

FORELESNING 9

EIVIND ERIKSEN

Okt 19, 2016

MET1180
MATEMATIKK

Plan:

- ① Repetisjon: Asymptoter
- ② Kontinuitet og grenseverdier
- ③ Sammensatte og omvendte funksjoner
- ④ Eksponentialfunksjoner og logaritmer

Pensum:

[ES] 3,10-3,13

Logaritmer:
Neste gang

① Repetisjon: Rasjonelle funksjoner og asymptoter

Eks: $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 7}{x - 2}$

① Vertikale asymptoter: $x = c$ slik at $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm \infty$

Nullplass i nevner: $x - 2 = 0$
 $x = 2$

Setter inn i teller: $2^2 - 3 \cdot 2 + 7 = 5 \neq 0$

Vertikale asymptot:
 $x = 2$

Hvis $x = c$ gir null i teller og nevner, må vi regne ut grenseverdi

② Horisontale / skrå asymptoter: $y = ax + b$

Polynomdivisjon: $(x^2 - 3x + 7) : (x - 2) = x - 1$

$$\begin{array}{r} x^2 - 3x + 7 \\ -(x^2 - 2x) \\ \hline -x + 7 \\ -(-x + 2) \\ \hline 5 \end{array}$$

$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 7}{x - 2}$
 $= x - 1 + \frac{5}{x - 2}$

$y = x - 1$ er
skrå asymptote

Defn: $y = ax + b$ er skrå/horisental
asymptote for $f(x)$ hvis

$$\begin{pmatrix} a=0: \text{horisental} \\ a \neq 0: \text{skrå} \end{pmatrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

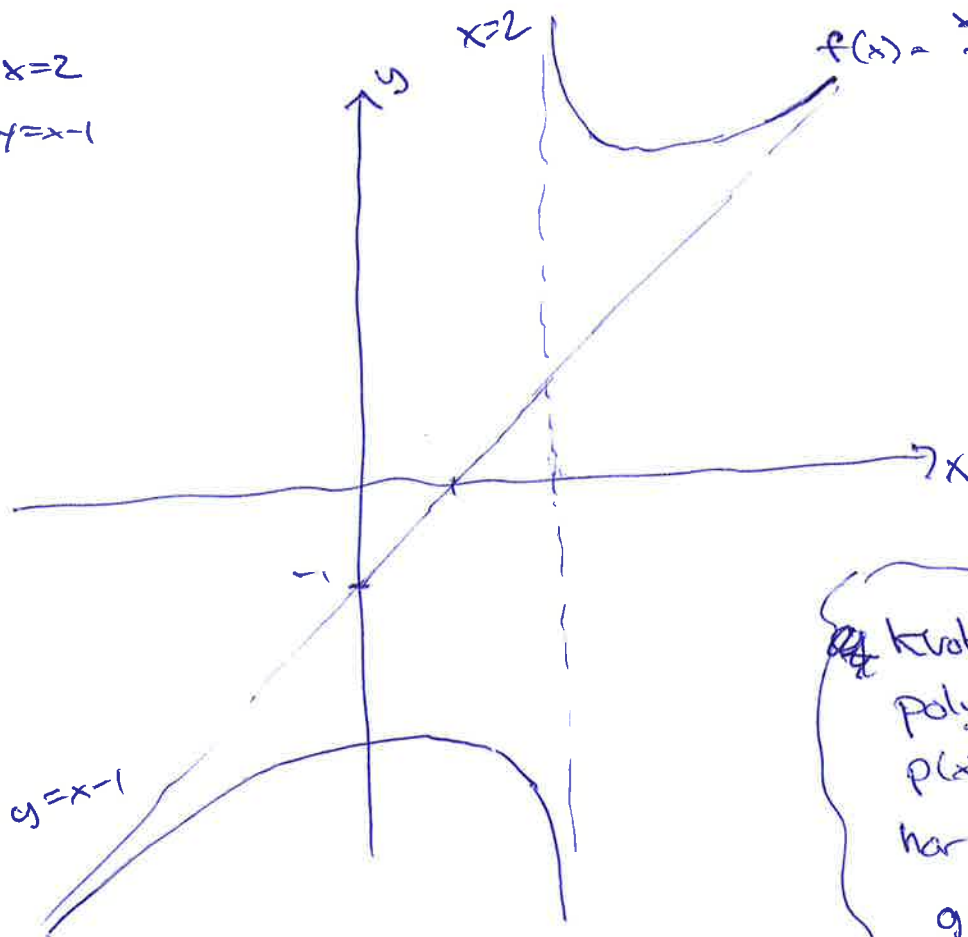
Ex: $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 7}{x - 2} = x - 1 + \frac{5}{x - 2}$

