FORELESNING 11

MET1180

EIVIND ERIKSEN

OKT 20, 2017

MATEMATIKK

Plan:

Kontrollprøve

1. Kontinuitet og grenseverdier
2. Sammensatte og omvendte funksjoner
3. Eksponential- og logaritmefunksjoner

Pensum:

[E] 3.10 – 3.13

Kontrolleksamen	MET 11801 Matematikk
Innleveringsfrist	16. oktober 2017 kl 1200

Oppgave 1.

Du investerer $I = (n+1) \cdot 10.000.000$ kr, hvor n er nest siste siffer i ditt ID-nr. Du regner med at investeringen gir $(n+1) \cdot 800.000$ kr i tilbakebetaling etter to år, og deretter årlige tilbakebetalinger som øker med 4% i året. Vi bruker diskonteringsrenten $r = 10\%$.

(a) Skriv ned investeringsbeløpet I i ditt tilfelle. Er investeringen lønnsom?
(b) Finn internrenten til kontantstrømmen.

Oppgave 2.

Løs likningene:

$$a)\ x^7 - x^4 = 2x \qquad b)\ x^8 = x^2 \qquad c)\ x^3 + 9 = 12x \qquad d)\ 3 \cdot \sqrt[3]{3x} = x$$

Oppgave 3.

Løs ulikhetene:

$$a)\ 3 - x < x + 5 \qquad b)\ x^2 + 12 > 7x \qquad c)\ \sqrt{x} > x \qquad d)\ \frac{1}{2-x} > \frac{1}{x^2}$$

Oppgave 4.

Faktoriser funksjonsuttrykket

$$f(x) = (6-x) \cdot \frac{6 - x(7-x)}{30} + \frac{5(7-x) - 6}{30} + \frac{x-5}{5}$$

Finn alle nullpunktene til f, og avgjør når $f(x) > 0$.

Løsning   Kontrollprøve   MET 11801   16/10/2017

1. a) $I = 10^4$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 3 & \\ -10^4 & +800 & & \dots \\ & & +800 \cdot 1{,}04 & \end{array}$$

Nåverdi:

$$-10^4 + 800 \cdot \frac{1}{1{,}1^2} + 800 \cdot 1{,}04 \cdot \frac{1}{1{,}1^3} + \dots$$

$$= -10^4 + \frac{800}{1{,}1 \cdot 0{,}06} \simeq +2.121.212 \text{ kr}$$

Lønnsom.

b) Internrente r:

$$-10^4 + 800 \cdot \frac{1}{(1+r)(r-0{,}04)} = 0$$

$$\frac{1}{r^2+0{,}96r-0{,}04} = \frac{100}{8}$$

$$r^2+0{,}96r-0{,}04 = \frac{8}{100} = 0{,}08$$

$$r^2+0{,}96r-0{,}12 = 0 \Rightarrow r = \frac{-0{,}96+\sqrt{0{,}96^2+0{,}48}}{2}$$

$$\simeq 11{,}2\%$$

2.

a) $x^7 - x^4 = 2x$

$x(x^6-x^3-2)=0$

$x=0$ $x^3 = 2, -1$

$x=\sqrt[3]{2}$, $x=-1$

b) $x^8 = x^2$

$x^2(x^6-1)=0$

$x=0$, $x^6=1$

$x=\pm 1$

c) $x^3+9=12x$

$x^3-12x+9=0$

$\uparrow$

$x=3$ er løsn.

$\Downarrow$

$(x-3)(x^2+3x-3)=0$

$x=3$, $x=\frac{-3\pm\sqrt{9+12}}{2}$

$x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$

d) $3\cdot\sqrt[3]{3x}=x$

$27\cdot 3x = x^3$

$81x = x^3$

$x(81-x^2)=0$

$x=0$, $x=\pm\sqrt{81}=$

$x=\pm 9$

3.

