

FORELESNING 10

EIVIND ERIKSEN

Okt 19, 2017

MET1180

MATEMATIKK

Plan:

Innlevering 1

- ① Rasjonale funksjoner og asymptoter
- ② Kontinuitet og grenseverdier
- ③ Sammenhætte og omvendte funksjoner

Husk: Forelesning fredag 11-14.

Pensum:

[E] 3.9-3.11

Neste gang!

✂ OPPGAVE 1.

Et boliglån på 3.000.000 kr gis som et annuitetslån med løpetid på 30 år og nominell rente 2,10% per år. Terminlengden er én måned.

- (a) Finn terminbeløpet A . Hva er de samlede rentene over lånets løpetid?
- (b) Når du sjekker betingelsene nærmere, viser det seg at annuitetslånet med rente 2,10% per år har et termingebyr på 30 kr, slik at terminbeløpet blir $(A + 30)$ kr. Du kan alternativt låne hos en annen tilbyder med nominell rente 2,16% per år, og uten noen termingebyrer. Hvilket alternativ lønner seg?
- (c) Hva kan du si om den effektive renten til de to alternative lånene? For alternativet med gebyr holder det å oppgi et intervall for den effektive renten.

OPPGAVE 2.

Vi investerer 1.500.000 kr, og regner med at investeringen vil gi 100.000 kr i tilbakebetaling etter to år, og deretter årlige utbetalinger som øker med 2% i året. Vi bruker diskonteringsrente $r = 10\%$.

- (a) Er investeringen lønnsom?
- (b) Forutsetningen om at tilbakebetalingene vokser med 2% per år er usikker. Hvor stor må veksten i tilbakebetalingene være for at investeringen skal lønne seg?

✂ OPPGAVE 3.

Du låner 200.000 kr og betaler tilbake et fast beløp, første gang etter fem måneder, og deretter annenhver måned. Den nominelle renten er 18% per år, og kapitaliseres månedlig. Lånet skal være tilbakebetalt 21 måneder etter at lånet ble tatt opp.

- (a) Hva er de samlede rentene på lånet?
- (b) Dersom den nominelle renten istedet var 6% per år, ville de samlede rentene reduseres til en tredjedel? Hvorfor/hvorfor ikke?

OPPGAVE 4.

Løs disse likningene:

$$a) \frac{7}{x} = \frac{8}{x+1} \quad b) x^5 = x \quad c) x^6 + x^4 = 2x^2 \quad d) \sqrt{3x-4} = \sqrt{3x-4} \quad e) x^3 - 2x + 1 = 0$$

OPPGAVE 5.

Løs disse ulikhetene:

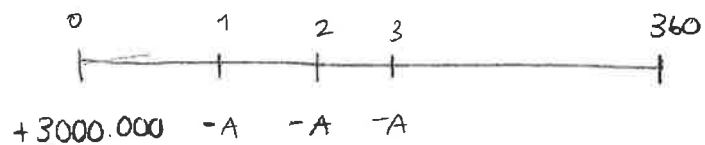
$$a) x^2 + x < 2 \quad b) \frac{1}{x+1} \geq 1 \quad c) \frac{5x+2}{x^2+7x-8} < 1 \quad d) x^3 > 8 \quad e) x^2 - x^4 + 7 < 5$$

OPPGAVE 6.

Løs følgende likning:

$$\frac{6}{x+1} - 1 = \frac{3}{x} + \frac{3}{x+2}$$

1a) Lån: 3.000.000
 løpetid: 30 år
 nominell rente: 2,10%
 termin: 1 mnd



$$r = \frac{0,0210}{12} = 0,00175$$

$$n = 30 \cdot 12 = 360$$

Gp

$$A = \frac{L \cdot r (1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

$$A = \frac{3.000.000 \cdot 0,00175 (1 + 0,00175)^{360}}{(1 + 0,00175)^{360} - 1}$$

$$A = \frac{3.000.000 \cdot 0,00175 (1 + 0,00175)^{360}}{1,87657704 - 1} = \underline{\underline{11.239,21}}$$

mnd beløp: 11 239,21 kr

Årlig beløp: 11.239,21 kr · 12 = 134.870,46 kr

Beløp etter 30 år: 134.870,46 kr · 30 = 4.046.113,96 kr

Samlet rentebeløp: 4.046.113,96 kr - 3.000.000 = 1.046 113,96 kr

Bra! Oversiktlig og riktig utregning.

7b).

Totalt:

Alternativ 1)

$$4.046,113,96 + (30 \cdot 360) = \underline{4.052.913,96}$$

mnd

$$11.239,21 + 30 = \underline{11.269,21 \text{ kr}}$$

Alternativ 2)

nominal

rente: 2,16%

$$\text{rente} = \frac{0,0216}{12} = 0,0018$$

$$A = 3.000.000 \cdot \frac{0,0018 (1 + 0,0018)^{360}}{(1 + 0,0018)^{360}} = \underline{11.330,15 \text{ kr}}$$

mnd: 11.330,15 kr

$$\text{Totalt: } 11.330,15 \cdot 12 = 135.961,8 \text{ kr}$$

$$135.961,8 \cdot 30 = \underline{4.078.854 \text{ kr}}$$

Alternativ 1 lønner seg

$$7c) r_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1$$

$$\text{Alternativ 2: } r_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{0,0216}{360}\right)^{360} - 1 \quad \leftarrow 12$$

$$r_{\text{eff}} \approx 0,021834 \approx \underline{\underline{2,18\%}}$$

hva med B og C?

