FORELESNING 14

MET 1180

BI

EIVIND ERIKSEN   NOV 09, 2017   MATEMATIKK

Plan:

1. Funksjoner som ikke er deriverbare overalt.
2. Implisitt derivasjon
3. Den andrederiverte og krumning.

Pensum:
[EJ] 4.4–4.5, 4.7

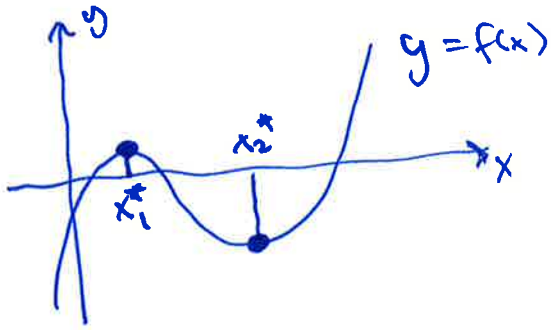
Maks/min – problemer:

$f(x)$: funksjon

$x = x^*$ er et maksimumspunkt for f (globalt maks)
hvis $f(x^*) \geq f(x)$ for alle andre x i D_f

–"– er et minimumspunkt for f (globalt min)
hvis $f(x^*) \leq f(x)$ for alle andre x i D_f

I så fall er $f(x^*)$ maksimums/minimums-verdien.



* ingen maks/min

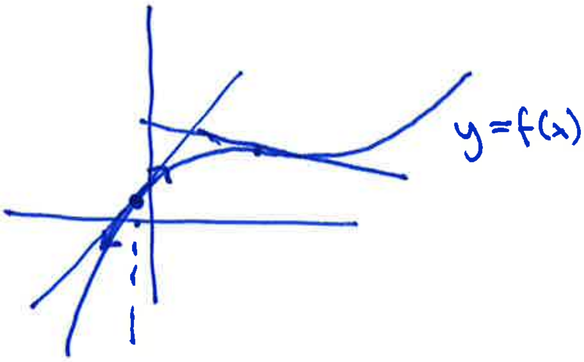
* x_1^* lokalt maks,
x_2^* lokalt min

$x = x^*$ er et lokalt maksimumspunkt
hvis $f(x^*) \geq f(x)$ for alle punkt x i nærheten av x^*.

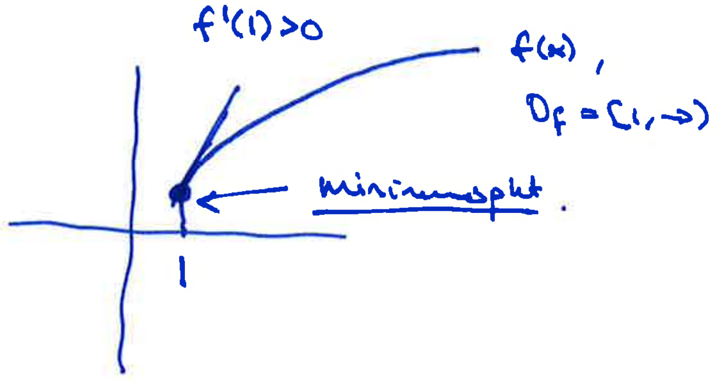
$x = x^*$ er et lokalt minimumspunkt.
hvis $f(x^*) \leq f(x)$ for alle punkt x i nærheten av x^*.

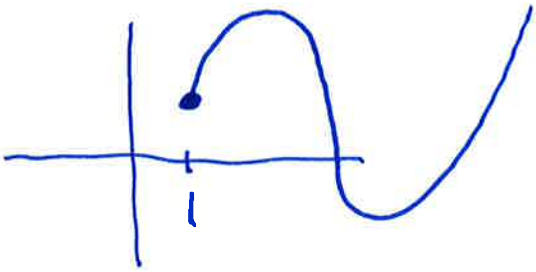
Hvordan finne maks/min-pkt.

$x = x^*$ er maks/min $\Longrightarrow$
- i) $f'(x^*) = 0$ stasjonære pkt.
  eller
- ii) $f'(x^*)$ fins ikke (kritiske pkt)
  eller
- iii) x^* randpkt for D_f.



$f'(x) \neq 0$ kan ikke være maks/min





Eks: $f(x) = x^4 - 2x^2$, $D_f = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ← Ingen randpkt.

Finn maks/min.

$f'(x) = 4x^3 - 2 \cdot 2x = 4x^3 - 4x$ ← $f'(x)$ eksisterer i alle pkt x.

$= 4x(x^2 - 1) = 0$ ← finner stasjonære pkt.