a) $3 - x < x + 5$

$-2x < 2$

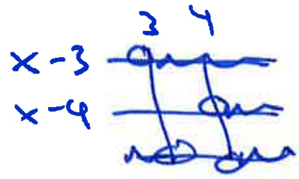
$\underline{x > -1}$

b) $x^2 + 12 > 7x$

$x^2 - 7x + 12 > 0$

$(x-3)(x-4) > 0$

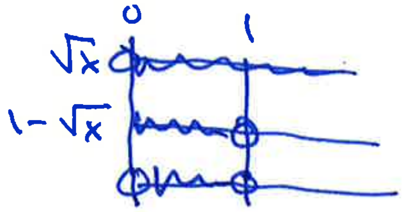
$\underline{x > 4 \text{ eller } x < 3}$



c) $\sqrt{x} > x$

$\sqrt{x} - x > 0$

$\sqrt{x}(1 - \sqrt{x}) > 0$



$\underline{0 < x < 1}$

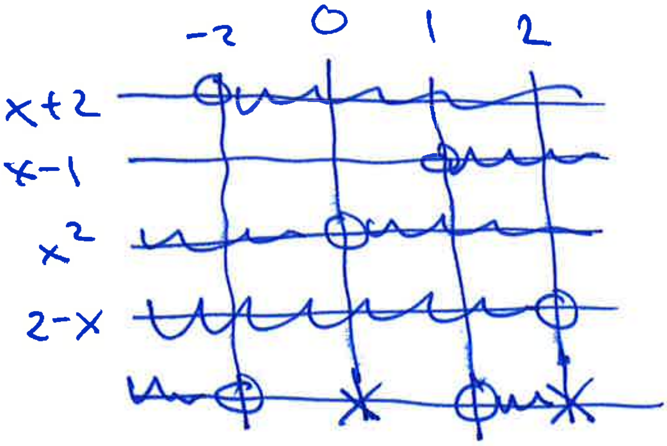
d) $\dfrac{1}{2-x} > \dfrac{1}{x^2}$

$\dfrac{1}{2-x} - \dfrac{1}{x^2} > 0$

$\dfrac{x^2 - (2-x)}{x^2(2-x)} > 0$

$\dfrac{x^2 + x - 2}{x^2(2-x)} > 0$

$\dfrac{(x+2)(x-1)}{x^2(2-x)} > 0$



$\underline{1 < x < 2 \text{ eller } x < -2}$

4.

$$f(x) = (6-x) \cdot \frac{6 - x(7-x)}{30} + \frac{5(7-x)-6}{30} + \frac{x-5}{5}$$

$$= \frac{1}{30}\left[(6-x)\left(6-x(7-x)\right) + 5(7-x) - 6 + 6(x-5)\right]$$

$$= \frac{-x(6-x)(7-x) + 6(6-x) + 35 - 5x - 6 + 6x - 30}{30}$$

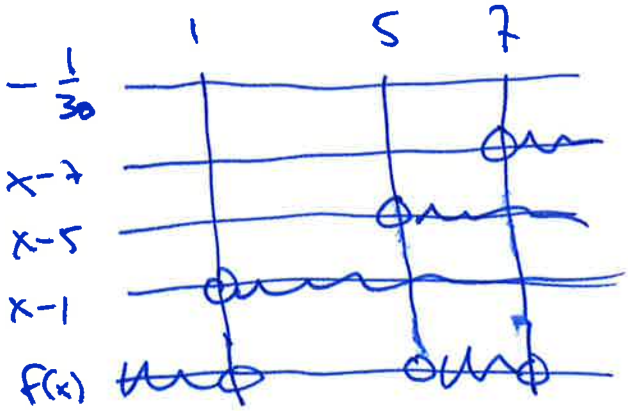
$$= \frac{-x(6-x)(7-x) + 36 - 6x - 1 + x}{30} = \frac{-x(6-x)(7-x) - 5x + 35}{30}$$

$$= \frac{-x(6-x)(7-x) - 5(x-7)}{30} = \frac{x-7}{30} \cdot \left(x(6-x) - 5\right)$$

$$= \frac{x-7}{30} \cdot \left(-x^2 + 6x - 5\right) = -\frac{x-7}{30}\left(x^2 - 6x + 5\right)$$

$$= -\frac{x-7}{30} \cdot (x-5)(x-1) = \underline{-\frac{1}{30}(x-7)(x-5)(x-1)}$$

Nullpkt: $f(x) = 0$ når $\underline{x = 7}$, $\underline{x = 5}$, $\underline{x = 1}$