Alt I, uten gebyr

$$\left(1 + \frac{0,0210}{12}\right)^{12} \approx 2,12\%$$

Alt I, med gebyr:

$$2,12\% \leq r_{\text{eff}} \leq 2,18\%$$

GP

3p

2

2)

0	1	2	3	4
-1.500.000	0	+100.000	+100.000	+100.000
			$\cdot 1,02$	$\cdot (1,02)^2$

Investering: 1.500.000
 $r = 2\%$ per år

$$-1.500.000 + \frac{100.000}{(1,02)^2} + \frac{100.000}{(1,02)^3} + \frac{100.000 \cdot (1,02)^2}{(1,02)^4} + \dots$$

geometrisk
 uendelig række

$$-1,5 \text{ m} + \frac{100 \text{ k}}{1,10^2} + \frac{100 \text{ k} \cdot 1,02}{1,10^3} + \dots$$

$$-1,5 \text{ m} + \frac{100 \text{ k}}{1,10^2} \left(1 + \frac{1,02}{1,10} + \frac{1,02^2}{1,10^2} + \dots \right)$$

$$1 + \frac{1,02}{1,10} + \left(\frac{1,02}{1,10} \right)^2 + \dots$$

$$S = \frac{a_1}{1-k}$$

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1,02}{1,10}} \cdot \frac{100'}{(1,10)^2} - 1.500' = -363.636,36$$

Nåværdi er neg. Investeringen er ikke lønnsom.

(6p)

b) $\frac{1}{1 - \frac{x}{1,1}} \cdot \frac{100'}{(1,10)^2} - 1.500' = 0 \quad \leftarrow x = \text{veltfaktor for tilbagebetaling}$

$$\frac{1.500'}{\frac{100'}{(1,10)^2}} = \frac{1}{1 - \frac{x}{1,10}}$$

$$\frac{(1-x) \cdot 18,15}{1,10} = \frac{1}{1 - \frac{x}{1,10}} \cdot 1 - \frac{x}{1,10}$$

$$18,15 - \frac{18,15x}{1,10} = 1$$

$$\frac{-16,5x}{-16,5} = \frac{1 - 18,15}{-16,5}$$

$$x = \frac{-17,15}{-16,5} \\ x \approx 1,03939$$

Helt. Dette er rigtig

regnet og rigtig svar!

Fjern heller 1 og skriv

tallet enten i decimal eller %

alts: 3,9% eller

$$x > 1,039$$

x må være større

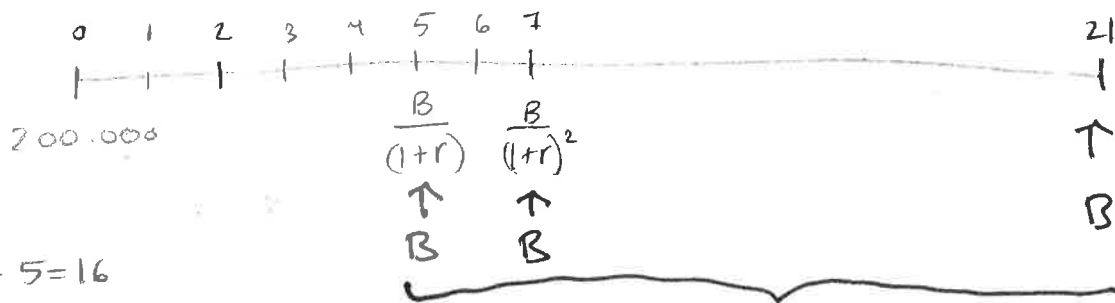
enn 1,039 (3,9%) for

at investeringen skal lønne sig

0,039 i stedet for 1,039

(6p)

3)



$$21 - 5 = 16$$

$$\frac{16}{2} = 8$$

$$8 + 1 = 9$$

$$n = 9$$

$$S = a_1 \cdot \left(\frac{1 - K^n}{1 - K} \right)$$

ant. tidsenheter = 9

$$-200000 + \frac{B}{(1+r)^5} + \dots + \frac{B}{(1+r)^{21}} = 0$$

$$a_1 = \frac{B}{(1+r)^5}$$

$$K = \frac{1}{(1+r)^2}$$

geom. rekke

$$S = \frac{B}{(1+r)^5} \cdot \left(\frac{1 - \frac{1}{(1+r)^2}}{1 - \frac{1}{(1+r)^2}} \right)^9$$

Dette er riktig tenkt
nå mangler bare utregning!

$$200000 = \frac{B}{(1+r)^5} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{(1+r)^2}\right)^9}{1 - \left(\frac{1}{(1+r)^2}\right)}$$

$$r = \frac{0,18}{12} = 0,015$$

$$\frac{200000 \cdot 1,015^5}{1 - \frac{1}{1,015^{18}}} = B$$

$$= B$$

Søket rekke:

$$9 \cdot B - 200.000 = \dots$$

3P

b) Samme beregning med

$$r = \frac{0,06}{12} = 0,005$$

$$\leadsto \text{Ny } B = \dots$$

Søket rekke nå:

$$9 \cdot (Ny B) - 200.000 = \dots$$

Op

4)

$$a) \frac{7}{x} = \frac{8}{x+1}$$

$$\frac{7}{x} - \frac{8}{x+1} = 0$$

$$\frac{7(x+1)}{x(x+1)} - \frac{8 \cdot x}{x(x+1)} = 0$$

$$\frac{7x+7-8x}{x(x+1)} = 0 \quad | \cdot x(x+1)$$

$$7x - 8x = -7$$

$$-x = -7$$

$$\underline{\underline{7 = x}} \quad \checkmark \quad (6p)$$

$$b) \quad x^5 = \underline{x}$$

$$\frac{x^5}{x} = \frac{x}{x}$$

$$\sqrt[4]{x^4} = \pm \sqrt[4]{1}$$

$x=0$,

$$\underline{\underline{x = \pm 1}} \quad (3p)$$

Hva om x er 0?

Når du dividerer så gjør du en implisitt antagelse at tallet IKKE kan være lik 0.

Da eliminerer du en løsning.

Tip: Prøv å unngå å dele på noe som er en variabel.

$$\begin{aligned} x^5 - x &= 0 \\ x(x^4 - 1) &= 0 \\ x=0 \text{ eller } x^4=1 \end{aligned}$$

$$c) \quad x^6 + x^4 = 2x^2$$

$$x^6 + x^4 - 2x^2 = 0$$

$$x^2(x^4 + x^2 - 2) = 0$$

$$\hookrightarrow x^2 = 0$$

$$u = x^2$$

$$u^2 + u - 2 = 0 \rightarrow \text{abc}$$

$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot -2 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$u_1 = \frac{-4}{2} = -2$$

$$u_2 = \frac{2}{2} = 1$$

løsninger:

$$x^2 = 0$$

$$x = 1$$

$$x = -1$$

$$\underline{\underline{x=0}}$$

Flott!