$$f(x) - (x - 1) = \frac{5}{x - 2} \rightarrow 0 \text{ når } x \rightarrow \pm\infty$$

Asymptotene er nær grene til f når $x \rightarrow \pm\infty$
 $x \rightarrow c$

Vertikal: $x = 2$

Skrå: $y = x - 1$



Kvotienten i
polynomdivisjon
 $p(x) : q(x)$
har grad lik
 $\text{grad}(p) - \text{grad}(q)$

Exs: $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$

$$\frac{x}{x^2+1} = 0$$

$$\frac{x}{x^2+1} = 0 + \frac{x}{x^2+1}$$

Vertikale: ingen

$$x^2+1=0$$

$$x^2=-1 \text{ ingen løsning.}$$

Horisontale/skrå: $y=0$

horisontal
asymptote

② Kontinuitet

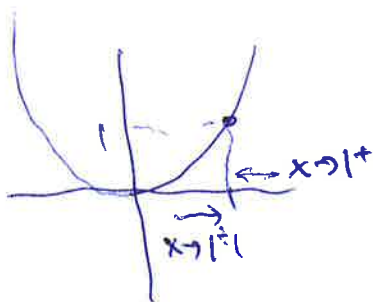
Defn: Funksjonen $f(x)$ er kontinuerlig i $x=a$
hvis

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$\Leftrightarrow$

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

Ex: $f(x) = x^2$ i $x=1$

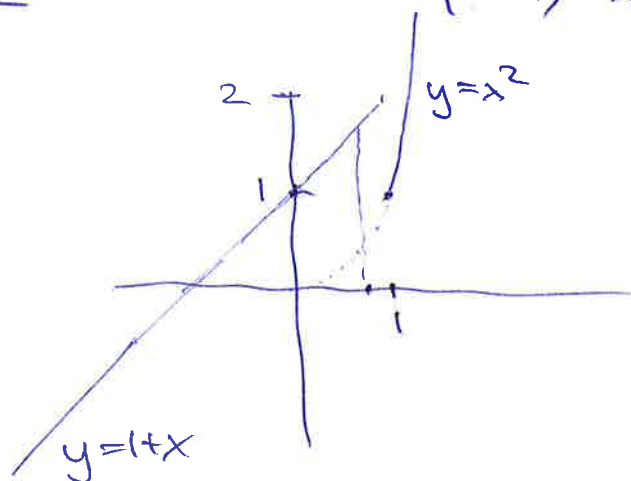


$$f(1) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$$

$f(x) = x^2$ er kont i $x=1$.

"Alle velte funksjoner" er kontinuerlige i alle
punkter hvor de er definert.

Ex: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ 1+x, & x < 1 \end{cases}$



$f(x)$ ikke kont. i $x=1$

$$f(1) = 1^2 = 1$$

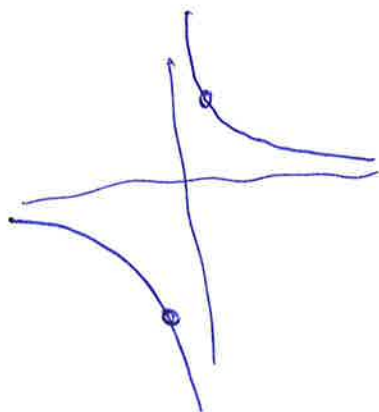
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 + 1 = 2$$

Må sjekke sammenhengningspunktene når f
har delt forskrift.