$4x = 0$ eller $x^2 - 1 = 0$

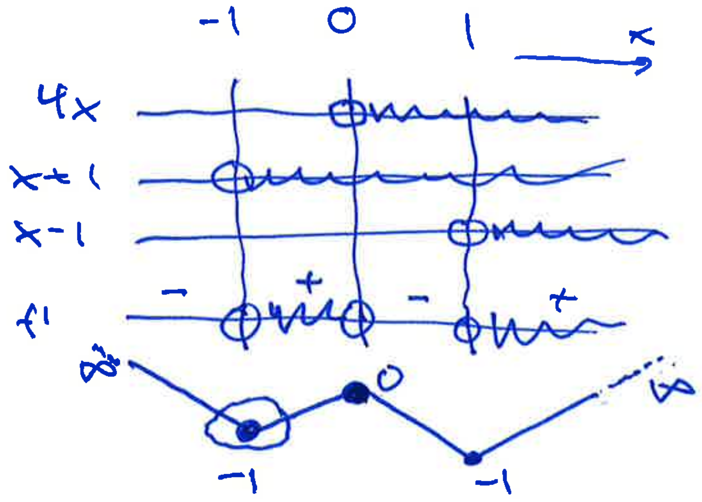
$x = 0$ $\quad$ $x = \pm 1$

$x=0$, $x=1$, $x=-1$

Kandidater for maks/min: $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$

Fortegnsdiagram for $f'(x) = 4x \cdot (x^2-1)$

$= 4x \cdot (x+1)(x-1)$



$x=0$: lokalt maks

$x=\pm 1$: lokalt min

Maks = Globalt maks: ingen

Min = Globalt min: $x = \pm 1$

min-verdi $= -1$

$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

$$\lim_{x \to \infty} x^4 - 2x^2 = \infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^4 - 2x^2 = \infty$$

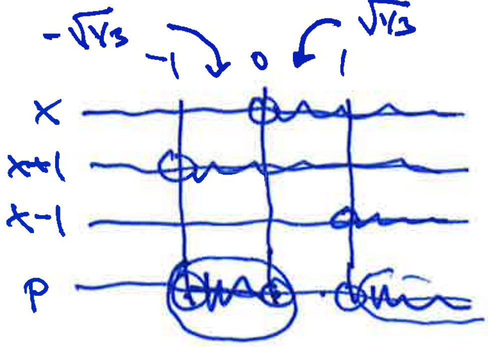
$$x^4 - 2x^2 = x^2 \cdot (x^2 - 2)$$

Eks: $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$, $D_f = [-1, 0] \cup [1, \to)$

Finn D_f:

$x^3 - x \geq 0$

$x \cdot (x^2-1) = x(x+1)(x-1) \geq 0$



Randpkt: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ ← kandidat for maks/min.

$$f'(x) = \Big(\underbrace{\sqrt{x^3-x}}_{= \sqrt{u}}\Big)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{3x^2-1}{2 \cdot \sqrt{x^3-x}}$$

Stasjonære pkt: $f'(x) = \dfrac{3x^2-1}{2\sqrt{x^3-x}} = 0$

$3x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1/3$

$x = \pm\sqrt{1/3}$

~~$x = \sqrt{1/3}$~~ : ikke med i D_f

$x = -\sqrt{1/3}$: stasjonært pkt

① Kritiske pkt der $f'(x)$ ikke fins

Eks: $f(x) = \sqrt{x^3-x}$, $D_f = [-1,0] \cup [1,\to)$

$$f'(x) = \frac{3x^2-1}{2\sqrt{x^3-x}}$$

Pkt. der $f'(x)$ ikke fins:

$x^3-x=0$: $x=-1, x=0, x=1$
divisjon med null $\to f'(x)$ fins ikke

$x^3-x<0$: ~~divisjon~~. kvadratrot av et negativt tall
$\Downarrow$
ikke med i D_f.

Kritiske pkt der $f'(x)$ ikke fins:

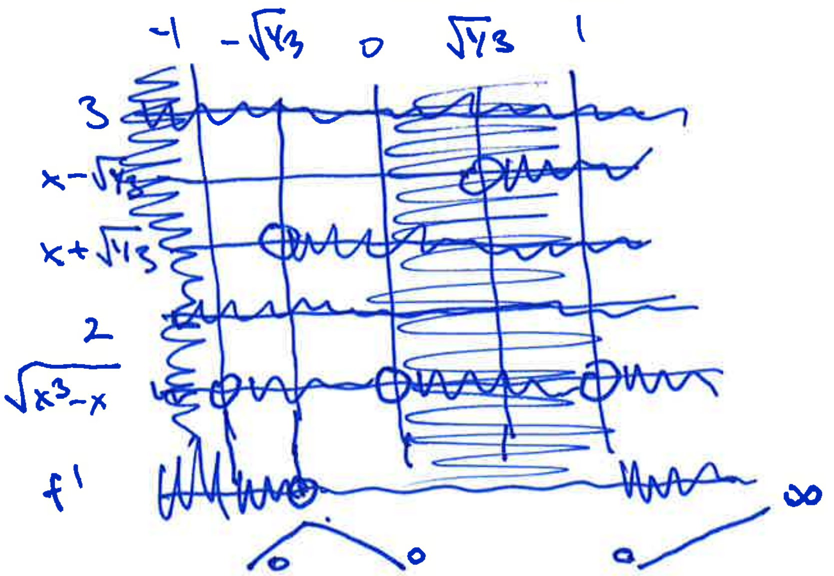
$x=-1$, $x=0$, $x=1$

$f(-1)=0$ $\quad f(0)=0$ $\quad f(1)=0$

Konkl: $f(x)=\sqrt{x^3-x}$ gir kandidater til maks/min: $\begin{cases} x=-\sqrt{1/3} \\ x=-1,0,1 \\ x=-1,0,1 \end{cases}$

Fortegnslinjen for $f'(x) = \dfrac{3x^2-1}{2\sqrt{x^3-x}}$

$$= \frac{3(x-\sqrt{1/3})(x+\sqrt{1/3})}{2\sqrt{x^3-x}}$$ $\quad \sqrt{1/3} \simeq 0{,}5$



$D_f = [-1,0] \cup [1,\to)$

Konklusjon: lokalt maks $x=-\sqrt{1/3}$
ingen globale maks.
globale min: $x=0$, $x=\pm 1$

② Implisitt derivasjon:

Eks: $xy = 1$ implisitt form

$\Downarrow$

$y = 1/x$ eksplisitt form

$y = f(x)$

$$y' = (1/x)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = \underline{\underline{-\frac{1}{x^2}}}$$

Implisitt derivasjon:

$$xy = 1$$

$$(xy)' = (1)'$$

$$(x)' \cdot y + x \cdot (y)' = 0$$

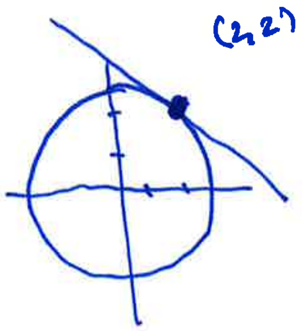
$$1 \cdot y + x \cdot y' = 0$$

$$\frac{x \cdot y'}{x} = \frac{-y}{x}$$

$$y' = \underline{\underline{-y/x}} = -\frac{(1/x)}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

Eks: $x^2 + y^2 = 8$

sirkel
sentrum $(0,0)$
radius $\sqrt{8} \simeq 2{,}8$



implisitt: $(x^2 + y^2)' = (8)'$

$$(x^2)' + (y^2)' = 0$$

$$2x + 2y \cdot y' = 0$$

$$\frac{2y \cdot y'}{2y} = \frac{-2x}{2y}$$

$$y' = -x/y$$

$$y'(2,2) = \underline{\underline{-1}}$$

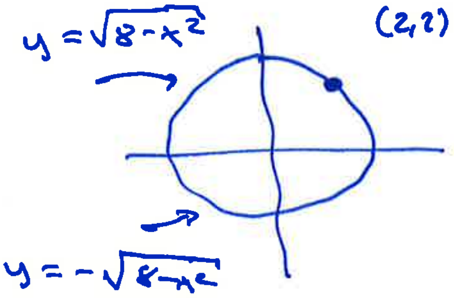
$$\parallel$$

$$-\frac{2}{2}$$

Eks: $x^2+y^2=8$

$y^2=8-x^2$

$y=\pm\sqrt{8-x^2}$



$(x,y)=(2,2)$: $y=\sqrt{8-x^2}=\sqrt{u}$, $u=8-x^2$

$y'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u' = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\cdot\sqrt{8-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{8-x^2}}$

$y'(2,2) = -\frac{2}{\sqrt{4}} = \underline{\underline{-1}}$

Implisitt:

$y=y(x)$

$x^2+y^2=8$

$x^2+y(x)^2=8$

$(x^2+y(x)^2)'=(8)'$

$2x+2y(x)\cdot y'(x)=0$

$\frac{\cancel{2y(x)}\cdot y'(x)}{\cancel{2y(x)}} = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}y(x)}$