$\checkmark$ (6p)

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-2} \rightarrow \text{ingen løsning}$$

$$\sqrt{x^2} = \pm \sqrt{1}$$

$$\underline{\underline{x = \pm 1}}$$

(5)

$$4d) \quad \sqrt{3x-4} = \sqrt{3x-4} \quad | \cdot ()^2$$

$$(\sqrt{3x-4})^2 = 3x-4$$

$$3x - 8\sqrt{3x} + 16 = 3x - 4$$

$$\frac{20}{8} = \frac{8\sqrt{3x}}{8}$$

$$\left(\frac{20}{8}\right)^2 = 3x$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = 3x$$

$$\frac{25}{4} = \frac{3x}{3}$$

$$\frac{25}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{25}{12} = x$$

sette prove:

$$HS: \sqrt{\frac{25}{12} \cdot 3} - 4 = \underline{-1,5}$$

$$VS: \sqrt{\frac{25}{12} \cdot 3 - 4} = \underline{1,5}$$

Falsk løsning

(Gp)

Veldig Bra! Dette er

velig viktig å gjøre

når du koder et tall.

$$e) \quad x^3 - 2x + 1 = 0$$

$$x=1 \rightarrow 1^3 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$$

$(x-1) \rightarrow$ faktor

$$x^3 - 2x + 1 = (x-1) \cdot (\dots) = 0$$

$$x^3 - 2x + 1 : (x-1) = x^2 + x - 1$$

$$-(x^3 - x^2)$$

$$x^2 - 2x + 1$$

$$-(x^2 - x)$$

$$-x + 1$$

$$\begin{array}{r} -x + 1 \\ (-x + 1) \\ \hline 0 \end{array}$$

$\hookrightarrow$ abc

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot -1}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

LØSNINGER:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$x_3 = \frac{-\sqrt{5} - 1}{2}$$

✓ Bra!

(Gp)

(6)

$$5a) \quad x^2 + x - 2 < 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

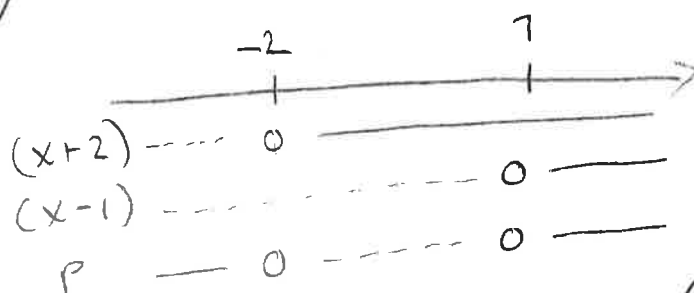
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = -2 \quad (x+2)$$

$$x_2 = 1 \quad (x-1)$$

$$(x+2)(x-1) < 0$$



$$x \in (-2, 1)$$

$$-2 < x < 1$$

$$| > x > -2$$

$$| < x > -2$$

6p

b)

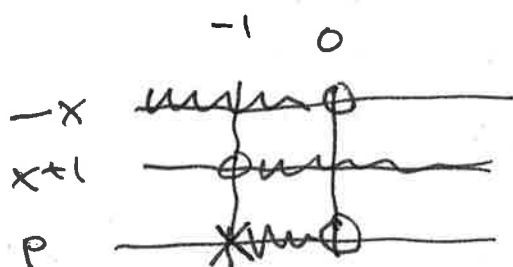
$$\frac{1}{x+1} \geq 7$$

$$\frac{1}{x+1} - \frac{7(x+1)}{x+1} \geq 0 \quad | \cdot (x+1)$$

$$1 - x - 7 \geq 0$$

$$0 \geq x \quad (3p)$$

$$\frac{-x}{x+1} \geq 0$$



$$L = [-1, 0]$$

Her mister du en lösning i grän.

Det stämmer att x må vara mindre eller lik 0 men om $x = -1$ går det inte styckat upp.

Pröv å behålla bröken i uttrycket, eller skriv på sidan att $x \neq -1$ när du går ut den faktoren!

7

$$c) \quad \frac{5x+2}{x^2+7x-8} < 1$$

$$\frac{5x+2}{x^2+7x-8} < 1 \cdot \frac{x^2+7x-8}{x^2+7x-8}$$

$$\frac{5x+2-(x^2+7x-8)}{x^2+7x-8} < 0$$

$$\frac{5x+2-x^2-7x+8}{x^2+7x-8} < 0$$

$$\frac{-x^2-2x+10}{x^2+7x-8} < 0$$

Faktorisierung Nenner

$$x^2+7x-8=0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot (-8) \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49+32}}{2}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{2}$$

$$x = \frac{-7 \pm 9}{2}$$

$$x_1 = -8$$

$$x_2 = 1$$

Faktorisierung Zähler

$$-x^2-2x+10=0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-1) \cdot 10}}{-2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{44}}{-2}$$

$$x = \frac{2 \pm 6,63}{-2}$$

$$x_1 = \frac{2+6,63}{-2} = -7,63$$

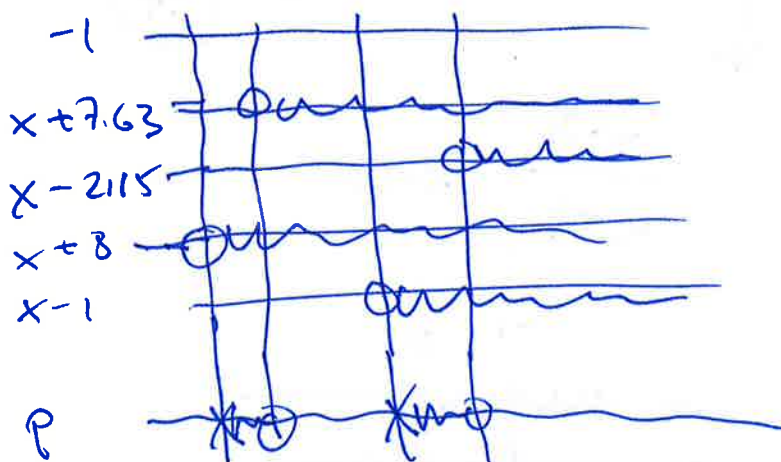
$$x_2 = \frac{2-6,63}{-2} = 2,15$$

$$- \frac{(x+7,63)(x-2,15)}{(x+8)(x-1)} < 0$$

4p

Brä, men var ble det
av resten?

