

FORELESNING 8

EIVIND ERIKSEN

OKT 12, 2016

MET1180

MATEMATIKK

Plan:

- ① Sirkler og ellipser
- ② Polynomfunksjoner og rasjonale funksjoner
- ③ Kontinuitet og grenseverdier

Referanser:

[E3] 3.7-3.10

← Kontinuitet og mer om
asymptoter neste gang

Ekamen MET11801 - kontrollprøve:

Frist: mandag kl 12 - leveres Studentservicesen (U1)

Oppgaveresning:

Tirsdag kl 11-13 B2-065 + et klasserom til

Seminargruppe matematikk neste uke

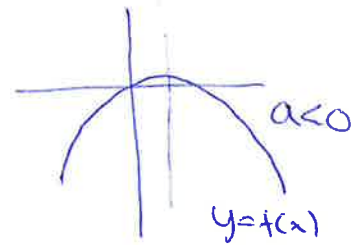
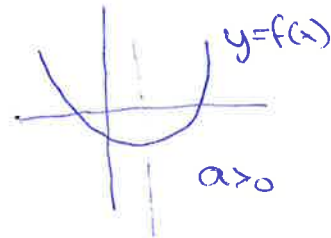
Eget oppgavesett blir lagt ut.

Repetisjon:Lineære funksjoner

$$f(x) = ax + b$$

Kvadratiske funksjoner

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Ek:

$$f(x) = 2x^2 - 6x + 8$$

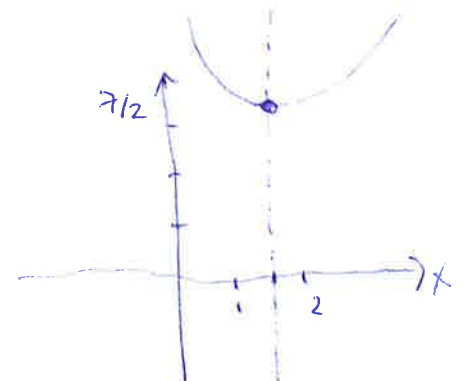
$$= 2(x^2 - 3x + 4)$$

$$= 2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + \left(8 - 2 \cdot \frac{9}{4}\right)$$

$$= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}$$

Symmetri-akse: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$$y = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2}$$

ParablerSymmetri: $x = \frac{3}{2}$ Voksende / avtagende funksjoner:

Monotoni-intervaller

Opps. 3.1.3 / 3.1.4 c:

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{4}{x}} \quad f(4) = 0$$

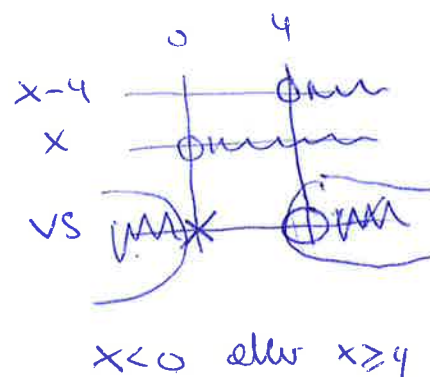
D_f : $x \neq 0$

$$1 - \frac{4}{x} \geq 0$$

$$\frac{x}{x} - \frac{4}{x} \geq 0$$

$$\frac{x-4}{x} \geq 0$$

D_f : alle x slik at
 $x < 0$ eller $x \geq 4$



$$D_f = \{x : x < 0 \text{ eller } x \geq 4\}$$

$$= \underline{\underline{(-\infty, 0) \cup [4, \infty)}}$$

V_f : $V_f = \{y : y = f(x) \text{ n r } x \text{ er med i } (-\infty, 0) \cup [4, \infty)\}$

$y = f(x) = \sqrt{1 - \frac{4}{x}}$: Er $y=h$ en funksjonsverdi?

$h = \sqrt{1 - \frac{4}{x}}$ l ser for x :