$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$

$y'=-\frac{x}{y}$

Eks: $xy\cdot(x+y)=4$

$x^2y+xy^2=4$

$(x^2y+xy^2)'=(4)'$

$(x^2\cdot y(x))'+(x\cdot y(x)^2)'=0$

$2x\cdot y+x^2\cdot y'+1\cdot y^2+x\cdot 2y\cdot y'=0$

$x^2y'+2xy\cdot y'=-2xy-y^2$

$\frac{\cancel{(x^2+2xy)}y'}{\cancel{x^2+2xy}} = \frac{-2xy-y^2}{x^2+2xy}$

$y'=-\frac{2xy+y^2}{x^2+2xy}$

Partiell derivasjon:

$$f(x,y) = xy(x+y) \quad (=4)$$
$$= x^2y + xy^2$$

$$f'_x = y \cdot 2x + y^2 \cdot 1 = \underline{2xy + y^2}$$ ← tenker på y som en konstant.

$$f'_y = (x^2y)'_y + (xy^2)'_y$$ ← tenker på x som en konstant

$$= x^2 \cdot (y)'_y + x \cdot (y^2)'_y$$
$$= x^2 \cdot 1 + x \cdot 2y = \underline{x^2 + 2xy}$$

Implisitt derivasjon vha partiell derivasjon

$$f(x,y) = c \xrightarrow[\text{derivasjon}]{\text{implisitt}} f'_x + f'_y \cdot y' = 0$$

$$f'_y \cdot y' = -f'_x$$

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

$$y' = -\frac{2xy + y^2}{x^2 + 2xy}$$

③ Andrederiverte og krumning.

Eks:

$$f(x) = x^3 - x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

$$f''(x) = (3x^2-1)' = \underline{\underline{6x}}$$

Skrivemåte:

$f''(x)$: den andrederiverte til x.

høyere ordens deriverte

$$f'''(x) = (6x)' = 6$$

$$f^{(4)}(x) = (6)' = 0$$

$$\vdots$$

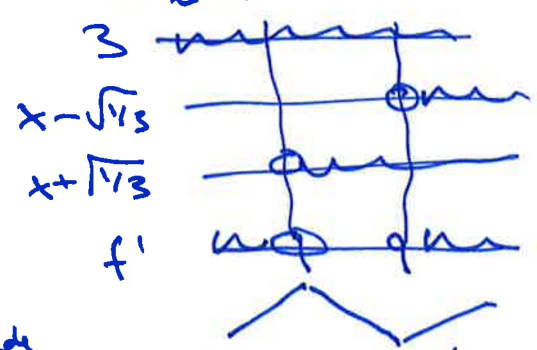
Anvendelser av den andrederiverte

$$f(x) = x^3 - x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

$$= 3\cdot(x-\sqrt{1/3})(x+\sqrt{1/3})$$

$-0{,}5 \simeq -\sqrt{1/3}$ $\quad$ $\sqrt{1/3} \simeq 0{,}5$

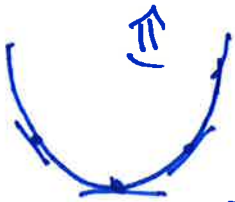


$f'(x)$ voksende

$\Uparrow$

$f''(x) > 0$

$\Uparrow$



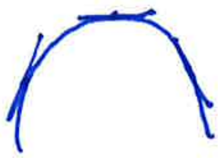
grafen til f har positiv krumning

$f'(x)$ avtagende

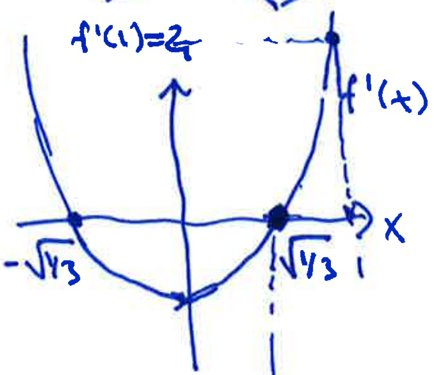
$\Uparrow$

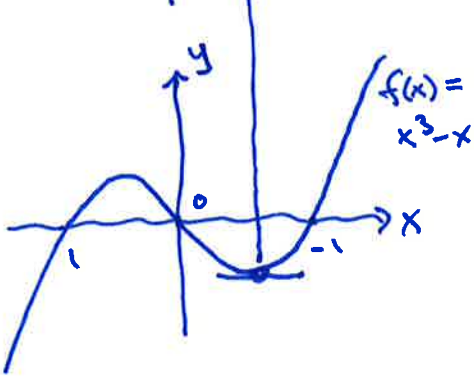
$f''(x) < 0$

$\Uparrow$



grafen til f har negativ krumning





Tolkning av $f''(x)$:

$f''(x) > 0$:

positiv krumning
($f'(x)$ voksende)

$f''(x) < 0$:

negativ krumning
($f'(x)$ avtagende)

Eks: $f(x) = x^3 - x$

$f'(x) = 3x^2 - 1$

$f''(x) = \underline{6x}$

$f''(x)$