktene  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$   
( $x_1 \neq x_2$ )

Stigningstall:  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$\Delta$  = delta (gresk bokstave)  
betyr endring

### Stigningstall:

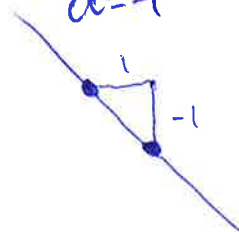
Ekse:  $a = 2$



$a = 0$



$a = -1$

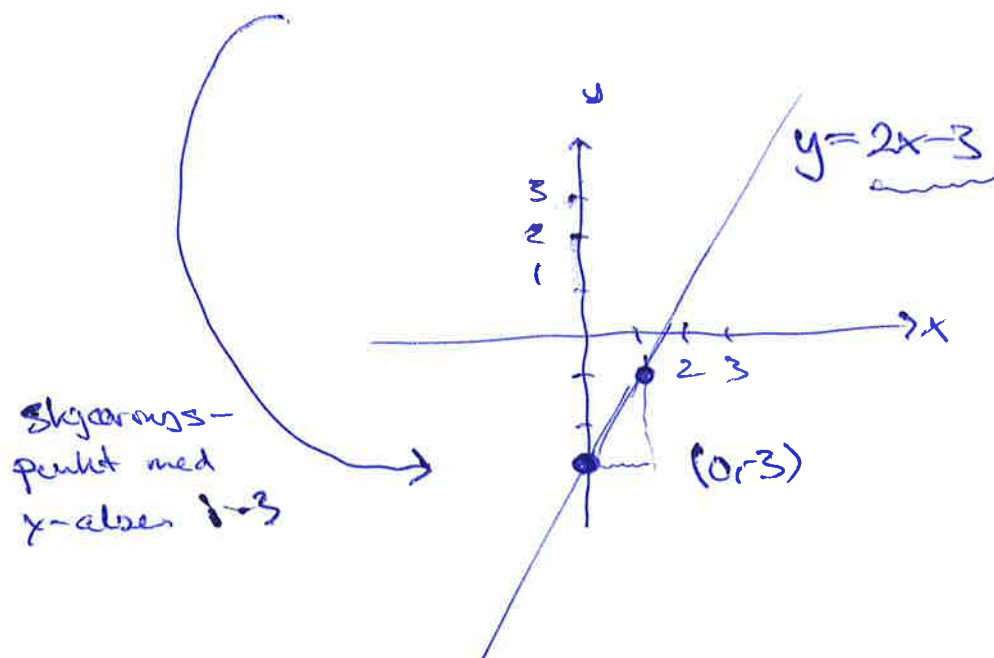
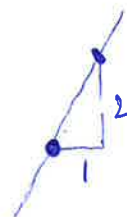


Eks:  $f(x) = 2x - 3$

$x=0$ :  $f(0) = 2 \cdot 0 - 3$   
 $= -3$

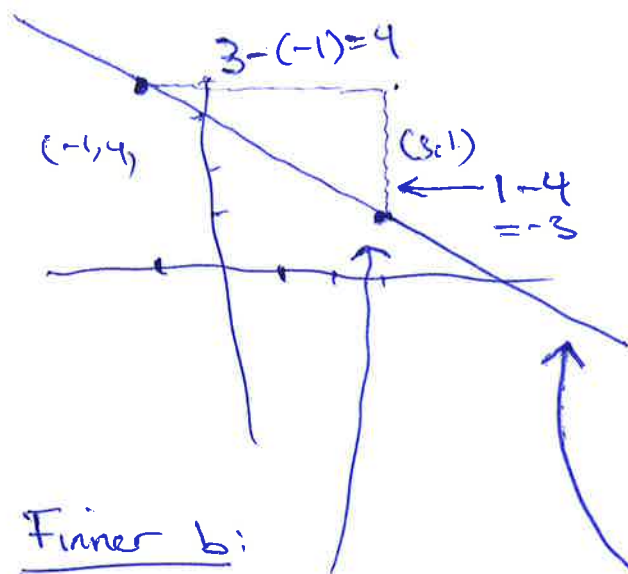
↓  
(0, -3) er på grafen

Grafen: Rett linje med  
stigningstall  
 $a=2$ .