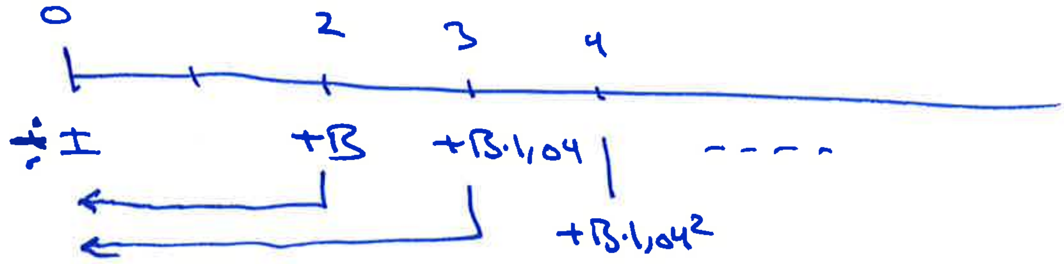


$\underline{f(x) > 0:}$

$\underline{x < 1 \text{ eller } 5 < x < 7}$

Kontrollprøve:

1. $n=0$: $I = 10.000.000$ kr
$B = 800.000$ kr



a) $r=10\%$: Nåverdi:

$$-10.000.000 + \underbrace{\frac{800000}{1{,}10^2} + \frac{800000\cdot 1{,}04}{1{,}10^3} + \dots}$$

$$= -10^6 + \frac{800'}{1{,}10^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1{,}04}{1{,}10}}$$ uendelig geometrisk $k=\frac{1{,}04}{1{,}10}$

$$= -10^6 + \frac{800'}{1{,}10\,(1{,}10-1{,}04)} = 2{,}1^4 > 0$$

lønnsom inv.

b) Internrente:

$$-10^6 + \frac{800'}{(1+r)^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1{,}04}{1+r}\right)} = 0$$

$$\frac{800.000}{(1+r)(r-0{,}04)} = \frac{800.000}{(1+r)(1+r-1{,}04)} = 10.000.000$$

$$0{,}08 = \frac{800.000}{10.000.000} = (1+r)(r-0{,}04) = r^2 + r - 0{,}04r - 0{,}04$$
$$= r^2 + 0{,}96r - 0{,}12 = 0$$

$$r = \frac{-0{,}96 \pm \sqrt{0{,}96^2 + 4\cdot 0{,}12}}{2}$$ velger +

$$\simeq 0{,}1119 = 11{,}19\%$$

2 a)

$$x^7 - x^4 = 2x$$

$$x^7 - x^4 - 2x = 0$$

$$x(x^6 - x^3 - 2) = 0$$

$\underline{x=0}$ eller $x^6 - x^3 - 2 = 0$ $\quad \underline{u = x^3}$

$$u^2 - u - 2 = 0$$

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = 2, -1$$

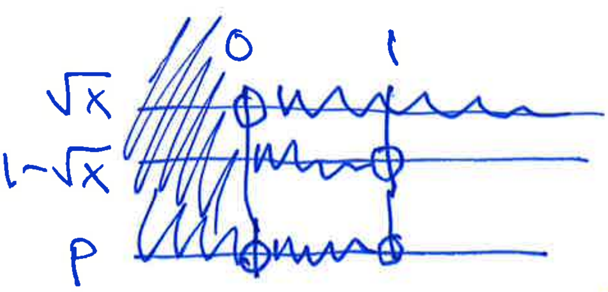
$x^3 = 2$ eller $x^3 = -1$

$\underline{x = \sqrt[3]{2}}$ $\qquad x = \sqrt[3]{-1} \underline{= -1}$

3 a) $\sqrt{x} > x$

$$\sqrt{x} - x > 0$$

$$\sqrt{x}(1 - \sqrt{x}) > 0$$



$\underline{\underline{0 < x < 1}}$ $\qquad L = \underline{\underline{(0,1)}}$

Eks: $\quad -1 > -2$

$$1 > 4$$

3 a)