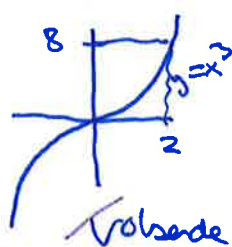
$$-8 \quad -7,63 \quad 1 \quad 2,15$$



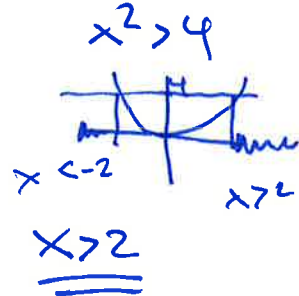
$$L = (-\infty, -8) \cup (-7,63, 1) \cup (2,15, \infty)$$

8

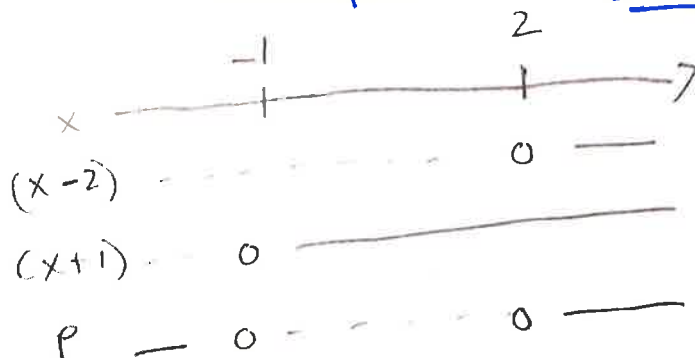
5d) $x^3 > 8$
 $\sqrt[3]{x^3} > \sqrt[3]{8}$
 $x > 2$
4p



$x^3 - 8 > 0$
 $(x-2)(x^2 + \dots) > 0$
 altid pos.



e) $x^2 - x^4 + 7 < 5$
 $-x^4 + x^2 + 2 < 0$
 $u = x^2$
4p



$-u^2 + u + 2 < 0$
 $u = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)}$

$u = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2}$

$u = \frac{-1 \pm 3}{-2}$

$x^2 = u_1 = 2 \quad (x-2)$
 $x^2 = u_2 = -1 \quad (x+1)$

Passer for!

Musk at $u = x^2$
 og da er $u_2 = -1$
 $x^2 = -1$
 ikke...

$x \in \langle -1, 2 \rangle$

6) $\frac{6}{x+1} - 1 = \frac{3}{x} + \frac{3}{x+2}$

fn: $x(x+1)(x+2)$

$6 \cdot x(x+2) - 1 \cdot x(x+1)(x+2) = 3 \cdot (x+1)(x+2) + 3x(x+1)$
 $6x(x+2) - x(x^2+3x+2) = 3(x^2+3x+2) + 3x^2+3x$
 $6x^2+12x - x^3-3x^2-2x = 3x^2+9x+6 + 3x^2+3x$
 $6x^2+12x - x^3-3x^2-2x - 3x^2-9x-6-3x^2-3x = 0$

$\frac{x(x+1)(x+2)}{x(x^2+3x+2)}$

$-x^3 - 3x^2 - 2x - 6 = 0 \quad | \cdot (-1)$

$x^3 + 3x^2 + 2x + 6 = 0$

$6 = \pm 1, \pm 2, \pm 3$

$x = -3 : (-3)^3 + 3(-3)^2 + 2(-3) + 6 = 0$

$(x+3) \rightarrow$ faktor

$\frac{x^3+3x^2+2x+6}{-(x^3+3x^2)} : (x+3) = \frac{x^2+0x+2}{x^2+2} = 0$
 ingen løsn.

$\begin{array}{r} 0+2x+6 \\ -(0+0) \\ \hline 2x+6 \\ 2x+6 \end{array}$

$x = -3$

$x^2 = -2$

6p

BRA!

Her kan det være
 vanskelig og holde
 orden men du
 kom fram til
 rigtig svar.

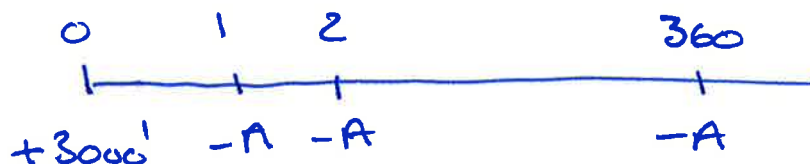
9

Løsning:

Quinsoppsaver
Oppgaverett I

MET1180
Sep 2017

1.



$$r = \frac{2,10\%}{12} = 0,00175$$

$$a) \quad L - \frac{A}{1+r} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^{360}}{1 - \frac{1}{1+r}} = 0$$

$$L = A \cdot \frac{(1+r)^{360} - 1}{r \cdot (1+r)^{360}} \Rightarrow A = L \cdot \frac{r \cdot (1+r)^{360}}{(1+r)^{360} - 1}$$
$$= 3.000.000 \cdot \frac{0,00175 \cdot 1,00175^{360}}{1,00175^{360} - 1}$$

$$A \approx \underline{11.239,21 \text{ kr}}$$

$$\text{Samlede renter: } 360 \cdot A - L \approx 360 \cdot 11,239,21 \text{ kr} - 3.000.000 \text{ kr}$$
$$\approx \underline{1.046.113,98 \text{ kr}}$$

Dersom terminbeløpet A antas stå at $A = 11,239,21 \text{ kr}$, blir samlede renter 1.046.115,60 kr.

b)

Alt A: Totalt $11.239,21 \text{ kr} + 30 \text{ kr} = \underline{11.269,21 \text{ kr / mnd.}}$

Alt B: Terminbeløp $A' = \underline{11.330,15 \text{ kr / mnd}}$

Alt A lønner seg

$$A' = L \cdot \frac{r' \cdot (1+r')^{360}}{(1+r')^{360} - 1} \approx 11.330,15 \text{ kr}$$

$$\text{med } r' = \frac{2,16\%}{12} = 0,0018$$

c) Alt B:

Effektiv rate $\left(1 + \frac{2,16\%}{12}\right)^{12} - 1 = 1,0018^{12} - 1 \approx \underline{2,18\%}$

Alt A:

Ved at eff. rente er mindre enn 2.18% siden Alt A lønner seg (her mindre mnd-beløp). Santidrog er effektiv rente

Wen ferningelagert $\left(1 + \frac{2,10\%}{12}\right)^{12} - 1 = 1,00175^{12} - 1 \approx 2,12\%$

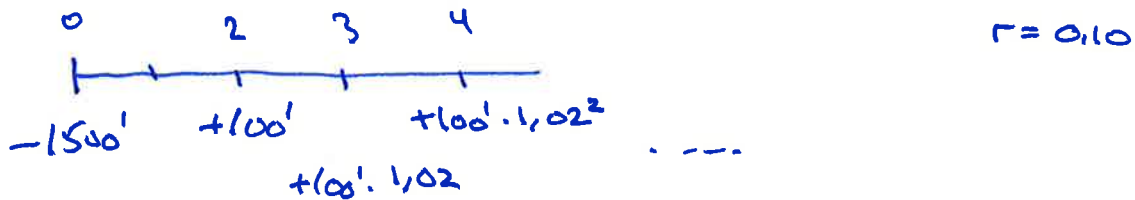
Derfor kan vi se at med gebyrer er effektiv rente i intervallet

$$2,12\% < r_{eff} < 2,18\%$$

(Man kan finne effektiv rente $r_{eff} \approx 2.14\%$ ved å bruke Excel eller andre hjelpemidler).

Bl-kalk: $3.000.000 \text{ [PV]} - 11269,21 \text{ [PMT]} 360 \text{ [N]}$
 $\text{[I/YR]} ~~4,40041212~~ \div 100 =$
 $\div 12 + 1 = \text{[YX]} 12 = -1 =$ $\leftarrow 0,0214 \approx \underline{\underline{2,14\%}}$

2.



a) Näverdi: $-1500.000 + \frac{100.000}{1,10^2} + \frac{100.000 \cdot 1,02}{1,10^3} + \dots$

$$= -1.560.000 + \frac{100.000}{1,102} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1,102}{1,10}}$$

$$= -1.500.000 + \frac{100.000}{1,10.0,08}$$

$$\approx \underline{\underline{-363.63 \text{ kJ}}}$$

↑
leading geom.
relied on
 $k = \frac{1.02}{1.10} < 1$

Negativ navendi: Investition kann schlechte wach $r=10\%$.

b) Velbst: g (isthedet for velbst 2%)

Nåverdi: $-1.500.000 + \frac{100.000}{1,10^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1+g}{1,10}} = 0$

$$= -1.500.000 + \frac{100.000}{1,10 \cdot (0,10 - g)} = 0$$

$$\frac{100.000}{1,10 \cdot (0,10 - g)} = 1.500.000$$

$$\frac{1}{0,10 - g} = \frac{1.500.000}{100.000} \cdot 1,10$$

$$\frac{1}{0,10 - g} = 15 \cdot 1,10 = 16,5$$

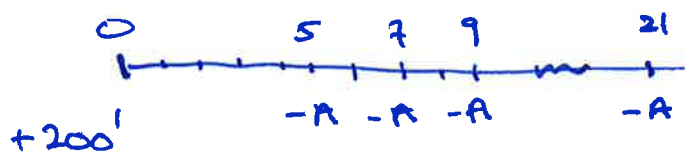
$$0,10 - g = \frac{1}{16,5}$$

$$g = 0,10 - \frac{1}{16,5} \approx \underline{3,94\%}$$

Investeringen er lønnsom om tilbagebetalings-
voksler med minst 3,94% per år.

↑
Sætter nåverdi
lik null for å
finne ut ved
hvilken velbst g
investeringen
starter å
være lønnsom

3.



$$r = \frac{18\%}{12} = 0,015$$

a) Finnes løst A: $200.000 - \frac{A}{(1+r)^5} - \frac{A}{(1+r)^7} - \dots - \frac{A}{(1+r)^{21}} = 0$

$$200.000 = \frac{A}{(1+r)^5} + \dots + \frac{A}{(1+r)^{21}}$$

$$= \frac{A}{(1+r)^5} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{(1+r)^2}\right)^9}{1 - \frac{1}{(1+r)^2}}$$

geom. rekke
med
 $k = \frac{1}{(1+r)^2}$
og $\frac{21-5}{2} + 1 = 9$
ledd

$$200.000 = \frac{A \cdot (1+r)^{18} - 1}{(1+r)^{18} \cdot (1+r)^3 \cdot ((1+r)^2 - 1)} = A \cdot \frac{(1+r)^{18} - 1}{(1+r)^{21} \cdot (r^2 + 2r)}$$

$$A = 200.000 \cdot \frac{(1+r)^{21} \cdot r(r+2)}{(1+r)^{18} - 1} \approx \underline{26.888,29 \text{ kr}}$$

$$\text{Samlede renter: } 9 \cdot A - 200.000 \approx \underline{41.994,62 \text{ kr}}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Bruker vi avrundet } A = 26.888,29 \text{ kr, blir samlede renter} \\ 9 \cdot A - 200.000 \approx 41.994,61 \text{ kr} \end{array} \right)$$

$$b) \quad \underline{r' = 6\% / 12 = 0,005:}$$

$$A' = 200.000 \cdot \frac{(1+r')^{21} \cdot r'(r'+2)}{(1+r')^{18} - 1} \approx 23.702,94$$

$$\text{Samlede renter: } 9A' - 200.000 \approx \underline{13.326,48 \text{ kr}}$$

Resultat: Redusert til $18\% / 3 = 6\%$, dvs $1/3$ av r .
 Samlede renter er mindre enn $1/3$ av opprinnelig samlede renter. Dette må skyldes at lånet betales raskere tilbake med $r' = 6\%$.