Grafen til  $f(x) = ax + b$  er en rett linje  
med stigningstall  $a$  + skjæring med y-aksen i  $b$ .

Eks: Graden til  $f$  er en rett linje som går gjennom  $(-1, 4)$  og  $(3, 1)$ . Finn  $f$ .



$$f(x) = ax + b$$

$$= -\frac{3}{4}x + b$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$b = \frac{13}{4}$$

Finner  $b$ :

$$(3, 1): x=3, y=1$$

$$y = -\frac{3}{4}x + b$$

$$1 = -\frac{3}{4} \cdot 3 + b$$

$$1 = -\frac{9}{4} + b$$

$$b = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4} = 3,25$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$$

Likningen:

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$$

Ett punkts formelen:

En rett linje gjennom  $(x_0, y_0)$  og med stigningstall  $a$  har likning:

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

Eks:

$$y = y_0 + a \cdot (x - x_0)$$

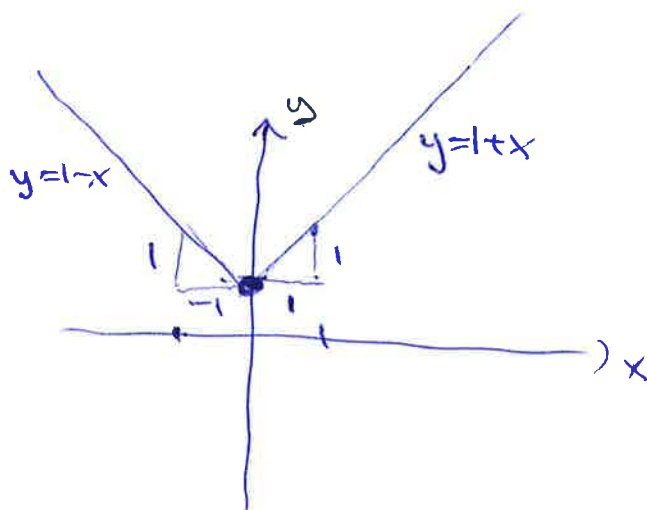
$$= 1 - \frac{3}{4}(x - 3) = 1 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{4} = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$$

Eks:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & , x < 0 \\ 1+x & , x \geq 0 \end{cases}$$

funksjon med  
delt forløp

$$f(2) = 3, \quad f(-1) = 2$$



$$\underline{x \geq 0: f(x) = 1 + x} \\ = x + 1$$

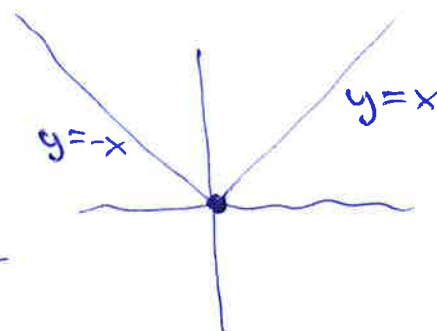
Stign. tall:  $a = 1$   
y-skj:  $b = 1$

$$\underline{x < 0: f(x) = 1 - x} \\ = -x + 1$$

Grafen til  $f$  består av to  
rette linjer.