$$h^2 = 1 - \frac{4}{x}$$

$$h^2 - 1 = -\frac{4}{x}$$

$$1 - h^2 = \frac{4}{x} \quad | \cdot x$$

$$x \cdot (1 - h^2) = 4$$

$$x = \frac{4}{1 - h^2}$$

$h \neq 1, \cancel{X}$
 $h \geq 0$

$$\Rightarrow V_f = \{h : h \geq 0, h \neq 1\}$$

$$= \underline{\underline{[0, 1) \cup (1, \infty)}}$$

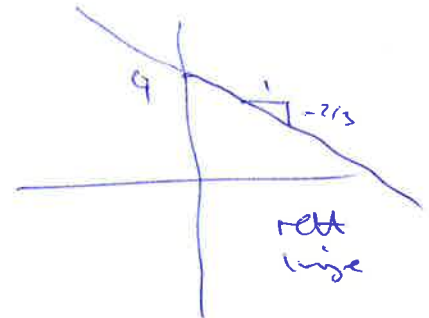
① Sirkler og ellipser

Eks: $2x + 3y = 12$

$$3y = 12 - 2x$$

$$y = 4 - \frac{2}{3}x$$

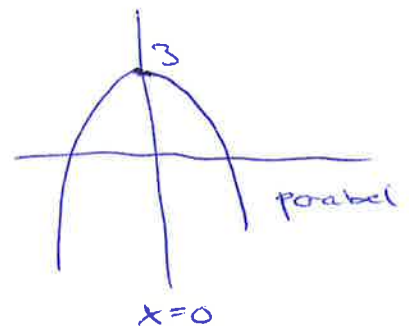
linear.



$$2x^2 + 4y = 12$$

$$4y = 12 - 2x^2$$

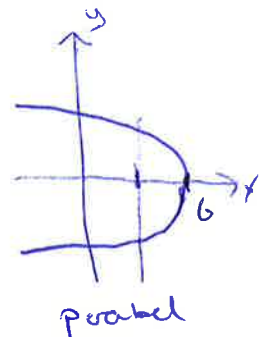
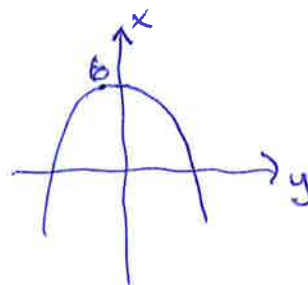
$$y = 3 - \frac{1}{2}x^2$$



$$2x + 4y^2 = 12$$

$$2x = 12 - 4y^2$$

$$x = 6 - 2y^2$$

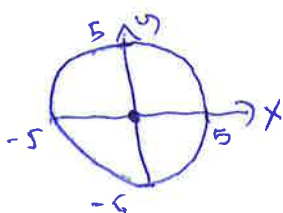


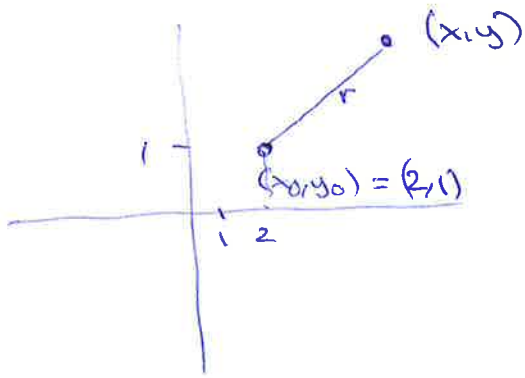
Sirkel-ligninger:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

likning for en sirkel med
Sentrum i (x_0, y_0) og radius
 $r > 0$.

Eks: $x^2 + y^2 = 25$ ← Sirkel med sentrum i $(0, 0)$
med radius 5.





(x, y) er på sirkelen



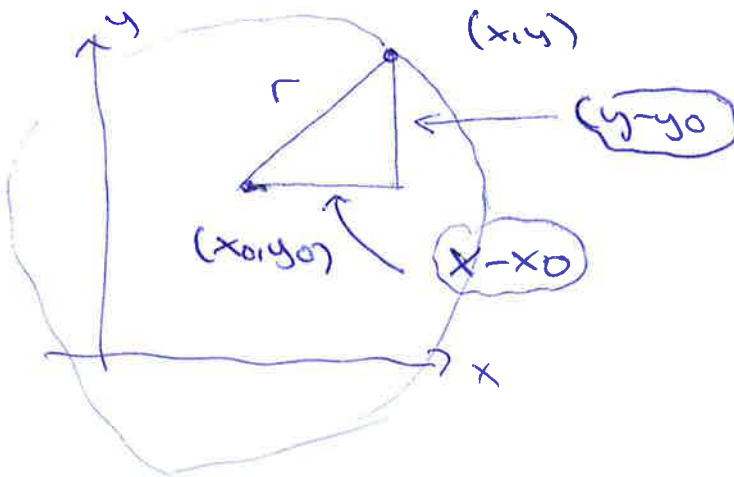
avstand fra (x, y) til
 $(x_0, y_0) = (2, 1)$ er lik r

Sirkel med senter i (x_0, y_0)
og radius $r > 0$.