4.

$$a) \quad \frac{7}{x} = \frac{8}{x+1} \quad | \cdot x(x+1)$$

$$7(x+1) = 8x$$

$$7x+7 = 8x$$

$$\underline{\underline{x = 7}}$$

$$b) \quad x^5 = x$$

$$x^5 - x = 0$$

$$x(x^4 - 1) = 0$$

$$\underline{x=0} \quad \text{eller} \quad x^4 = 1$$

$$x^2 = \pm 1$$

$$x^2 = 1$$

$$\underline{\underline{x = \pm 1}}$$

$$\underline{\underline{x=0, x=1, x=-1}}$$

$$d) \sqrt{3x-4} = \sqrt{3x-4}$$

$$(\sqrt{3x-4})^2 = 3x-4$$

$$3x - 8\sqrt{3x} + 16 = 3x - 4$$

$$20 = 8\sqrt{3x}$$

$$\sqrt{3x} = 2\frac{5}{4} = 10/4 = 5/2$$

$$(\sqrt{3x})^2 = (5/2)^2 = 25/4$$

$$3x = 25/4$$

$$x = 25/12$$

$$\text{VS: } \sqrt{3 \cdot 25/12} - 4 = 5/2 - 4 = -3/2$$

$$\text{HS: } \sqrt{3 \cdot 25/12} - 4 = \sqrt{\frac{25}{4}} - 4 = \sqrt{\frac{9}{4}} = 3/2$$

ingen løsning

$$e) x^3 - 2x + 1 = 0$$

$$x=1: \text{ løsn. siden } 1^3 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$$

$$x^3 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$x=1 \text{ eller } x^2+x+1=0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x=1, x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

$$x^3 - 2x + 1 : x-1 = x^2 + x - 1$$

$$-(x^3 - x^2)$$

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{-(x^2 - x)}$$

$$-x + 1$$

$$-(-x + 1)$$

$$0$$

$$c) x^6 + x^4 = 2x^2$$

$$x^6 + x^4 - 2x^2 = 0$$

$$x^2(x^4 + x^2 - 2) = 0$$

$$x=0 \text{ eller } x^4 + x^2 - 2 = 0$$

$$u = x^2$$

$$u^2 + u - 2 = 0$$

$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$u=1, u=-2$$

$$x^2=1 \text{ eller } x^2=-2$$

$$x = \pm 1$$

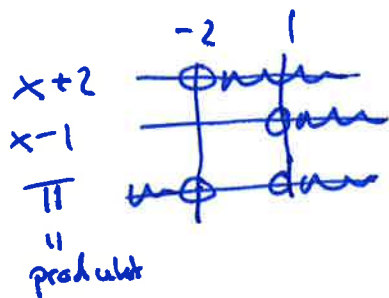
$$\underline{\underline{x=0, x=1, x=-1}}$$

5.

a) $x^2 + x < 2$

$$x^2 + x - 2 < 0$$

$$(x+2)(x-1) < 0$$



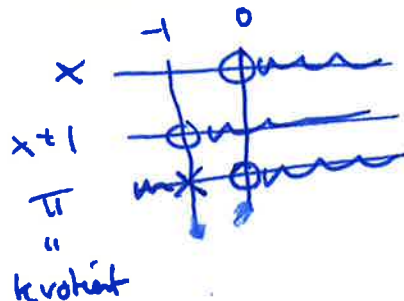
Lösung: $(-2, 1)$

b) $\frac{1}{x+1} \geq 1$

$$\frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} \geq 0$$

$$\frac{-x}{x+1} \geq 0$$

$$\frac{x}{x+1} \leq 0$$



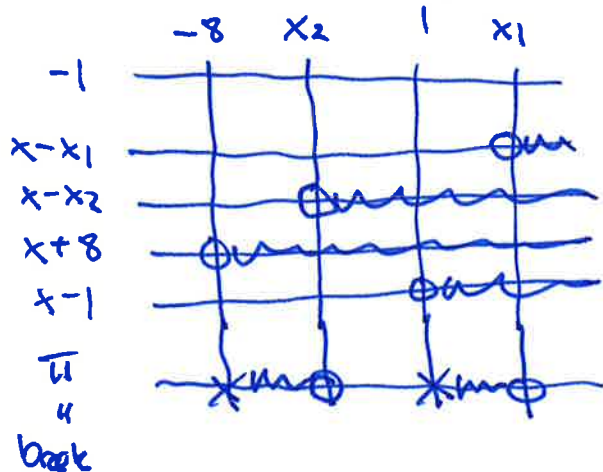
Lösung: $(-1, 0]$

c) $\frac{5x+2}{x^2+7x-8} < 1$

$$\frac{5x+2 - (x^2+7x-8)}{x^2+7x-8} < 0$$

$$\frac{-x^2 - 2x + 10}{(x+8)(x-1)} < 0$$

$$\frac{-(x-x_1)(x-x_2)}{(x+8)(x-1)} < 0$$



$$-x^2 - 2x + 10 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+40}}{-2} = -1 \pm \frac{\sqrt{44}}{2}$$

$$= -1 \pm \sqrt{11}$$

$$x_1 = -1 + \sqrt{11} \approx 2.32$$

$$x_2 = -1 - \sqrt{11} \approx -4.32$$

$$-x^2 - 2x + 10 = -(x-x_1)(x-x_2)$$

Lösung: $x > x_1$ oder $x_2 < x < 1$
oder $x < -8$

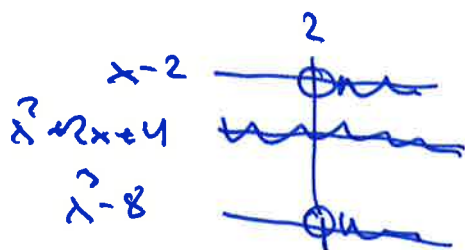
$$(-\infty, -8) \cup (x_2, 1) \cup (x_1, \infty)$$

mit $x_1 = -1 + \sqrt{11} \approx 2.32$
 $x_2 = -1 - \sqrt{11} \approx -4.32$

d) $x^3 > 8$

$$x^3 - 8 > 0$$

$$(x-2)(x^2+2x+4) > 0$$



Loosn: $x > 2$

(2, →)

$$\begin{array}{r} x^3 - 8 : x - 2 = x^2 + 2x + 4 \\ -(x^3 - 2x^2) \\ \hline 2x^2 - 8 \\ -(2x^2 - 4x) \\ \hline 4x - 8 \\ 4x - 8 \\ \hline 0 \end{array}$$

