

FORELESNING 13

EIVIND ERIKSEN

NOV 06, 2017

MET 1180 BI

MATEMATIKK

Plan:

① Derivasjonsregler (produkt/brekregel, kjernerregel, derivasjon av $a^x / \log_a(x)$)

② Tangentlinjer

③ Funksjonsdrøfting (monotoni-egenskaper, maks-/min for funksjoner)

④ Implisitt derivasjon

⑤ Funksjoner som ikke er deriverbare

Pensum:

[E] 4.3-4.6

} gjennomgås
nesten alle

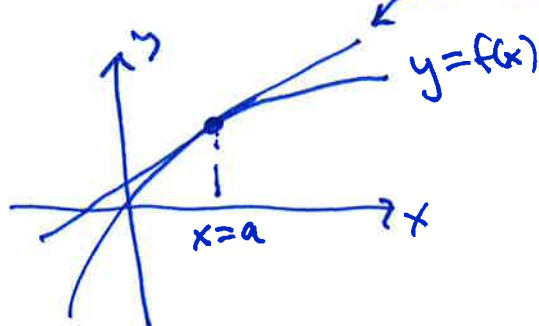
Innleveringsoppgave II:

Frist mandag kl 12
(13/11)

(endret fra fredag)

Repetisjon:

$f'(a)$ = stigningstallet
til tangenten til
 $y = f(x)$ i $x=a$



Beregning av $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(direkte fra defin.)

Derivasjonsregler:

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad (\text{alle } n)$$

$$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$$

$$[c \cdot u(x)]' = c \cdot u'(x)$$

$u(x), v(x)$: uttrykk c : konstant

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln(a)}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 10 \cdot e^x \\ \parallel \\ f'(x) &= (10 \cdot e^x)' \\ &= \underline{\underline{10 \cdot e^x}} \end{aligned}$$

Herleitung:

$$\begin{aligned} f(x) = a^x : \quad f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \quad \leftarrow \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} \\ &= a^x \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}}_{= \ln(a)} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} &= \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} \\ &= \frac{a^x \cdot (a^h - 1)}{h} \\ &= a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} \end{aligned}$$

Produktregel:

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

oder

$$\boxed{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

Ex:

$$\begin{array}{ccccccc} (x \cdot \ln x)' & = & 1 \cdot \ln x & + & x \cdot \frac{1}{x} & = & \underline{\underline{\ln(x) + 1}} \\ \underbrace{\quad}_u & \underbrace{\quad}_v & \underbrace{\quad}_{u'} \cdot \underbrace{\quad}_v & + & \underbrace{\quad}_u \cdot \underbrace{\quad}_{v'} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} (x^2 \cdot e^x)' & = & 2x \cdot e^x & + & x^2 \cdot e^x & = & \underline{\underline{(x^2 + 2x)e^x}} \\ \underbrace{\quad}_u & \underbrace{\quad}_v & \underbrace{\quad}_{u'} \cdot \underbrace{\quad}_v & + & \underbrace{\quad}_u \cdot \underbrace{\quad}_{v'} & & \end{array}$$

Bruch / Quotientenregel:

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

oder

$$\boxed{\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$$

Ex: $f(x) = \frac{x}{x+1}$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x+1} \right)' = \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{\cancel{x+1} - \cancel{x}}{(x+1)^2} = \underline{\underline{\frac{1}{(x+1)^2}}}$$

$\underbrace{\quad}_u \quad \underbrace{\quad}_v$

Ex:

BI

$$\begin{aligned}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' &= \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x - 2x \cdot \ln(x)}{x^4} \\ &= \frac{\cancel{x} \cdot (1 - 2\ln(x))}{x^{4-1}} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}\end{aligned}$$

Kjernerregelen: Derivationsregel for sammensatte funksjoner.

ytre funksjon

kjerne /
indre fn.