Pytagoras:

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

gir sirkelkvadrat



Avstandsførmel:

Avstand mellom (x_1, y_1) og (x_0, y_0) er

$$\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

Ekse: $x^2 + y^2 = 2x - 4y + 10$

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Senter: $(1, -2)$

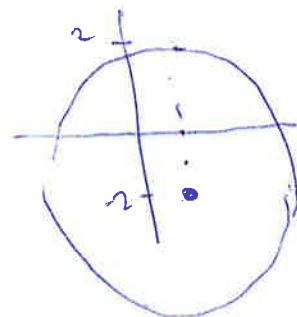
$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y) = 10 + 1$$

$$(x - 1)^2 + (y^2 + 4y + 4) = 11 + 4$$

Radius:

$$r = \sqrt{15}$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 15$$



Eks: $4x^2 + 9y^2 = 36$ $1:36$

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1$$

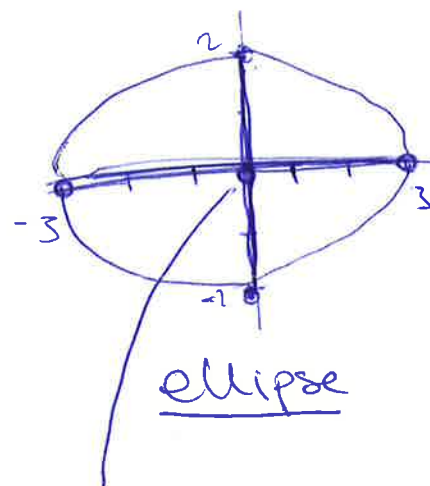
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

a b

$x=0: y^2=4$
 $y=\pm 2$

$y=0: x^2=9$
 $x=\pm 3$



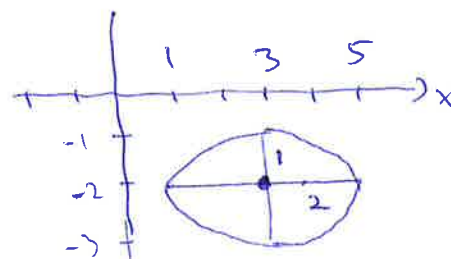
Ellipse - likninger:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Sentrum: $(0,0)$

Halvakser: $a=3$
 $b=2$

ellipse med sentr (x_0, y_0)
og halv-akser (a, b) .



Eks: $x^2 + 4y^2 = 6x - 16y - 21$

$$(x^2 - 6x + 9) + 4y^2 + 16y = -21 + 9$$

$$(x-3)^2 + 4(y^2 + 4y + 4) = -12 + 16$$

$$(x-3)^2 + 4 \cdot (y+2)^2 = 4 \quad 1:4$$

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1$$

a^2 b^2

Ellipse

Senter $(3, -2)$

halvakser: $a=2, b=1$

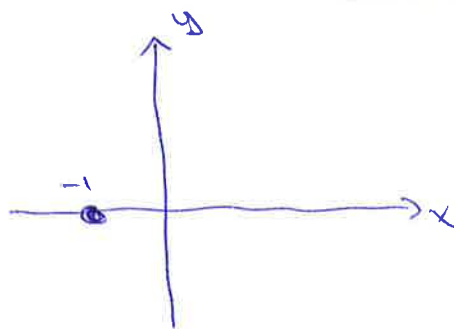
② Polynomfunksjoner og rasjonale funksjoner

Polynomfunksjoner:

Funksjonsuttrykket $f(x)$ er et polynom.

Ekso: $f(x) = x^3 + 1$
tredjegrads polynom

Nullpkt: Skjæringspunkt med x-aksen



$$f(x) = 0$$

$$x^3 + 1 = 0$$

$$x^3 = -1$$

$$x = \sqrt[3]{-1} = -1$$

polynomdiv:
 $(x^3 + 1) : (x + 1)$

$$f(x) = x^3 + 1 = (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)$$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$$

ingen løsn.