Defn: Funktionen f er kontinuerlig hvis f er
kontinuerlig i alle punkter hvor den er
definiert (for alle $x \in A_f$)

Ex: $f(x) = 1/x$

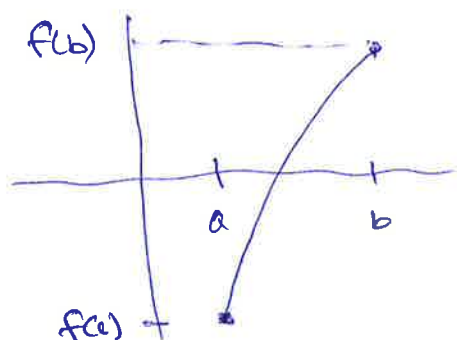


f er kontinuerlig

$$\begin{aligned} D_f &= \{x : x \neq 0\} \\ &= (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \end{aligned}$$

Skjæringssetningen:

Hvis $f(x)$ er kontinuerlig på $[a, b]$, og $f(a) < 0$ og $f(b) > 0$, så har f minst ett nullpunkt i (a, b) .

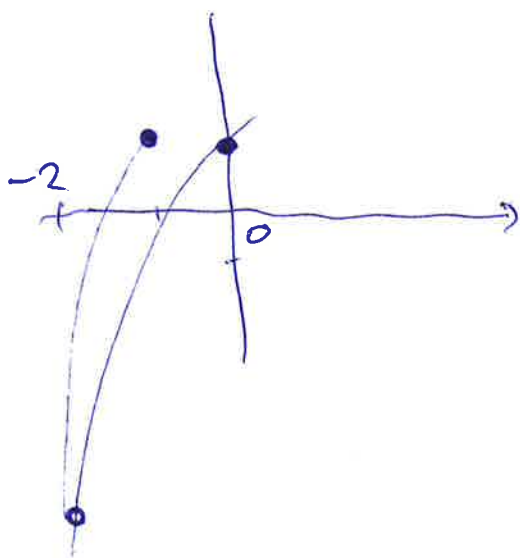


Ex: $f(x) = x^3 - x + 1$ Nullpkt?
kontinuerlig

$$f(0) = 1$$

$$f(-1) = 1$$

$$f(-2) = (-2)^3 - (-2) + 1 = -5$$



$\Rightarrow$ Skjæringssetningen:

$f(x)$ har minst ett nullpunkt i $(-2, 0)$.

~~metode~~ $(-2, -1)$
i intervallet

③ Sammensatte og omvendte funksjoner

Ekso: $f(x) = 2x+3$
 $g(x) = \sqrt{x}$

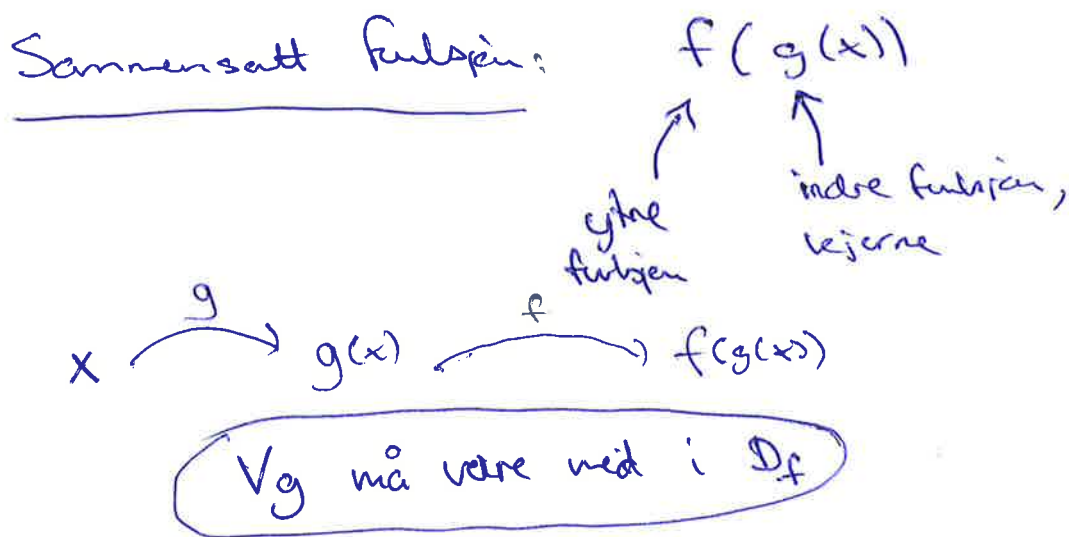
$$f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \underline{2 \cdot \sqrt{x} + 3}$$