Ex: $f(x) = e^{1-2x} = e^u$, der $u = 1-2x$

$$f'(x) = (e^u)'_u \cdot (1-2x)'_x$$

$$= e^u \cdot (-2) = -2 \cdot e^u = \underline{\underline{-2e^{1-2x}}}$$

Kjernerregel: $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$$\begin{aligned}(f(u(x)))' &= f'(u) \cdot u'(x) \\ &= f'(u(x)) \cdot u'(x)\end{aligned}$$

$$\frac{df}{dx} = f'(x)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Leibniz' skrivemåte
for den deriverte.

Kjernerregel: $f(x) = f(u(x))$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

eller

$$(f(u(x)))' = f'(u) \cdot u'(x)$$

Ekse: $f(x) = \ln(x^2+1)$
 $= \ln(u)$, $\underbrace{u = x^2+1}_{\text{legene}}$

$$f'(x) = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$= \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \underline{\underline{\frac{2x}{x^2+1}}}$$

Ekse: $f(x) = \sqrt{x^2+7} = \sqrt{u}$, $u = x^2+7$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+7}} = \underline{\underline{\frac{x}{\sqrt{x^2+7}}}}$$

$$\left(u^{1/2} \right)' = \frac{1}{2} \cdot u^{-1/2} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{u}}$$

Anvendelser av derivate:

i) Finne tangenten til $f(x)$: $x=a$.

ii) Funnsjondrettig: - monotonegenskaper
 Gitt $f(x)$ (når f er voksende (avtagende))
 - topp- / bunnpunkt

Flere anvendelser senere.

② Tangentlinien

Ex: Finde Tangentlinien zu $f(x) = x^3 - x$
 i. $x=1$:

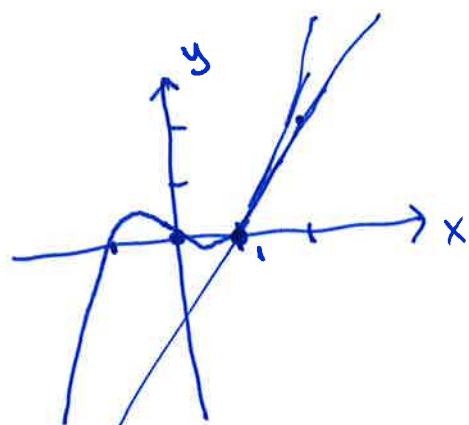
$$* f(1) = 0$$

$$= x(x^2 - 1)$$

$$* f'(1) = \underline{2}$$

$$f'(x) = (x^3 - x)' = 3x^2 - 1$$

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 1 = \underline{2}$$



Tangentlinien zu
 $f(x) = x^3 - x$
 i. pkt. $x=1$

Einpunktformel:

$$y - y_0 = e \cdot (x - x_0)$$

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$$

$$y - 0 = 2 \cdot (x - 1)$$

$$\underline{\underline{y = 2x - 2}}$$

Tangentlinien zu $f(x)$ i. $x=a$ er:

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

Einpunkt-
Formel:

$$\leftarrow y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

③ Funktionsdrøfting:

BI

Ekse: $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, $x > 0 \leftarrow D_f = (0, \infty)$