$$\frac{1}{2-x} > \frac{1}{x^2}$$

$$x^2+x-2=0$$

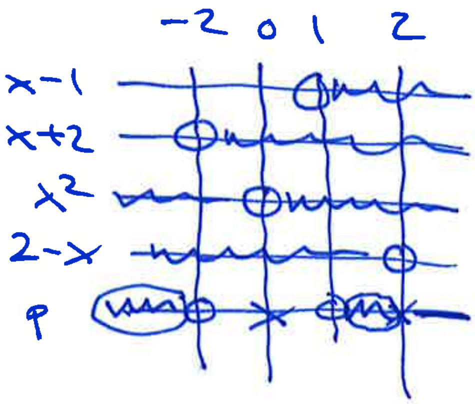
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm3}{2}$$

$$=1,-2$$

$$\frac{1\cdot x^2}{(2-x)\cdot x^2}-\frac{1\cdot(2-x)}{x^2\cdot(2-x)}>0$$

$$\frac{x^2+x-2}{x^2\cdot(2-x)}>0$$

$$\frac{(x-1)(x+2)}{x^2(2-x)}>0$$

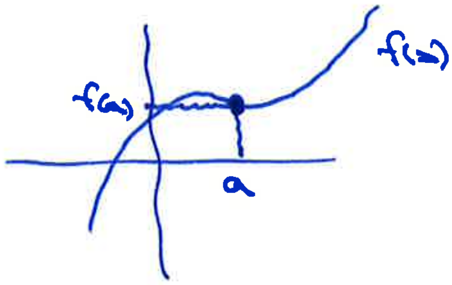


$x<-2$ eller $1<x<2$

$L=(\leftarrow,-2)\cup(1,2)$

1 Kontinuitet

$f(x)$ funksjon, $x=a$ med i D_f = defn.området til f



Defn:

f er kontinuerlig i $x=a$ hvis

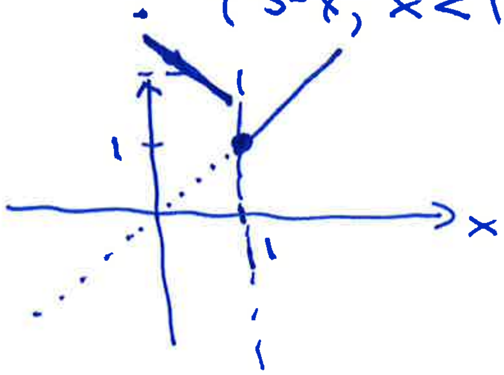
$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^{\div}} f(x)$$

"Vanlige funksjoner" er kontinuerlige.

Eks: $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 1 \\ 3-x, & x<1 \end{cases}$



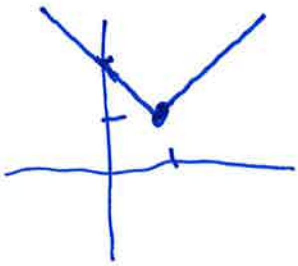
$f(1)=1$

$f(0.99)=2.01$

$$f(1)=1 = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 \neq \lim_{x\to 1^{\div}} f(x) = 2$$

f ikke kont. i $x=1$.

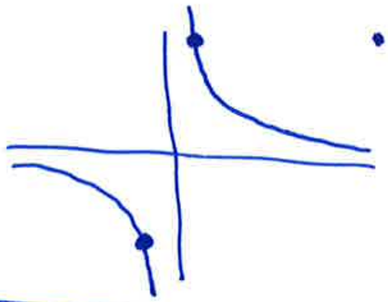
$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 1 \\ 2-x, & x<1 \end{cases}$



$$f(1) = 1 = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 = \lim_{x\to 1^{\div}} f(x) = 1$$

Alle polynomfunksjoner, rasjonale funksjoner, rot funksjoner, logaritmer og eksponentiale funksjoner er <u>kontinuerlige</u>; dvs kontinuerlig i alle pkt i D_f.