$x=1$: $f(g(1)) = f(\sqrt{1}) = f(1) = 2 \cdot 1 + 3 = \underline{5}$

$$g(f(x)) = g(2x+3) = \underline{\sqrt{2x+3}}$$

$x=1$: $g(2 \cdot 1 + 3) = \sqrt{5}$

Sammensatt funksjon:



Ekso: $f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} + 3$

$f(x) = 2x+3$ $D_f = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

$g(x) = \sqrt{x}$ $V_g = [0, \infty)$

$g(f(x)) = \sqrt{2x+3}$

$V_f = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

$D_g = [0, \infty)$

$2x+3 \geq 0$

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} = \sqrt{u}, \text{ der } \underline{u = x^2+1}$$

$$u(x) = x^2+1 \quad \text{indre funksjon, kjerne}$$

$$h(u) = \sqrt{u} \quad \text{ytre funksjon}$$

$$f(x) = h(u(x)) = h(x^2+1) = \underline{\sqrt{x^2+1}}$$

Omvendte funksjoner:

$$f(x) = 2x+3$$

$$g(x) = \frac{x-3}{2}$$

Omvendte funksjoner

$$g(f(x)) = g(2x+3)$$

$$= \frac{2x+3-3}{2} = x$$

$$f(g(x)) = f\left(\frac{x-3}{2}\right)$$

$$= 2 \cdot \frac{x-3}{2} + 3$$

$$= x-3+3 = \underline{x}$$

$$y = 2x+3$$

$$\frac{y-3}{2} = \frac{2x}{2}$$

$$x = \frac{y-3}{2}$$

$$g(y) = \frac{y-3}{2}$$

løser likningen
for x

Definisjon:

Den omvendte funksjonen
til $f(x)$ er en funksjon $g(x)$
slik at

$$f(g(x)) = x$$

$$g(f(x)) = x$$

Da skriver vi f^{-1} for g .

Ekse: $f(x) = 2x + 3$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$$

omvendt (invers)
funksjon til f .

$$f(x) = x^2, x \geq 0$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$$

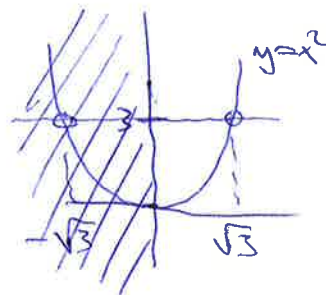
omvendte funksjon

$$y = x^2$$

$$x = \pm \sqrt{y}$$

$$= \sqrt{y}$$

$$g(y) = \sqrt{y}$$



Ekse: $x^2 = 3$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{3}$$

$$|x| = \sqrt{3}$$

$$x = \pm \sqrt{3}$$

Hvis funksjonen $f(x)$ har en omvendt funksjon f^{-1} , så har vi:

① $D_{f^{-1}} = V_f$ og $V_{f^{-1}} = D_f$

② Grafen til $y=f^{-1}(x)$ er speilbildet av grafen til $y=f(x)$ om linjen $y=x$.

Ekse: $f(x) = x^2, x \geq 0$

$D_f = [0, \rightarrow)$

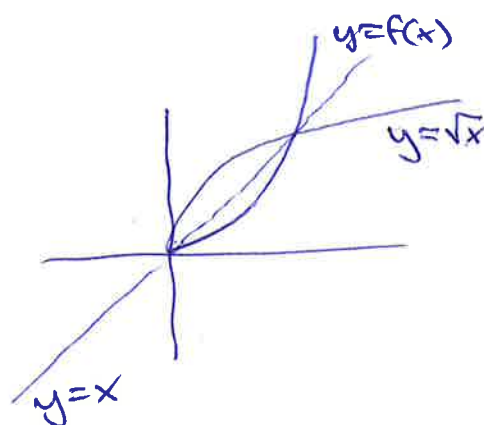
$V_f = [0, \rightarrow)$

$y = x^2$

$x = \sqrt{y} = g(y)$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}, D_{f^{-1}} = [0, \rightarrow)$