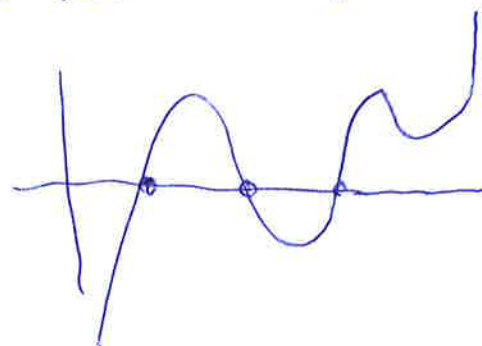
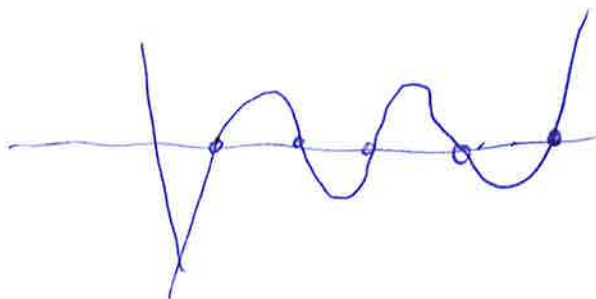
Generelt: Polynomfunksjon av grad n

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

der $a_n, \dots, a_2, a_1, a_0$ er gitte tall, $a_n \neq 0$

Nullpkt: $f(x) = 0 \leadsto n$ eller færre løsninger

$n=5$



Generelt:

Et polynomfunksjon av grad n kan alltid
faktoriseres i lineære og irreducibele kvadratiske faktorer.

$$\text{Antall lineære faktorer} = \underline{\text{antall nullpkt}} \leq n$$

Ex: Polynomfunksjon av grad 5:

Mulige faktoriseringer:

- * fem lineære faktorer $\rightarrow$ 5 nullpkt
- * tre lineære og en
kvadratisk faktor $\rightarrow$ 3 nullpkt
- * en lineær og to
kvadratiske faktorer $\rightarrow$ 1 nullpkt

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x+4)(x-7) \quad x=0, 1, 2, -4, 7$$

$$f(x) = (x+1)(x^2-x+1)(x-7)(x+4) \quad x=-1, 7, -4$$

$$f(x) = (x+1)(x^2-x+1)^2 \quad x=-1$$

Rasjonale funksjoner

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

der p, q er polynom

Ek: $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+4}$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 = \frac{x^2 - 2x + 3}{1}$$

Definisjonsområde:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$D_f = \{x: x \neq 0\}$$

$$= (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

$$D_f = \{x: q(x) \neq 0\}$$

D_f :

$$x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = -4$$

ingen løsn.

$$D_f = \mathbb{R}$$

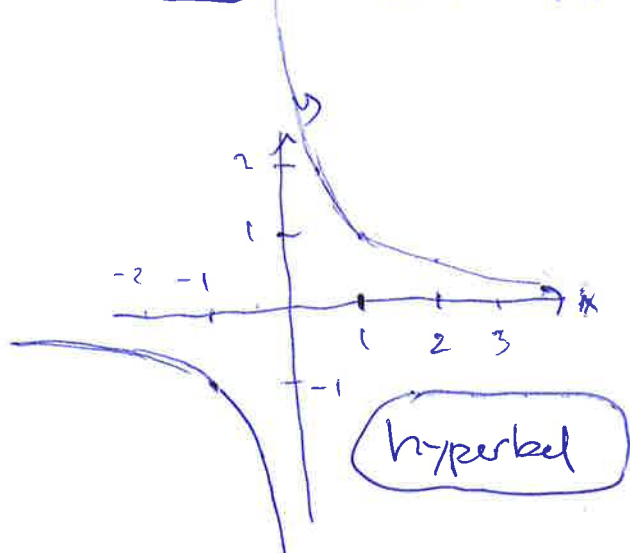
$$= (-\infty, \infty)$$

Ek: $f(x) = \frac{1}{x}$

Greter kalles
en hyperbel.

$$y = \frac{1}{x}$$

$$xy = 1$$



Asymptoter: Rett linje, som grafen nærmer seg for visse verdier av x .

Vertikale asymptoter: $x = c$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \quad D_f: x \neq 1$$

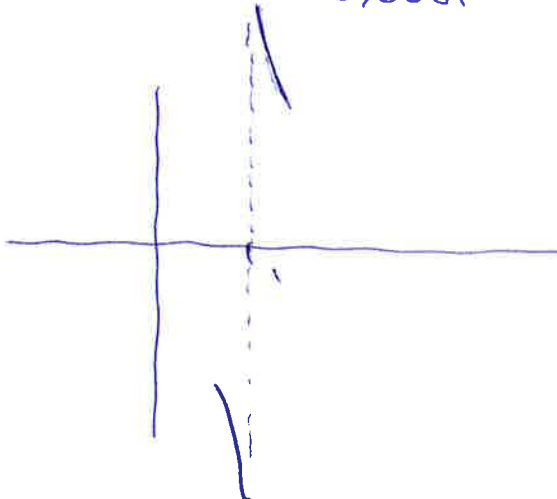
Hva blir $f(x)$ når x er nær 1?

$$f(1,001) = \frac{1}{0,001} = 1000$$

$$f(1,0001) = \frac{1}{0,0001} = 10.000$$

$$f(0,999) = \frac{1}{-0,001} = -1000$$

$$f(0,9999) = \frac{1}{-0,0001} = -10.000$$



$x=1$ er en vertikal asymptote



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

Definisjon:

$x=c$ vertikal
asymptote

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm \infty$$

1 praksis: Hvis $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, så finner vi alle punkter $x=c$ slik at $q(x)=0$.