$\ln x$ defn. kun for $x > 0$

① $D_f = (0, \infty)$

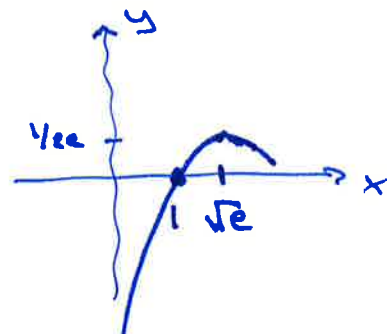
② Nullpkt for f : $f(x) = 0$

$$\frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \quad | \cdot x^2$$

$$\ln(x) = 0 \quad | \cdot e^-$$

$$e^{\ln x} = e^0$$

$$\underline{x = 1}$$



$$f(\sqrt{e}) = \frac{1/2}{e} = \frac{1}{2e}$$

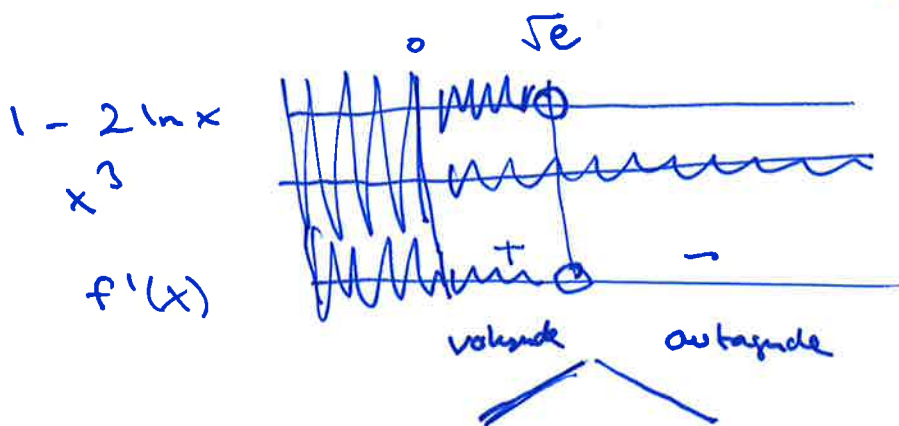
③ Monotonieregning:

Når er f voksende /
aftagende.

V. sætter opp fortegnstabel for $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x^2} \right)' = \frac{1/x \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2x \cdot \ln x}{x^4}$$

$$= \frac{x \cdot (1 - 2 \ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$



$$1 - 2 \ln x = 0$$

$$\ln x = 1/2$$

$$x = e^{1/2} = \sqrt{e}$$

Konklusjon:

f er voksende i $(0, \sqrt{e}]$

f er aftagende i $[\sqrt{e}, \infty)$

Monotonegenskaber:

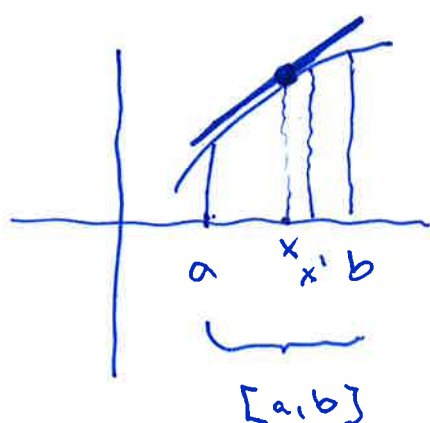
Hvis f er en kontinuertlig funktion på intervallet $[a, b]$, så har vi:

$f'(x) > 0$ for alle $x \in (a, b) \Rightarrow f$ er voksende i $[a, b]$

(strengt voksende,
monotont voksende)

$f'(x) < 0$ for alle $x \in (a, b) \Rightarrow f$ er aftagende i $[a, b]$

(strengt aftagende,
monotont aftagende)



$y = f(x)$ kont.

Antag $f'(x) > 0$ for alle $x \in (a, b)$:

$$a < x < b: f'(x) > 0$$

Defn: (strengt)
 f er voksende i $[a, b]$

hvis:

$$x_1 < x_2 \quad \text{med } x_1, x_2 \in [a, b]$$



$$\begin{aligned} f(x_1) &\leq f(x_2) && \leftarrow \text{voksende} \\ f(x_1) &< f(x_2) && \leftarrow \text{strengt voksende} \end{aligned}$$

Defn: (strengt)
 f er aftagende i $[a, b]$

hvis

$$x_1 < x_2 \quad \text{med } x_1, x_2 \in [a, b]$$



$$\begin{aligned} f(x_1) &\geq f(x_2) && \leftarrow \text{aftagende} \\ f(x_1) &> f(x_2) && \leftarrow \text{strengt aftagende} \end{aligned}$$