$y = \sqrt{x}, V_{f^{-1}} = [0, \rightarrow)$



Ekse: $f(x) = \sqrt{x^3+1}, D_f = [-1, \rightarrow)$

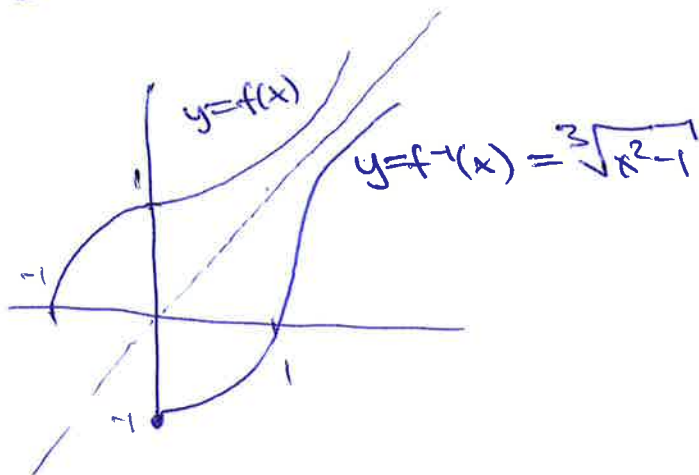
Alt I:

$$\left. \begin{aligned} y &= \sqrt{x^3+1} \\ y^2 &= x^3+1 \\ x^3 &= y^2-1 \\ x &= \sqrt[3]{y^2-1} \end{aligned} \right\} f^{-1}(x) = \underline{\underline{\sqrt[3]{x^2-1}}}$$

$\left. \begin{aligned} x^3+1 &\geq 0 \\ x^3 &\geq -1 \\ x &\geq \sqrt[3]{-1} = -1 \end{aligned} \right\}$

Alt 2: $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$, $x \geq -1$

$D_f = [-1, \rightarrow)$
 $V_f = [0, \rightarrow)$



$D_{f^{-1}} = [0, \rightarrow)$
 $V_{f^{-1}} = [-1, \rightarrow)$

$y = x$

f har omvendt funksjon
 $\Leftrightarrow$
 f er injektiv

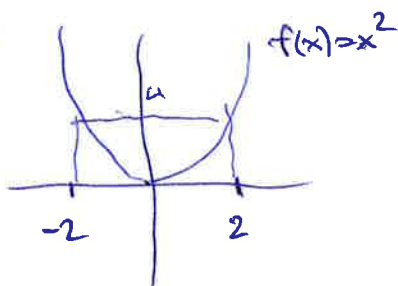
Finnes alltid $f^{-1}(x)$? Nei.

Dersom følgende betingelse er oppfylt,

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow f$ er injektiv

Så har f en omvendt funksjon $f^{-1}(x)$.

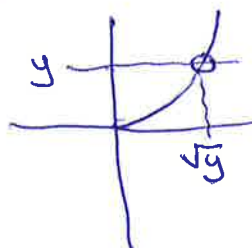
Ek:



$f(2) = 4$

$f(-2) = 4$

$f(x) = x^2, x \geq 0$



f er $\begin{cases} \text{avtagende} \\ \text{voksende} \end{cases} \Rightarrow f^{-1}$ finnes
(og ikke konstant)

④ Ekspontial- og logaritmefunksjoner

Ekspontialfunksjoner

Ex: $f(x) = 2^x$

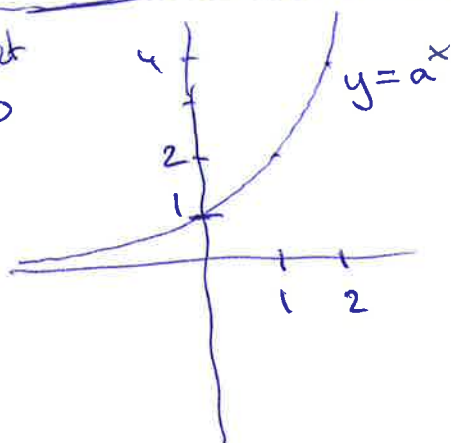
$g(x) = 1000 \cdot 1,06^x$

* oppfører i ~~eksponenten~~

Ekspontialfunksjonen

Generelt: $f(x) = a^x$ definert når $a > 0$.