(Side $x=2$ er loosn. av $x^3=8$)

$$x^2 + 2x + 4 = 0:$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} \text{ ingen loosn.}$$

$$\parallel \\ x^2 + 2x + 4 > 0 \text{ for all } x$$

e) $x^2 - x^4 + 7 < 5$

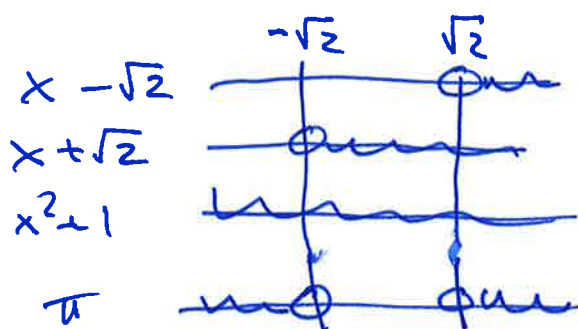
$$-x^4 + x^2 + 2 < 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^4 - x^2 - 2 > 0$$

$$(x^2 - 2)(x^2 + 1) > 0$$

$$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 1) > 0$$

← alltid pos.



Loosn: $x > \sqrt{2}$ eller $x < -\sqrt{2}$

$$\underline{\underline{(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)}}$$

$$u = x^2;$$

$$u^2 - u - 2 = 0$$

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2}$$

$$u = \frac{1 \pm 3}{2} = 2, -1$$

$$x^2 = 2 \text{ eller } x^2 = -1$$

$$x = \pm \sqrt{2}$$

6.

$$\frac{6}{x+1} - 1 = \frac{3}{x} + \frac{3}{x+2}$$

$$| \cdot x(x+1)(x+2)$$

$$6x(x+2) - x(x+1)(x+2) = 3(x+1)(x+2) + 3x(x+1)$$

$$6x^2 + 12x - x(x^2 + 3x + 2) = 3(x^2 + 3x + 2) + 3x^2 + 3x$$

$$-x^3 - 3x^2 - 2x = 6$$

$$x^3 + 3x^2 + 2x + 6 = 0$$

$$(x+3)(x^2+2) = 0$$

$$x = -3 \text{ oder } x^2 = -2$$

$$\underline{\underline{x = -3}}$$

→ Mögliche Nullstellen:

$$x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

$$x = \pm 1, \pm 2 \rightarrow \text{keine}$$

$$x = -3 \text{ ist Lösung.}$$

$$\begin{array}{l} x^3 + 3x^2 + 2x + 6 : x+3 = x^2 + 2 \\ \underline{x^3 + 3x^2} \end{array}$$

$$2x + 6$$

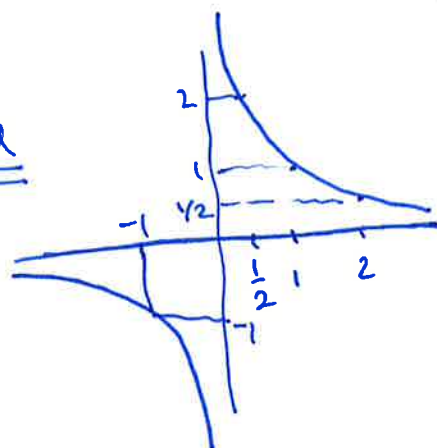
$$\underline{2x + 6}$$

$$0$$

① Rasjonale funksjoner og asymptoter.

$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ rasjonal når $p(x), q(x)$ er polynomer

Ex: $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ Grat:
Hyperbel

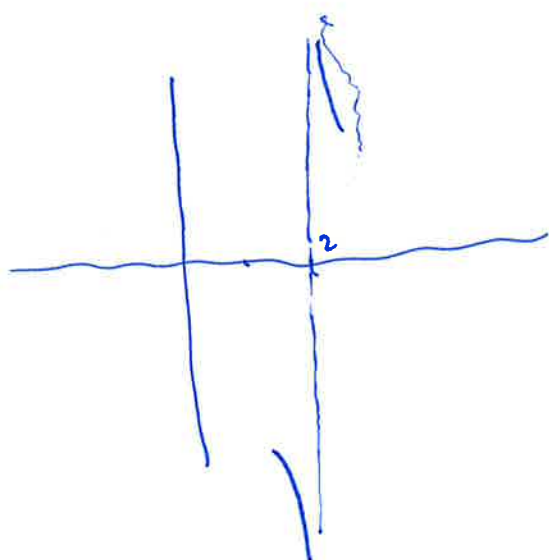


Asymptoter:

Vertikal: $x=0$ (y-akse)

Horisontal: $y=0$ (x-akse)

Ex: $f(x) = \frac{x}{x-2}, x \neq 2$ ← Vi ser på når nevner = 0
 $x-2=0$
 $x=2$



$x = 2+h$: $h \neq 0$ liten pos/neg verdi

$$f(2+h) = \frac{2+h}{(2+h)-2} = \frac{2+h}{h}$$

$h=0.01$: $f(2.01) = \frac{2.01}{0.01} = 201$

$h=-0.01$: $f(1.99) = \frac{1.99}{-0.01} = -199$

$x=2$

Vertikal asymptote:

$x=c$ vertikal asymptote hvis $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm \infty$

Dette betyr: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$

$x=2$ vertikal asymptote.

$x \rightarrow 2^+$ gir at $f(x) = \frac{x}{x-2} \rightarrow \infty$

Dette betyr at vi kan få funksjonsverdi så store vi ønsker ved å velge x nær nok 2.

$$x = 2+h \Rightarrow f(x) = \frac{2+h}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \begin{cases} \infty, h > 0 \\ -\infty, h < 0 \end{cases}$$

(h liten)

1 praksis: Finnes når nevner = 0.

Ek: $f(x) = \frac{x-1}{x^2-5x+4}$

Vertikale asymptoter?