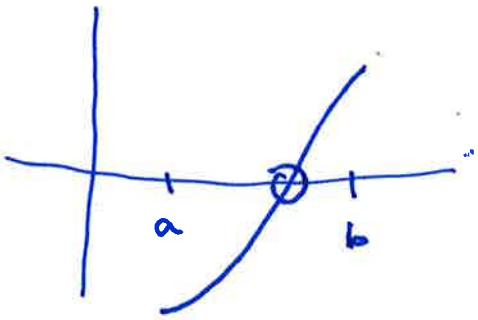
<u>Eks:</u> $f(x) = 1/x$, $x \neq 0$



<u>Skjæringssetningen:</u>

Hvis f er kontinuerlig på intervallet $[a,b]$, så vet vi at

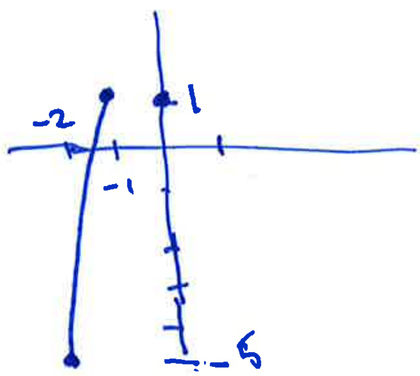
$$f(a) < 0,\ f(b) > 0 \implies f(x) = 0 \text{ for en } x \text{ i } (a,b)$$



<u>Eks:</u> $f(x) = x^3 - x + 1$

Finn nullpkt.

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(-1) &= 1 \\ f(-2) &= -5 \end{aligned}\right\}$$ Det fins et nullpkt <u>i $(-2,-1)$</u>



(2) Sammensatte og inverse funksjoner

Sammensatte funksjoner:

Eks: $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ sammensatt funksjon

$$\begin{array}{ccccc} x & \xmapsto{g} & x^2+1 & \longrightarrow & \sqrt{x^2+1} \\ & & \parallel & & \parallel \\ & & u & \xmapsto[h]{} & \sqrt{u} \end{array}$$

$g(x) = x^2+1$ indre funksjon (kjerne) $\qquad h(u) = \sqrt{u}$ ytre funksjon

Eks: $g(x) = x+1$ indre $\qquad h(x) = x^2 \Leftrightarrow h(u) = u^2$ ytre

$$f(x) = h(g(x)) = h(x+1) = (x+1)^2 = x^2+2x+1$$

$$h(x+1) = h(u) = u^2 = (x+1)^2 = x^2+2x+1$$

$$u = x+1$$

$$F(x) = g(h(x)) = g(x^2) = \underline{x^2+1}$$

Merk: $\boxed{\text{For å danne den sammensatte funksjonen } f(x) = h(g(x)) \text{ så må } D_h \text{ inneholde } V_g}$

Inverse funksjoner

$f(x) = 2x - 3$

Ønsker å finne en invers funksjon for f

$y = 2x - 3$

$\frac{y+3}{2} = \frac{2x}{2}$

$\frac{y+3}{2} = x$

$$x \longmapsto 2x-3$$

$$\frac{y+3}{2} \longleftarrow y$$

Defn:

Den omvendte funksjonen til f er en funksjon f^{-1} slik at

$f^{-1}(f(x)) = x$ og

$f(f^{-1}(x)) = x$

$$\boxed{g(y) = \frac{y+3}{2}}$$

er den omvendte funksjonen til

$f(x) = 2x - 3$

$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x-3)$

$= g(2x-3)$

$D_f = [0, \to) \quad V_f = [0, \to)$

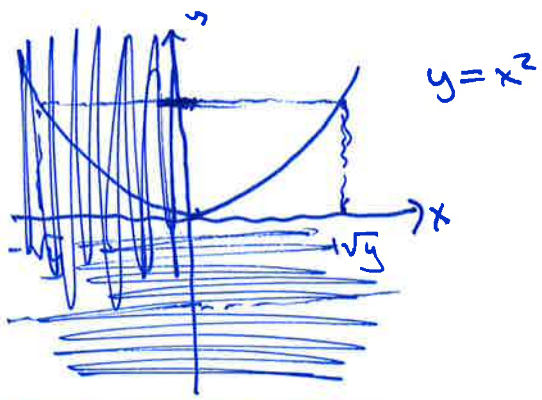
$= \frac{(2x-\cancel{3})+\cancel{3}}{2} = x$

Eks: $f(x) = x^2$, $x \geq 0$

$y = x^2$

$y \geq 0$: $x = \pm\sqrt{y}$

$y < 0$: ingen løsn.