Ex: $f(x) = x^3 - x$

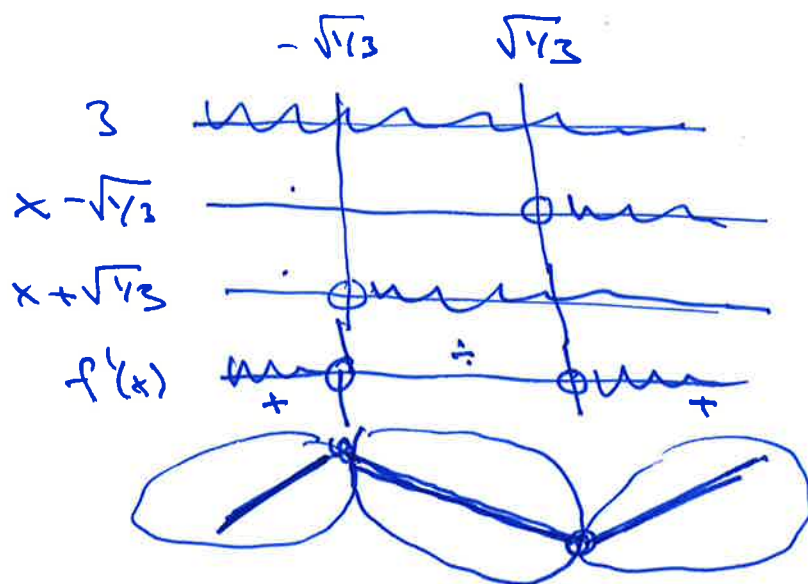
$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

$$= 3(x - \sqrt{1/3}) \cdot (x + \sqrt{1/3})$$

$$3x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1/3$$

$$x = \pm \sqrt{1/3}$$



$(-\infty, -\sqrt{1/3}]$: f strictly increasing

$[-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}]$: f strictly decreasing

$[\sqrt{1/3}, \infty)$: f strictly increasing

④ Local maximum / minimum (Global max/min)

Defn: Et stationært punkt for f er et punkt der $f'(x) = 0$.

Ex: $f(x) = x^3 - x$

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1/3$$

$$x = \pm \sqrt{1/3}$$

Stationære punkt for f .

Resultat: Hvis $x=a$ er et maks/min for f ,
da er enten:

- i) $x=a$ er et stationært punkt. $\Leftrightarrow f'(a) = 0$
- ii) $x=a$ er et punkt der $f'(x)$ ikke eksisterer. $\Leftrightarrow f'(a)$ findes ikke.
- iii) $x=a$ er et randpunkt for D_f .

Ex: $f(x) = 1 - x^2$, $D_f = \mathbb{R}$ (alle x -verdier)
ingen randpkt. for D_f .

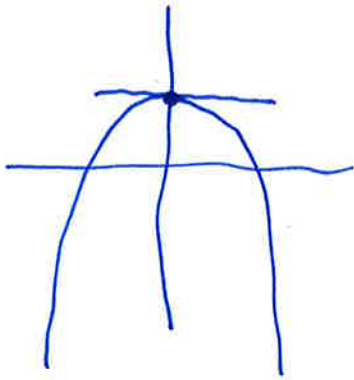
$$f'(x) = -2x \quad \leftarrow f'(x) \text{ f\"or alle } x$$

$$f'(x) = 0$$

$$-2x = 0$$

$$\underline{x = 0}$$

$\leftarrow \underline{x = 0}$ stasjonært pkt.



Stasjonært pkt

$\updownarrow$

$$f'(x) = 0$$

$\updownarrow$



lokalt
maks



lokalt
min

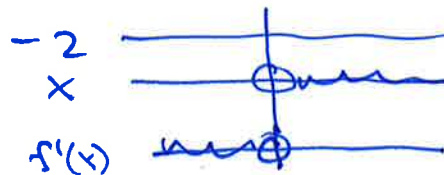


sadelpkt.

Vi finner lokale maks/min ved å sette opp
 fortegnss diagram for $f'(x)$:

$$f(x) = 1 - x^2$$

$$f'(x) = -2x$$



$x = 0$
 Stasjonært pkt.

$x = 0$ er
 et max.