Hvis $p(c) \neq 0$, så er $x=c$ vertikal asymptote.

Vertikale asymptoter:

Ex: $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{x + 2} = \frac{p(x)}{q(x)}$

$$\underline{x + 2 = 0; \quad x = -2}$$

$$p(-2) = (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 5 = 17 \neq 0$$

$\parallel$

$x = -2$ vertikal asymptote

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 4x + 5}{x + 2} \rightarrow \frac{17}{0^+} = \infty$$

↑

test at $x = \text{root}$
 $-1,999$

Horisontale / skrå asymptoter:

Hva skjer med $f(x)$ når $x \rightarrow \pm\infty$

Polynomdivisjon: $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{x + 2} = \boxed{x - 6} + \frac{17}{x + 2}$

$$\begin{array}{r} (x^2 - 4x + 5) : (x + 2) = x - 6 \\ \underline{-(x^2 + 2x)} \\ -6x + 5 \\ \underline{-(-6x - 12)} \\ 17 \end{array}$$

$$\boxed{y = x - 6}$$

skrå asymptote

Eks: $f(x) = \frac{1}{x+1}$

Vertikale asymptoter:

$x = -1$ gir null i nevner, $\neq 0$ i teller $\Rightarrow$

$x = -1$ vertikal asymptote

$x \rightarrow -1^+$ gir $f(x) \rightarrow +\infty$
 $x \rightarrow -1^-$ gir $f(x) \rightarrow -\infty$

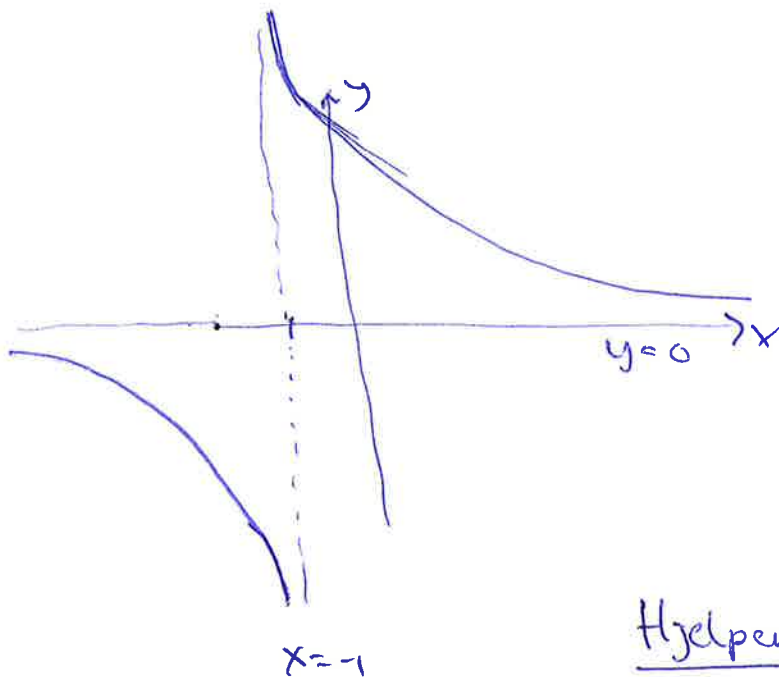
Horisontale/skrå asymptoter:

polynomdivisjon $1 : (x+1)$ gir 0,
med 1 som rest;

$$\frac{1}{x+1} = 0 + \frac{1}{x+1}$$

$y = 0$ er asymptote (horisontal)

$x \rightarrow \infty$ gir $f(x) \rightarrow 0$
 $x \rightarrow -\infty$ gir $f(x) \rightarrow 0$



$x = -1$ vertikal
 $y = 0$ (x-aksen) horisontal

Hjelpemiddel:

Bruk gjerne Wolfram Alpha til å
plotte grafer

www.wolframalpha.com
eller
App for Apple/Google

$\rightarrow$ "plot $1/(x+1)$ asymptotes"
"plot $1/(x+1)$ "