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$= \underline{\underline{|x|}} \quad (\text{absolutt-} \\ \text{verdi})$$

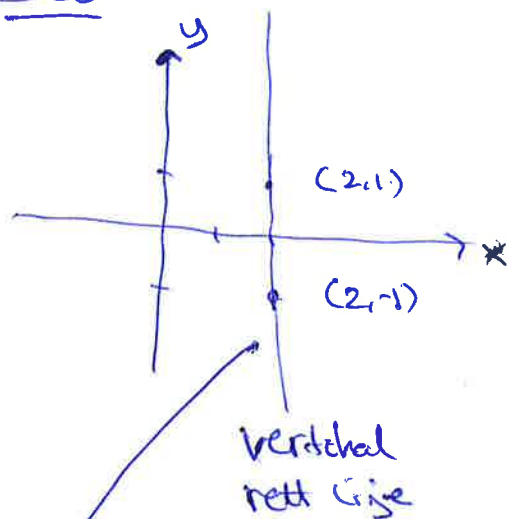


$$g(2) = 2 \\ g(-2) = 2$$

## Vertikale rette linjer

$f(x)$  funksjon:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Grafen til } f \text{ er en rett linje} \\ \uparrow\uparrow \\ f \text{ er linear } (f(x) = ax + b) \end{array} \right.$

Eks:



Stigningsfall:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1 - 1}{2 - 2} = \frac{-2}{0}$$

$$= \text{"} \pm \infty \text{"}$$

Likning:

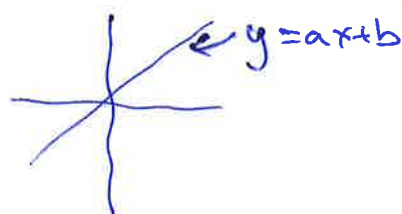
$$x = 2$$

ikke grafen til en funksjon

## Rette linjer:

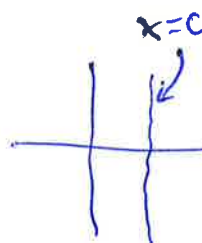
ikke-vertikale

$$y = ax + b$$



vertikale

$$x = c$$



## ② Kvadratiske funksjoner

Defn: En funksjon er kvadratisk (annengrads-  
funksjon) dersom den har formen

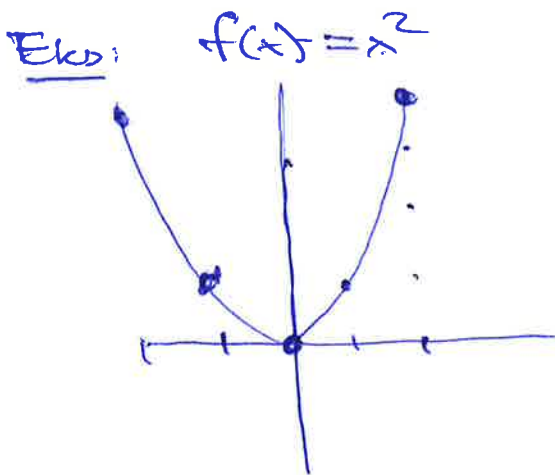
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

der  $a, b, c$  er gitte tall,  $a \neq 0$ .

Eks:  $f(x) = x^2$

$g(x) = x^2 + x - 6$

Defn: Graten til en kvadratisk funksjon kalles en parabel.