Nevner = 0:

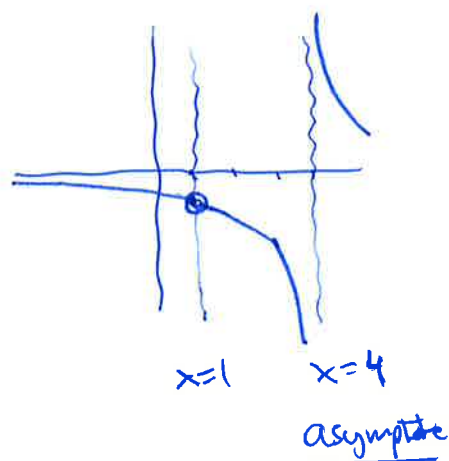
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x = 4, x = 1$$

$x \rightarrow 4$: $f(x) = \frac{x-1}{x^2-5x+4} \rightarrow \frac{3}{0} \rightarrow \pm\infty$

$x \rightarrow 1$: $f(x) = \frac{x-1}{x^2-5x+4} \rightarrow \frac{0}{0}$

$$\frac{x-1}{(x-4)(x-1)} = \frac{1}{x-4} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-4} = -\frac{1}{3}$$



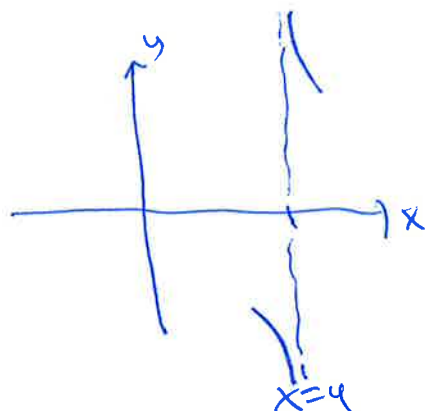
Hvis $x=c$ gir null i nevner og ikke null i teller, så er $x=c$ en vertikal asymptote

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-5x+4}$$

$$x=4, x=1$$

(asymptote)

↑ ikke vertikal asymptote

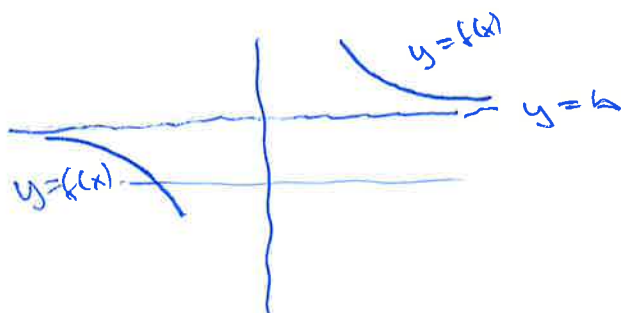


Horisontale/skrå asymptoter:

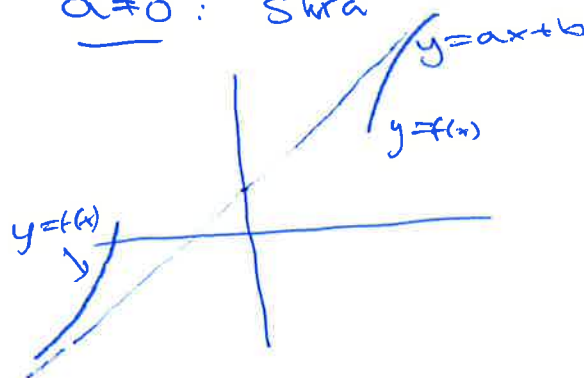
Defn: $y=ax+b$ er en horisontal/skå asymptote for f

$$\text{hvis } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

$a=0$: Horisontal



$a \neq 0$: Skrå



Metode for å finne horisontale / skrå asymptoter

Polynomdivisjon.

Ekse: $f(x) = \frac{x}{x-2}$

Vertikale: $x=2$

Horisontale / skrå: ?

$$\begin{array}{r} x : (x-2) = 1 \\ -(x-2) \\ \hline 2 \end{array}$$

$$f(x) = \frac{x}{x-2} = \overset{1}{\textcircled{1}} + \frac{2}{x-2} \quad \downarrow 0$$

$$x \rightarrow \pm\infty: 1 \rightarrow 1$$

konkl:

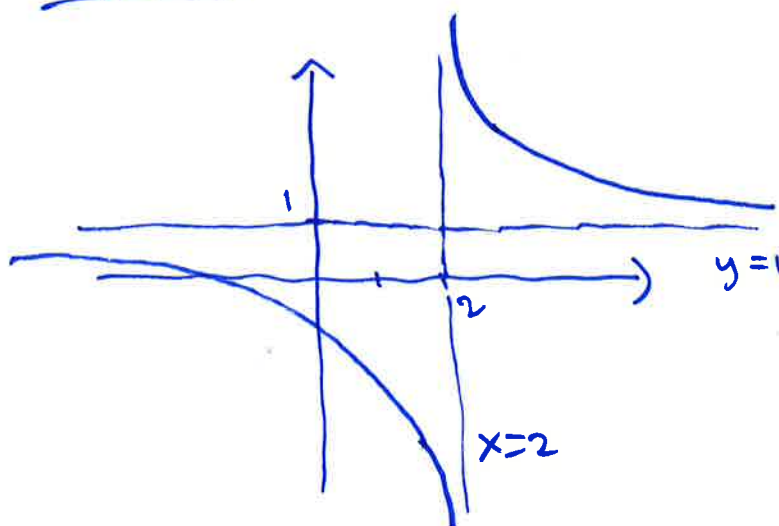
$$y = f(x) \rightarrow 1$$

når $x \rightarrow \pm\infty$

$$\frac{2}{x-2} \rightarrow 0$$

Restleddet går alltid mot null
når $x \rightarrow \pm\infty$ fordi teller har
lavere grad enn nevner.

$y=1$ er horisontal
asymptote.



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

Es: $f(x) = \frac{x-1}{x^2-5x+4}$

Vertikal: $x=4$
Horizontal: $y=0$

BI

$\frac{x-1}{x^2-5x+4} = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x^2-5x+4} = 0 + \frac{x-1}{x^2-5x+4}$

$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-1}{x^2-5x+4} = \frac{0}{0}$
 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{x-1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{5x}{x^2} + \frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1-5+4} = \frac{0}{0}$