a) Tiltallet
 $a > 0$



* $f(x)$ definert for alle x

* $f(x)$ er kontinuerlig

* $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

* $f(x)$ er voksende og alltid positiv.

$a > 1$

Ex: $f(x) = 2^x$

$f(0) = 2^0 = 1$ $f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$f(1) = 2^1 = 2$ $f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

$f(2) = 2^2 = 4$

⋮

$f(10) = 2^{10}$

Ex:

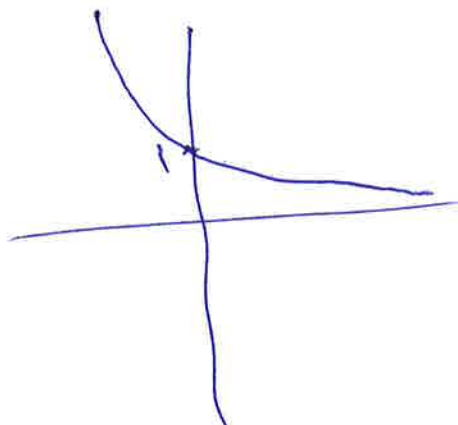
$f(x) = e^x$

grunn tall

$e = 2,71828 \dots$

> 1

b) Tilfellet
 $0 < a < 1$:



Ekse: $a = 1/2$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x}$$

$$f(x) = a^x, \quad 0 < a < 1$$

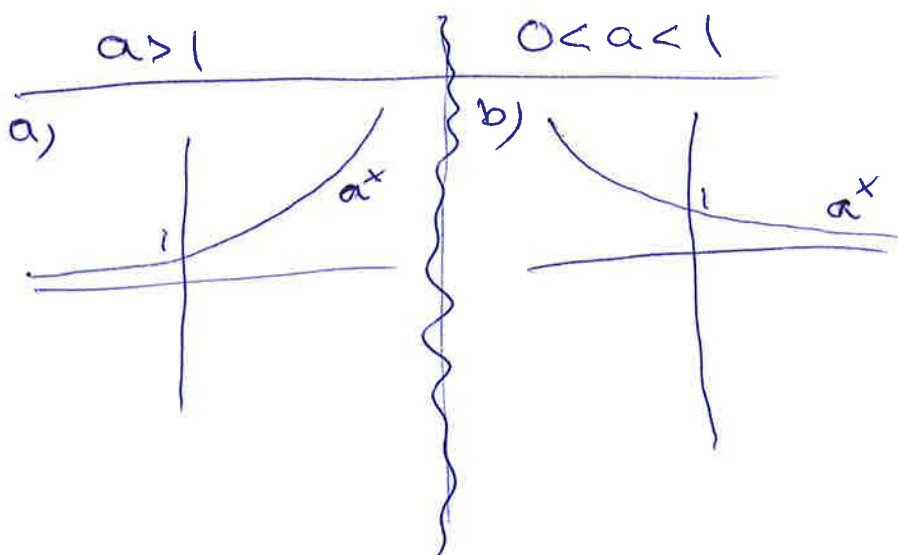
* f definert for alle x

* f kontinuert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

* f er alltid positiv
og avtattende

Husk: $f(x) = a^x$ definert for $a > 0$



Tilfellet $a = 1$ er uinteressant: $1^x = 1$
(konstant funksjon)

Kalkulator:

Spesialtilfellet $a = e = 2,71828...$

$$\boxed{x^x} : 2 \boxed{x^x} 10 \rightarrow 2^{10}, \quad \boxed{e^x} : 10 \boxed{e^x} \rightarrow e^{10}$$

$$\boxed{e^x} : 10 \boxed{e^x} \rightarrow e^{10}$$