$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 1$$

$$f(2) = 4$$

$$f(3) = 9$$

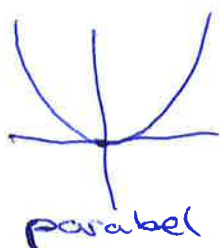
$$f(-1) = 1$$

$$f(-2) = 4$$

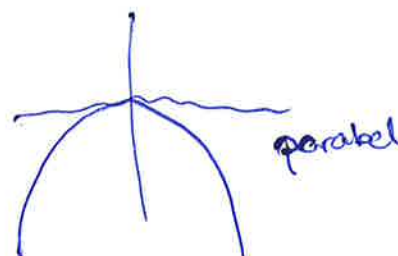
$$f(-3) = 9$$

Symmetrisk om  $y$ -aksen  
 $x=0$

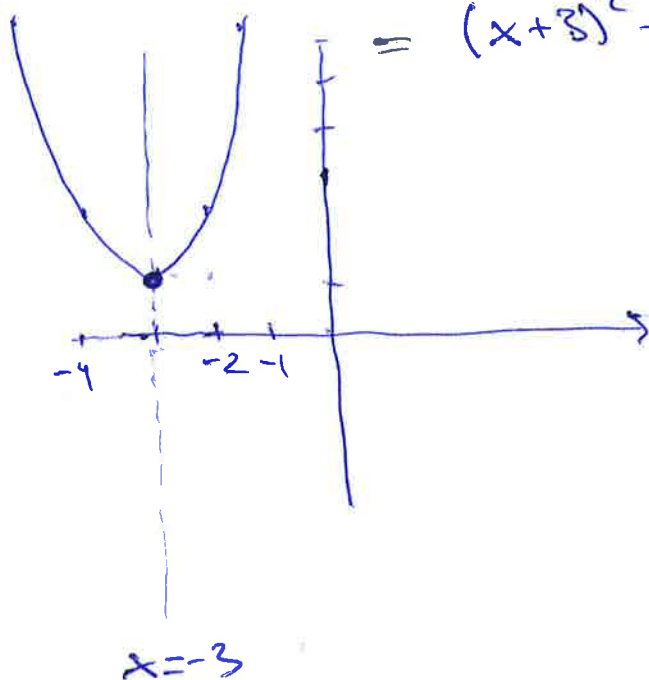
$f(x) = x^2$



$f(x) = -x^2$



Eks:  $f(x) = x^2 + 6x + 10$   
 $= (x^2 + 6x + 9) + 1$   
 $= (x+3)^2 + 1$



$$f(-3) = 1$$

$$f(-2) = 1 + 1 = 2$$

$$f(-4) = 1 + 1 = 2$$

$$f(-1) = 1 + 4 = 5$$

Barnpunkt:

$$x = -3 \text{ (symmetrilinje)}$$

$$y = f(-3) = 1$$

$$f(-3) = 1$$

Symmetri-linje

$$x + 3 = 0$$

$$\underline{\underline{x = -3}}$$

$$f(-3+1) = 1^2 + 1 = 2$$

$$f(-3-1) = (-1)^2 + 1 = 2$$

Formel:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

her symmetri-linje

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Eks:  $f(x) = x^2 + 6x + 10$

$$b = 6$$

$$a = 1$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2}$$

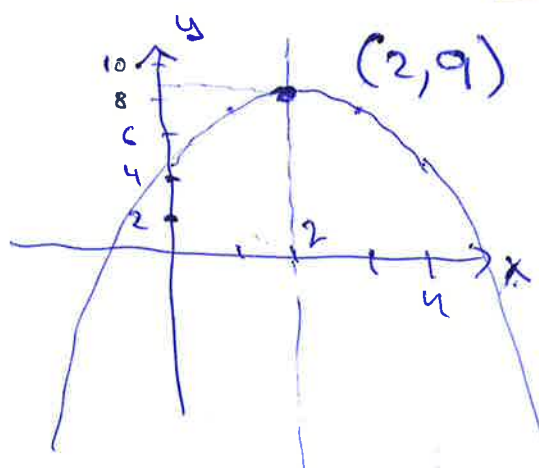
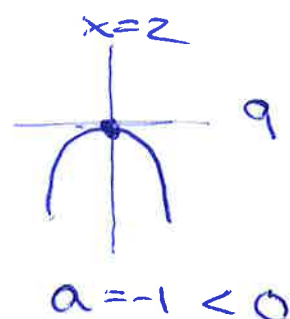
$$\underline{\underline{x = -3}}$$

Ekse:  $f(x) = -x^2 + 4x + 5$

Symmetri:  $x = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2$

$x=2$

$y = f(2) = -4 + 8 + 5$   
 $= 9$



$f(x) = -(x-2)^2 + 9$

Oppsummering:

En kvadratisk funksjon  $f(x) = ax^2 + bx + c$  har symmetri-linje  $x = -b/2a$ . Dessuten:

$a > 0$ :

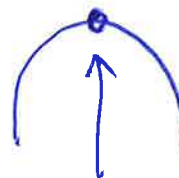
$x = -\frac{b}{2a}$  bottompunkt



$x = -\frac{b}{2a} \quad y = f(-\frac{b}{2a})$

$a < 0$

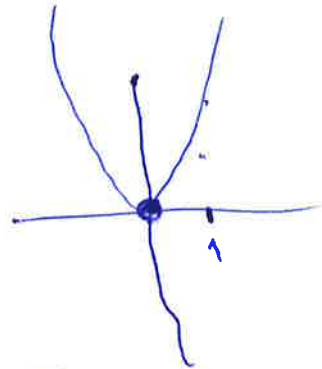
$x = -\frac{b}{2a}$  toppunkt



$x = -\frac{b}{2a} \quad y = f(-\frac{b}{2a})$

Ekse:  $f(x) = 2x^2$

$x \rightarrow 0$  Symmetri



$|a|$  forteller hvor bratt  
kurven er

Standard-form:

En kvadratisk funksjon  $f(x) = ax^2 + bx + c$   
kan skrives på formen

$$f(x) = a \cdot (x - x_0)^2 + y_0$$

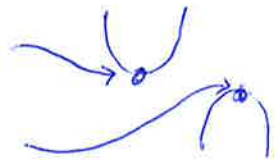
der

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$y_0 = f(x_0)$$

Hvis  $a > 0$ : Bunn-pkt  $(x_0, y_0)$

"  $a < 0$ : Topp-pkt  $(x_0, y_0)$



### ③ Inntekts- og kostnadsfunksjoner

$$I(x) = p \cdot x$$

$I$ : inntekt ved  $x$   
solgte enheter  
( $p$ : pris/enhet)

$$K(x) = F + x \cdot v$$

$K$ : kostnad ved  $x$   
produserte enheter

( $F$ : faste kostnader)  
( $v$ : variable kost/enhet)

$$\pi(x) = I(x) - K(x)$$

$\pi$ : profitt

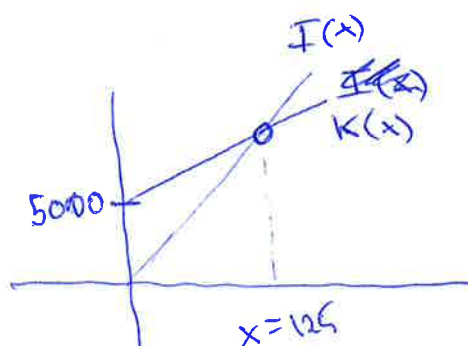
Exo:

$$\begin{aligned} I(x) &= 250x, \quad x \geq 0 & (p=250) \\ K(x) &= 5000 + 210x, \quad x \geq 0 & \left( \begin{array}{l} F=5000 \\ v=210 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi(x) &= 250x - (5000 + 210x) \\ &= 40x - 5000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi(x) = 0 : \quad 40x - 5000 &= 0 \\ 40x &= 5000 \end{aligned}$$