$$\boxed{D_{f^{-1}} = V_f}$$

$= [0, \to)$

$y \geq 0$

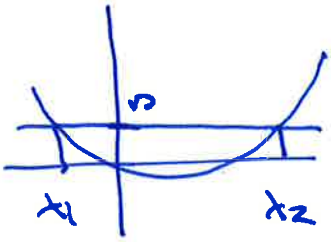
$$\boxed{f^{-1}(y) = \sqrt{y}\,,\ y \geq 0}$$

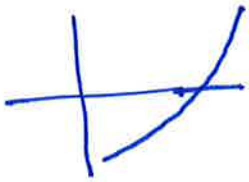
er den omvendte funksjonen til

$f(x) = x^2$, $x \geq 0$

i) Når fins det en omvendt funksjon?

f^{-1} fins $\Leftrightarrow$ $f(x_1) \neq f(x_2)$ når $x_1 \neq x_2$ i D_f



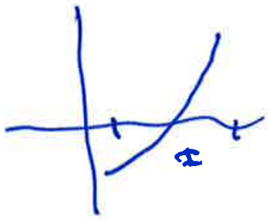


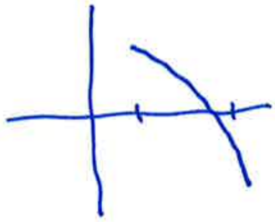
f^{-1} fins ikke

f^{-1} fins

Hvis f er definert på et intervall I, så har vi:

$$f^{-1} \text{ fins} \iff \begin{cases} f \text{ er voksende på } I \\ \text{eller} \\ f \text{ er avtagende på } I \end{cases}$$

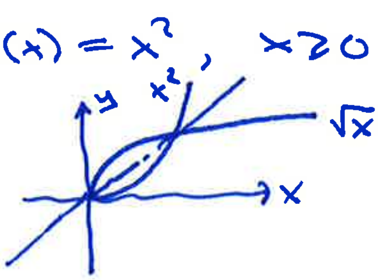




ii) Egenskaper til f^{-1}:

$\boxed{\begin{array}{l} \text{(a) } D_{f^{-1}} = V_f \quad \text{og} \quad V_{f^{-1}} = D_f \\ \text{(b) Grafen til } f^{-1}(x) \text{ er speilbildet av grafen til } f(x) \\ \quad \text{om linjen } y = x. \end{array}}$

Eks. $f(x) = x^2$, $x \geq 0$



$y = x^2 \Rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

$x^2 = y$

$x = \sqrt{y}$

$\boxed{f^{-1}(x) = \sqrt{x}}$

$V_f = [0, \rightarrow)$

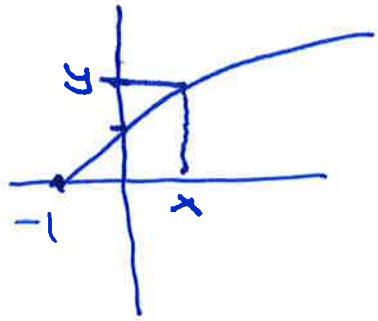
$D_f = [0, \rightarrow)$

Eks: $f(x) = \sqrt{x^3+1}$, $x \geq -1$

D_f: $x^3+1 \geq 0 \implies D_f = [-1, \rightarrow)$

$x^3 \geq -1$

$x \geq \sqrt[3]{-1} = -1$



Fins f^{-1}?

$x_1 < x_2$

$x_1^3 < x_2^3$

$x_1^3+1 < x_2^3+1$

$\sqrt{x_1^3+1} < \sqrt{x_2^3+1}$

f er voksende $\implies$ f^{-1} fins

$D_{f^{-1}} = V_f = [0, \rightarrow)$

$V_{f^{-1}} = D_f = [-1, \rightarrow)$

Finn f^{-1}:

$y = \sqrt{x^3+1} \quad | \; (\;)^2$

$y^2 = x^3+1$

$y^2 - 1 = x^3$

$x^3 = y^2 - 1$

$x = \sqrt[3]{y^2-1} \quad \rightarrow \quad f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y^2-1}$

$\Downarrow$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$, $x \geq 0$