$$x = \frac{5000}{40} = \underline{\underline{125}}$$



Eksp:  $k(x) = 1500 + 12x - 0,03x^2$  ,  $x \geq 0$

$$= 1500 + x \cdot (12 - 0,03x)$$

$$= F + v \cdot x$$

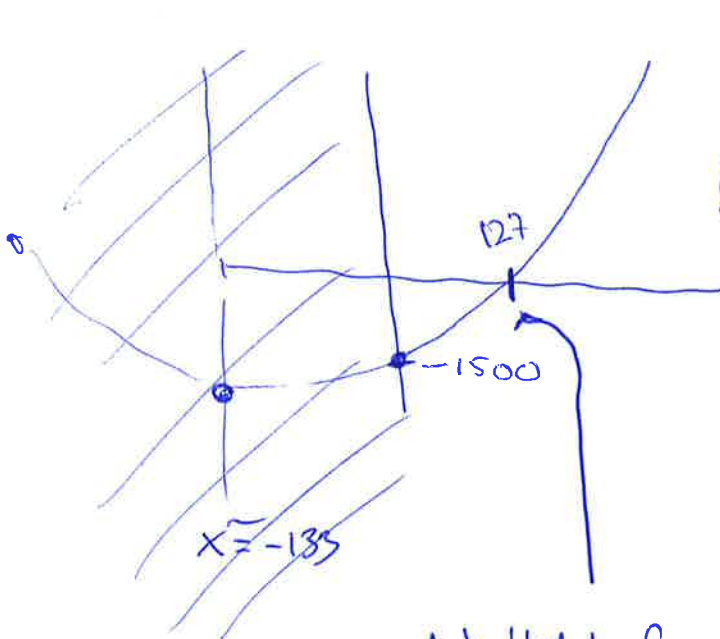
$$F = 1500 \quad \text{faste k.}$$

$$v = 12 - 0,03x \quad \text{variable k. per enhet}$$

$$I(x) = 20x$$

$$\pi(x) = 20x - (1500 + 12x - 0,03x^2)$$

$$= 0,03x^2 + 8x - 1500, \quad x \geq 0$$

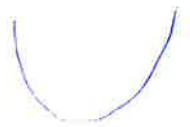


$\pi(x)$  er  
voksende  
når  $x \geq 0$

Symmetri:

$$x = \frac{-8}{0,06}$$

$$\approx -133$$



$$\pi(0) = -1500$$

Nullpnt for  $0,03x^2 + 8x - 1500$ :

$$0,03x^2 + 8x - 1500 = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 180}}{2 \cdot 0,03}$$

$$= \frac{-8 + \sqrt{244}}{0,06} \approx 127$$

### ③ Voksende og avtagende funksjoner

$f(x)$  funksjon  
 $I$  Intervall

Ek:

$$f(x) = 0,03x^2 + 8x - 1500$$

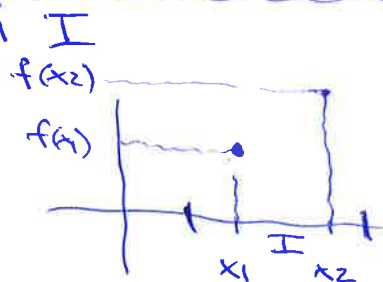
$$I = [0, \infty)$$

Defn:

$f$  er voksende på  $I$  hvis følgende  
er oppfylt:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

"større funksjonsverdi  
 $f(x)$  jo større  $x$   
er"



$f$  er avtagende på  $I$  hvis følgende  
er oppfylt:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

"mindre  
funksjonsverdi jo  
større  $x$  er"



$$f(x) = ax + b :$$

linear

---

$$a \geq 0$$



$f$  voksende overalt  
 $\pm = (\leftarrow, \rightarrow)$

$$a \leq 0$$



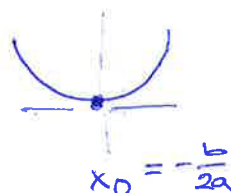
$f$  avtagende overalt

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

kvadratisk :

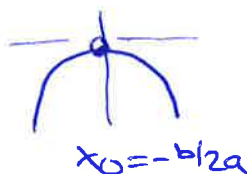
---

$$a > 0 :$$



$f$  er voksende i  $[x_0, \rightarrow)$   
og avtagende i  $(\leftarrow, x_0]$

$$a < 0 :$$



$f$  er avtagende i  $[x_0, \rightarrow)$   
og voksende i  $(\leftarrow, x_0]$

Exo:

$$f(x) = 0,03x^2 + 8x - 1500, x \geq 0$$

er voksende siden  $x \geq 0$  betyr at vi ser på  
 $x$ -verdier større enn  $x_0 \approx -133$ .